Sottogruppi abeliani regolari e anelli radicali

Andrea Caranti

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Trento

Padova, 27 settembre 2006

Il piano

Il piano

In collaborazione con. . .

A.C., Francesca Dalla Volta e Massimiliano Sala
Abelian regular subgroups of the affine group and radical rings
Publ. Math. Debrecen, volume in memoria di Edit Szabó

Il piano

1 Introduzione
In collaborazione con
Sottogruppi abeliani regolari
Sottogruppi non abeliani regolari

2 Descrizione
Sottogruppi abeliani regolari
La corrispondenza

3 Esempi
Intersezione
Dimensione infinita

Un esempio

- S_4 è isomorfo al gruppo affine sullo spazio vettoriale $V(2, 2)$ di dimensione 2 sul campo con 2 elementi.
- Il gruppo delle traslazioni è il sottogruppo di Klein $V = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$.
- Come tale è un sottogruppo abeliano regolare di S_4.
- Ma anche i tre sottogruppi ciclici di ordine 4 sono abeliani e regolari:

$$\langle (1234) \rangle = \{ 1, (1234), (13)(24), (1432) \}, \dots$$

Un esempio

- S_4 è isomorfo al gruppo affine sullo spazio vettoriale $V(2,2)$ di dimensione 2 sul campo con 2 elementi.
- Il gruppo delle traslazioni è il sottogruppo di Klein $V = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$.
- Come tale è un sottogruppo abeliano regolare di S_4.
- Ma anche i tre sottogruppi ciclici di ordine 4 sono abeliani e regolari:

$$\langle (1234) \rangle = \{ 1, (1234), (13)(24), (1432) \}, \dots$$

Un esempio

- S_4 è isomorfo al gruppo affine sullo spazio vettoriale $V(2,2)$ di dimensione 2 sul campo con 2 elementi.
- Il gruppo delle traslazioni è il sottogruppo di Klein $V = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$.
- Come tale è un sottogruppo abeliano regolare di S_4.
- Ma anche i tre sottogruppi ciclici di ordine 4 sono abeliani e regolari:

$$\langle (1234) \rangle = \{ 1, (1234), (13)(24), (1432) \}, \dots$$

Un esempio

- S_4 è isomorfo al gruppo affine sullo spazio vettoriale $V(2,2)$ di dimensione 2 sul campo con 2 elementi.
- Il gruppo delle traslazioni è il sottogruppo di Klein $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- Come tale è un sottogruppo abeliano regolare di S_4.
- Ma anche i tre sottogruppi ciclici di ordine 4 sono abeliani e regolari:

$$\langle (1234) \rangle = \{1, (1234), (13)(24), (1432)\}, \dots$$

Li

Cai Heng Li
The finite primitive permutation groups containing an abelian regular subgroup.
Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 3, 725–747.

- Risolve il problema di classificare i gruppi di permutazioni finiti e primitivi che contengono un sottogruppo abeliano regolare. Uno studio iniziato da Burnside.
- Li nota più in generale che nel gruppo affine ci sono altri sottogruppi abeliani regolari oltre a quello delle traslazioni.

Li

Cai Heng Li
The finite primitive permutation groups containing an abelian regular subgroup.
Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 3, 725–747.

- Risolve il problema di classificare i gruppi di permutazioni finiti e primitivi che contengono un sottogruppo abeliano regolare. Uno studio iniziato da Burnside.
- Li nota più in generale che nel gruppo affine ci sono altri sottogruppi abeliani regolari oltre a quello delle traslazioni.

Li

Cai Heng Li
The finite primitive permutation groups containing an abelian regular subgroup.
Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 3, 725–747.

- Risolve il problema di classificare i gruppi di permutazioni finiti e primitivi che contengono un sottogruppo abeliano regolare. Uno studio iniziato da Burnside.
- Li nota più in generale che nel gruppo affine ci sono altri sottogruppi abeliani regolari oltre a quello delle traslazioni.

Il piano

Hegedüs

Pál Hegedüs
Regular subgroups of the affine group.
J. Algebra **225** (2000), no. 2, 740–742.

