Algebra e Geometria
Secondo Appello, 8 Gennaio 2013

Tema A

Motivare adeguatamente ogni risposta.

1. Fissato un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$, sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione che associa al vettore $x \in \mathbb{R}^n$ il valore $f(x) = v^T x$ (prodotto scalare di v ed x). Provare che f è lineare. Descrivere $Ker f$ e calcolarne la dimensione.

2. Sia $V \leq \mathbb{R}^4$ l'insieme definito come
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\}.$$
   (a) Si provi che V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determinare la dimensione di V e si verifichi che i vettori
$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   sono una base di V.
   (c) Determinare una base ortogonale di V.
   (d) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base trovata nel punto precedente.

3. Al variare di $s \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice A_s
$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 & s^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ s & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Stabilire per quali valori di s la matrice A_s è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Per $s = 0$ determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_0P$ sia diagonale.

4. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$.
   (a) Si provi che due autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
   (b) Si provi che, se A è simmetrica, allora due autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.

5. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

   (a) Scrivere
   $$z = \frac{2-i}{2+2i}$$
   nella forma $a+ib$.

   (b) Determinare tutti i numeri complessi x tali che $x^3 = 1$.

   (c) Si consideri l'applicazione
   $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^3 - 1 \end{aligned}$$
   Dire se f è iniettiva e suriettiva motivando la risposta.

6. Siano dati i punti $P_1(1,0,-2)$, $P_2(0,0,-1)$ e $P_3(1,1,-2)$.

   (a) Si determinino equazioni parametriche del piano π passante per i tre punti P_1, P_2, P_3;

   (b) Si determinino equazioni cartesiane del piano π passante per i tre punti P_1, P_2, P_3.

   (c) Si determini la distanza del punto $O(0,0,0)$ dal piano π.

Svolgere su fogli a parte.

7. Sia dato il sistema di congruenze:
   $$\begin{aligned} 8X &\equiv 24 \bmod 20 \\ 10X &\equiv 5 \bmod 15 \\ 60X &\equiv 100 \bmod 40 \end{aligned}$$
   Dire se il sistema ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

8. Siano date due matrici quadrate A e B tali che $AB = BA$. Dimostrare per induzione su n che per $n \geq 1$ si ha: $A^n B = BA^n$.