Su alcune classi di gruppi localmente graduati

Maria Tota
(su un lavoro in collaborazione con A. Rhemtulla)

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Salerno

Workshop: Teoria dei Gruppi e Applicazioni
Padova - 29 settembre 2006

Indice

Indice

Indice

Indice

Indice

Indice

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g. } \Rightarrow\ \exists\ N \triangleleft F,\ N \neq F\ \mid\ F/N \text{ è finito}$$

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g. } \Rightarrow\ \exists\ N \triangleleft F,\ \ N \neq F\ \mid\ F/N \text{ è finito}$$

Esempi

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g.} \Rightarrow \ \exists\ N \triangleleft F,\ \ N \neq F \ \mid \ F/N \text{ è finito}$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow$ G localmente graduato

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g. } \Rightarrow\ \exists\ N \triangleleft F,\ N \neq F\ \mid\ F/N \text{ è finito}$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow$ G localmente graduato
- G localmente residualmente finito $\Rightarrow$ G localmente graduato

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g.} \Rightarrow\ \exists\ N \lhd F,\ \ N \neq F\ \mid\ F/N \text{ è finito}$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow$ G localmente graduato
- G localmente residualmente finito $\Rightarrow$ G localmente graduato

$$G \text{ libero} \Rightarrow G \text{ localmente graduato}$$

Definizione

Un gruppo G è detto localmente graduato se ogni sottogruppo non identico e finitamente generato F di G possiede un quoziente finito non banale.

$$1 \neq F \leq G,\ F \text{ f.g. } \Rightarrow\ \exists\ N \lhd F,\ N \neq F\ \mid\ F/N \text{ è finito}$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow$ G localmente graduato
- G localmente residualmente finito $\Rightarrow$ G localmente graduato

$$G \text{ libero} \Rightarrow G \text{ localmente graduato}$$

- I Mostri di Tarski NON sono localmente graduati

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

$\mathcal{L}$ è P-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa
- $\mathcal{L}$ è R-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

$\mathcal{L}$ è P-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa
- $\mathcal{L}$ è R-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

$\mathcal{L}$ è P-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è una varietà

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa
- $\mathcal{L}$ è R-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

$\mathcal{L}$ è P-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è una varietà

$\mathcal{L}$ NON è N_0-chiusa

Notazione

$\mathcal{L}$:= classe dei gruppi localmente graduati

Proprietà di chiusura di $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$ è S-chiusa
- $\mathcal{L}$ è L-chiusa
- $\mathcal{L}$ è R-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è Q-chiusa

$\mathcal{L}$ è P-chiusa

$\mathcal{L}$ NON è una varietà

$\mathcal{L}$ NON è N_0-chiusa

(P. Hall) : $\forall\ G;\ G \hookrightarrow G^* = F_1F_2,\ F_i \lhd G,\ F_i$ libero, $i = 1, 2$

Problema

Problema

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^S$$

Problema

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^S, \quad \mathcal{L} > \mathcal{L}^Q$$

Problema

$\mathcal{L} = \mathcal{L}^S, \quad \mathcal{L} > \mathcal{L}^Q$ **??** $\mathcal{L}^{QS} := (\mathcal{L}^S)^Q$ **??**

Indice

Proposizione

$$\mathcal{L}^{QS} := \text{classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è finita} =: \mathcal{L}_1$$

Proposizione

$$\mathcal{L}^{QS} := \text{classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è finita} =: \mathcal{L}_1$$

Esempi

Proposizione

$$\mathcal{L}^{QS} := \text{classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è finita} =: \mathcal{L}_1$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$

Proposizione

$\mathcal{L}^{QS}$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è finita =: $\mathcal{L}_1$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$
- G localmente finito $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$

Proposizione

$$\mathcal{L}^{QS} := \text{classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è finita} =: \mathcal{L}_1$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$
- G localmente finito $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$
- G libero non ciclico $\Rightarrow G \notin \mathcal{L}_1$

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa

$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa

$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa

$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa

$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa

$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa

$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ è N-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ è N-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è $\acute{P}$-chiusa

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ è N-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è $\acute{P}$-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è una varietà

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ è N-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è $\acute{P}$-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è una varietà

Hall

$\exists$ G f.g., $G = N_1 N_2$, $N_i \lhd G$, N_i loc. ris., G NON loc. ris. ($G \notin SI$)

Ulteriori proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ è L-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è P-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è R-chiusa