- Un esempio di un sottogruppo regolare *nonabeliano* di un gruppo affine finito che interseca nell'identità il sottogruppo delle traslazioni N.
- Nel caso finito, un sottogruppo *abeliano* regolare T del gruppo affine avrà sempre intersezione non banale con N. Infatti $Z = N \cap Z(NT) \neq 1$, è contenuto anche in T, perché NZ è abeliano, e N è transitivo.

Hegedüs

Pál Hegedüs
Regular subgroups of the affine group.
J. Algebra **225** (2000), no. 2, 740–742.

- Un esempio di un sottogruppo regolare *nonabeliano* di un gruppo affine finito che interseca nell'identità il sottogruppo delle traslazioni N.
- Nel caso finito, un sottogruppo *abeliano* regolare T del gruppo affine avrà sempre intersezione non banale con N. Infatti $Z = N \cap Z(NT) \neq 1$, e contenuto anche in T, perché NZ è abeliano, e N è transitivo.

Hegedüs

Pál Hegedüs
Regular subgroups of the affine group.
J. Algebra **225** (2000), no. 2, 740–742.

- Un esempio di un sottogruppo regolare *nonabeliano* di un gruppo affine finito che interseca nell'identità il sottogruppo delle traslazioni N.
- Nel caso finito, un sottogruppo *abeliano* regolare T del gruppo affine avrà sempre intersezione non banale con N. Infatti $Z = N \cap Z(NT) \neq 1$, e contenuto anche in T, perché NZ è abeliano, e N è transitivo.

Hegedüs

Pál Hegedüs
Regular subgroups of the affine group.
J. Algebra **225** (2000), no. 2, 740–742.

- Un esempio di un sottogruppo regolare *nonabeliano* di un gruppo affine finito che interseca nell'identità il sottogruppo delle traslazioni N.
- Nel caso finito, un sottogruppo *abeliano* regolare T del gruppo affine avrà sempre intersezione non banale con N. Infatti $Z = N \cap Z(NT) \neq 1$, e contenuto anche in T, perché NZ è abeliano, e N è transitivo.

Hegedüs

Pál Hegedüs
Regular subgroups of the affine group.
J. Algebra **225** (2000), no. 2, 740–742.

- Un esempio di un sottogruppo regolare *nonabeliano* di un gruppo affine finito che interseca nell'identità il sottogruppo delle traslazioni N.
- Nel caso finito, un sottogruppo *abeliano* regolare T del gruppo affine avrà sempre intersezione non banale con N. Infatti $Z = N \cap Z(NT) \neq 1$, e contenuto anche in T, perché NZ è abeliano, e N è transitivo.

Il piano

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x.
Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x. Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x. Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x.
Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x.
Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

Un sottogruppo abeliano regolare qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F. Sia $\mathrm{Aff}(V)$ il gruppo affine su V, dunque $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V)N$, ove N è il gruppo delle traslazioni

$$N = \{ \nu(x) : x \in V \},$$

ove $\nu(x) : z \mapsto z + x$. Sia ora

$$T = \{ \tau(x) : x \in V \}$$

un altro sottogruppo abeliano regolare, ove $\tau(x)$ è quell'unico elemento di T che porta 0 in x.
Scriviamo

$$\tau(x) = \gamma(x)\nu(x),$$

ove $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(V)$, e introduciamo la *mappa lineare*

$$\delta(x) = \gamma(x) - 1 \in \mathrm{End}(V)$$

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y+x+y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y + x + y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y + x + y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y + x + y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y+x+y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y + x + y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y + x + y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

T è abeliano

$(\gamma(x) = 1 + \delta(x).)$

$$\begin{aligned}\tau(x)\tau(y) &= \gamma(x)\nu(x)\gamma(y)\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x)^{\gamma(y)}\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x\gamma(y))\nu(y)\\ &= \gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)).\end{aligned}$$

Ma T è abeliano, dunque $\tau(x)\tau(y) = \tau(y)\tau(x)$. Dunque

$$\gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)) = \gamma(y)\gamma(x)\nu(y+x+y\delta(x))$$

e in particolare

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

δ è lineare

Da

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

otteniamo

Fatto

$\delta : V \to \mathrm{End}(V)$ è F-lineare.

δ è lineare

Da

Fatto

$x\delta(y) = y\delta(x)$ per ogni $x, y \in V$.

otteniamo

Fatto

$\delta : V \to \mathrm{End}(V)$ è F-lineare.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y) \\ &= \gamma(x + y + x\delta(y)) \\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y)) \\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x+y+x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x+y+x\delta(y)) = \gamma(x+y+x\delta(y))\nu(x+y+x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x+y+x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x+y+x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y) \\ &= \gamma(x + y + x\delta(y)) \\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y)) \\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

T è un gruppo

Dato che T è un gruppo, abbiamo

$$\tau(x)\tau(y) = \gamma(x)\gamma(y)\nu(x + y + x\delta(y)) =$$
$$= \tau(x + y + x\delta(y)) = \gamma(x + y + x\delta(y))\nu(x + y + x\delta(y)).$$

Dunque, ricordando $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$,

$$\begin{aligned}\gamma(x)\gamma(y) &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)\\ &= \gamma(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x + y + x\delta(y))\\ &= 1 + \delta(x) + \delta(y) + \delta(x\delta(y)),\end{aligned}$$

dato che δ è lineare. Dunque

Fatto

$\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ per ogni $x, y \in V$.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) =$$
$$= x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) =$$
$$= x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione
$$x \cdot y = x\delta(y).$$
- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene
$$\begin{aligned}(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).\end{aligned}$$
- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione
$$x \cdot y = x\delta(y).$$
- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene
$$\begin{aligned}(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).\end{aligned}$$
- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$\begin{aligned}(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).\end{aligned}$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione
$$x \cdot y = x\delta(y).$$
- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene
$$(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).$$
- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Algebre

- Definiamo su V un'operazione

$$x \cdot y = x\delta(y).$$

- E' commutativa, dato che $x\delta(y) = y\delta(x)$.
- E' lineare in entrambe le variabili.
- E' associativa, perché da $\delta(x\delta(y)) = \delta(x)\delta(y)$ si ottiene

$$\begin{aligned}(xy)z = (x\delta(y))z = x\delta(y)\delta(z) = \\ = x\delta(y\delta(z)) = x\delta(yz) = x(yz).\end{aligned}$$

- Dunque $(V, +, \cdot)$ è una F-algebra.

Pallino

- Definiamo su V l'operazione *pallino*

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- Abbiamo visto che $\tau(x)\tau(y) = \tau(x \circ y)$.
- Dunque $(V, \circ)$ è un gruppo, isomorfo a T sotto $\tau : (V, \circ) \to T \leq \mathrm{Aff}(V)$.
- Abbiamo appena mostrato che l'anello $(V, +, \cdot)$ è *radicale*.

Pallino

- Definiamo su V l'operazione *pallino*

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- Abbiamo visto che $\tau(x)\tau(y) = \tau(x \circ y)$.
- Dunque $(V, \circ)$ è un gruppo, isomorfo a T sotto $\tau : (V, \circ) \to T \leq \mathrm{Aff}(V)$.
- Abbiamo appena mostrato che l'anello $(V, +, \cdot)$ è *radicale*.

Pallino

- Definiamo su V l'operazione *pallino*
$$x \circ y = x + y + xy.$$
- Abbiamo visto che $\tau(x)\tau(y) = \tau(x \circ y)$.
- Dunque $(V, \circ)$ è un gruppo, isomorfo a T sotto $\tau : (V, \circ) \to T \leq \mathrm{Aff}(V)$.
- Abbiamo appena mostrato che l'anello $(V, +, \cdot)$ è *radicale*.

Pallino

- Definiamo su V l'operazione *pallino*

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- Abbiamo visto che $\tau(x)\tau(y) = \tau(x \circ y)$.
- Dunque $(V, \circ)$ è un gruppo, isomorfo a T sotto $\tau : (V, \circ) \to T \leq \mathrm{Aff}(V)$.
- Abbiamo appena mostrato che l'anello $(V, +, \cdot)$ è *radicale*.

Pallino

- Definiamo su V l'operazione *pallino*

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- Abbiamo visto che $\tau(x)\tau(y) = \tau(x \circ y)$.
- Dunque $(V, \circ)$ è un gruppo, isomorfo a T sotto $\tau : (V, \circ) \to T \le \mathrm{Aff}(V)$.
- Abbiamo appena mostrato che l'anello $(V, +, \cdot)$ è *radicale*.

Anelli radicali

- Un anello è *radicale* se coincide con il proprio radicale di Jacobson.
- In modo equivalente, un anello è radicale se è un gruppo rispetto all'operazione

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- L'elemento neutro è 0.