DUNQUE

$\mathcal{L}_1$ è N-chiusa
$\mathcal{L}_1$ è $\acute{P}$-chiusa
$\mathcal{L}_1$ NON è una varietà

Hall

$\exists\ G$ f.g., $G = N_1 N_2$, $N_i \lhd G$, N_i loc. ris., G NON loc. ris. ($G \notin SI$)

Un'altra classe di esempi

G radicale $:\Leftrightarrow$ G ha una serie ascendente a fattori loc. nilp.

$$G \text{ radicale} \Rightarrow G \in \mathcal{L}_1$$

Il radicale $\mathcal{L}_1$

In particolare, $\mathcal{L}_1$ è una classe radicale e, in un assegnato gruppo G, il sottogruppo generato dagli $\mathcal{L}_1$-sottogruppi normali è il più grande $\mathcal{L}_1$-sottogruppo normale di G (il radicale $\mathcal{L}_1$ di G).

Indice

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \iff (H/K \text{ f.g., perfetto } \Rightarrow H/K = 1)$$

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; (H/K \text{ f.g., perfetto } \;\Rightarrow\; H/K = 1)$$

Esempi

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \iff (H/K \text{ f.g., perfetto } \Rightarrow H/K = 1)$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_2$

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; (H/K \text{ f.g., perfetto } \;\Rightarrow\; H/K = 1)$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_2$

$\not\Leftarrow$

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; (H/K \text{ f.g., perfetto } \;\Rightarrow\; H/K = 1)$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_2$

  $\not\Leftarrow$

  (Hall) $\exists\ G \in \mathcal{L}_2,\ G$ semplice, non ciclico

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; (H/K \text{ f.g., perfetto } \Rightarrow\; H/K = 1)$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_2$

  $\not\Leftarrow$

  (Hall) $\exists\; G \in \mathcal{L}_2,\;\; G$ semplice, non ciclico
- G localmente finito

  $G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; G$ loc. ris.

Definizione

$\mathcal{L}_2$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana

Caratterizzazione

$$G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; (H/K \text{ f.g., perfetto } \;\Rightarrow\; H/K = 1)$$

Esempi

- G localmente risolubile $\Rightarrow G \in \mathcal{L}_2$

  $\not\Leftarrow$

  (Hall) $\exists\ G \in \mathcal{L}_2,\ G$ semplice, non ciclico
- G localmente finito
  $G \in \mathcal{L}_2 \;\Leftrightarrow\; G$ loc. ris.
- G libero non ciclico $\Rightarrow G \notin \mathcal{L}_2$

Definizione

$SN = \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$:= classe dei gruppi con una serie abeliana

Definizione

$SN = \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$:= classe dei gruppi con una serie abeliana

Proposizione

$$\mathcal{L}_2 = \overline{\overline{SN}} := SN^{QS}$$

Definizione

$SN = \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$:= classe dei gruppi con una serie abeliana

Proposizione

$$\mathcal{L}_2 = \overline{\overline{SN}} := SN^{QS}$$

Il radicale $\mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2$ è una classe radicale e, in un assegnato gruppo G, il sottogruppo generato dagli $\mathcal{L}_2$-sottogruppi normali è il più grande $\mathcal{L}_2$-sottogruppo normale di G (il radicale $\mathcal{L}_2$ di G).

Indice

$$G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \ \not\Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

$$G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \ \not\Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

Teorema (P. Longobardi, M. Maj, H. Smith)

$$\left\{ \begin{array}{l} G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \\ \\ N \text{ loc. nilp.} \end{array} \right. \ \Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

$$G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \ \not\Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

Teorema (P. Longobardi, M. Maj, H. Smith)

$$\left\{ \begin{array}{l} G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \\ \\ N \text{ loc. nilp.} \end{array} \right. \Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

Teorema

$$\left\{ \begin{array}{l} G \in \mathcal{L},\ N \triangleleft G \\ \\ N \text{ radicale} \end{array} \right. \Rightarrow\ G/N \in \mathcal{L}$$

Gruppi in $\mathcal{L}_m$

Definizione

$\mathcal{L}_m$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana o finita di ordine al più m, $m > 2$

$$\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}_1$$

Gruppi in $\mathcal{L}_m$

Definizione

$\mathcal{L}_m$:= classe dei gruppi in cui ogni sezione semplice e f.g. è abeliana o finita di ordine al più m, $m > 2$

$$\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}_1$$

Teorema

$$\begin{cases} G \in \mathcal{L}, \ N \triangleleft G \\ N \in \mathcal{L}_m \\ \Omega \text{ catena di stgr. normali di G} \\ N = \bigcup_{L \in \Omega} L, \ G/L \in \mathcal{L}, \ \forall \ L \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \ G/N \in \mathcal{L}$$

Problema

$$\left.\begin{array}{l} G \in \mathcal{L} \\[1em] R_1 \text{ radicale } \mathcal{L}_1 \text{ di } G \\[1em] R_2 \text{ radicale } \mathcal{L}_2 \text{ di } G \end{array}\right\} \overset{??}{\Rightarrow} G/R_1 \text{ e/o } G/R_2 \ \in \mathcal{L}$$

Indice

Premesse

- G lineare $\Rightarrow$ $G \in \mathcal{L}$

Premesse

- G lineare $\Rightarrow$ $G \in \mathcal{L}$
- G lineare, $N \triangleleft G$ $\not\Rightarrow$ G/N lineare

Premesse

- G lineare $\Rightarrow$ $G \in \mathcal{L}$
- G lineare, $N \lhd G$ $\not\Rightarrow$ G/N lineare

Problemi

Premesse

- G lineare $\Rightarrow$ $G \in \mathcal{L}$
- G lineare, $N \lhd G$ $\not\Rightarrow$ G/N lineare

Problemi

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ lineare} \\ R_1 \text{ radicale } \mathcal{L}_1 \text{ di } G \\ R_2 \text{ radicale } \mathcal{L}_2 \text{ di } G \end{array}\right\} \overset{??}{\Rightarrow} G/R_1 \text{ e/o } G/R_2 \in \mathcal{L}$$

Premesse

- G lineare $\Rightarrow$ $G \in \mathcal{L}$
- G lineare, $N \lhd G$ $\not\Rightarrow$ G/N lineare

Problemi

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ lineare} \\ R_1 \text{ radicale } \mathcal{L}_1 \text{ di } G \\ R_2 \text{ radicale } \mathcal{L}_2 \text{ di } G \end{array}\right\} \stackrel{??}{\Rightarrow} G/R_1 \text{ e/o } G/R_2 \in \mathcal{L}$$

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ lineare} \\ R_1 \text{ radicale } \mathcal{L}_1 \text{ di } G \\ R_2 \text{ radicale } \mathcal{L}_2 \text{ di } G \end{array}\right\} \stackrel{??}{\Rightarrow} G/R_1 \text{ e/o } G/R_2 \text{ lineare}$$

Teorema

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare
- R_1/R_2 è localmente finito

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare
- R_1/R_2 è localmente finito
- Se char $F = 0$, allora R_1/R_2 è finito e G/R_1 è lineare

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare
- R_1/R_2 è localmente finito
- Se char $F = 0$, allora R_1/R_2 è finito e G/R_1 è lineare
- Se char $F = p > 0$ e G è f.g., allora G/R_1 è lineare

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare
- R_1/R_2 è localmente finito
- Se char $F = 0$, allora R_1/R_2 è finito e G/R_1 è lineare
- Se char $F = p > 0$ e G è f.g., allora G/R_1 è lineare
- Se char $F = p > 0$, allora $G/R_1 \in \mathcal{L}$

Teorema

Sia G un gruppo lineare su un campo F. Siano R_1, R_2 i radicali $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di G, rispettivamente. Allora:

- R_1 è risolubile e G/R_2 è lineare
- R_1/R_2 è localmente finito
- Se char $F = 0$, allora R_1/R_2 è finito e G/R_1 è lineare
- Se char $F = p > 0$ e G è f.g., allora G/R_1 è lineare
- Se char $F = p > 0$, allora $G/R_1 \in \mathcal{L}$

Corollario

$$\left\{\begin{array}{l} G \text{ lineare, } R_1, R_2 \\ \\ \text{radicali } \mathcal{L}_1 \text{ e } \mathcal{L}_2 \end{array}\right. \Rightarrow G, \ \frac{G}{R_1}, \ \frac{G}{R_2} \ \in \mathcal{L}$$

Questioni aperte

Definizioni

$FC(G) := \{x \in G \mid [x]_G \text{ è finita}\}$ *FC-centro*

G *FC-gruppo* $:\Leftrightarrow \; G = FC(G)$

Problema

$G \in \mathcal{L}, \; F := FC(G) \overset{??}{\Rightarrow} G/F \in \mathcal{L}$