Anelli radicali

- Un anello è *radicale* se coincide con il proprio radicale di Jacobson.
- In modo equivalente, un anello è radicale se è un gruppo rispetto all'operazione

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- L'elemento neutro è 0.

Anelli radicali

- Un anello è *radicale* se coincide con il proprio radicale di Jacobson.
- In modo equivalente, un anello è radicale se è un gruppo rispetto all'operazione

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- L'elemento neutro è 0.

Anelli radicali

- Un anello è *radicale* se coincide con il proprio radicale di Jacobson.
- In modo equivalente, un anello è radicale se è un gruppo rispetto all'operazione

$$x \circ y = x + y + xy.$$

- L'elemento neutro è 0.

Il piano

Corrispondenza

Teorema

Sia F un campo, e $(V, +)$ uno spazio vettoriale su F.

C'è una corrispondenza biunivoca fra

1. *sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$, e*
2. *strutture di F-algebra associative e commutative $(V, +, \cdot)$ che si possono sovrapporre a $(V, +)$, in modo che l'anello risultante sia radicale.*

Classi di isomorfismo di F-algebre corrispondono a classi di coniugio sotto $\mathrm{GL}(V)$ dei sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$.

Corrispondenza

Teorema

Sia F un campo, e $(V, +)$ uno spazio vettoriale su F.
C'è una corrispondenza biunivoca fra

1. *sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$, e*
2. *strutture di F-algebra associative e commutative $(V, +, \cdot)$ che si possono sovrapporre a $(V, +)$, in modo che l'anello risultante sia radicale.*

Classi di isomorfismo di F-algebre corrispondono a classi di coniugio sotto $\mathrm{GL}(V)$ dei sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$.

Corrispondenza

Teorema

Sia F un campo, e $(V, +)$ uno spazio vettoriale su F.
C'è una corrispondenza biunivoca fra

1. *sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$, e*
2. *strutture di F-algebra associative e commutative $(V, +, \cdot)$ che si possono sovrapporre a $(V, +)$, in modo che l'anello risultante sia radicale.*

Classi di isomorfismo di F-algebre corrispondono a classi di coniugio sotto $\mathrm{GL}(V)$ dei sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$.

Corrispondenza

Teorema

Sia F un campo, e $(V, +)$ uno spazio vettoriale su F.
C'è una corrispondenza biunivoca fra

1. *sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$, e*
2. *strutture di F-algebra associative e commutative $(V, +, \cdot)$ che si possono sovrapporre a $(V, +)$, in modo che l'anello risultante sia radicale.*

Classi di isomorfismo di F-algebre corrispondono a classi di coniugio sotto $\mathrm{GL}(V)$ dei sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$.

Corrispondenza

Teorema

Sia F un campo, e $(V, +)$ uno spazio vettoriale su F. C'è una corrispondenza biunivoca fra

1. *sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$, e*
2. *strutture di F-algebra associative e commutative $(V, +, \cdot)$ che si possono sovrapporre a $(V, +)$, in modo che l'anello risultante sia radicale.*

Classi di isomorfismo di F-algebre corrispondono a classi di coniugio sotto $\mathrm{GL}(V)$ dei sottogruppi abeliani regolari di $\mathrm{Aff}(V)$.

Il piano

Annullatori

Fissata una struttura di F-algebra $(V, +, \cdot)$, definisco

$$U = \ker(\delta) = \{\, x \in V : x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in V \,\}.$$

E' facile scegliere la struttura di algebra su un fissato $(V, +)$ (di dimensione finita) in modo che U abbia dimensione arbitraria.
Inoltre

$$\begin{aligned} N \cap T &= \{\, \nu(x) : \tau(x) = \nu(x) \,\} \\ &= \{\, \nu(x) : \delta(x) = 0 \,\} \\ &= \{\, \nu(x) : x \in U \,\}. \end{aligned}$$

Dunque ritrovo

Lemma

$$N \cap T = C_N(T) = C_T(N).$$

Annullatori

Fissata una struttura di F-algebra $(V, +, \cdot)$, definisco

$$U = \ker(\delta) = \{ x \in V : x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in V \} .$$

E' facile scegliere la struttura di algebra su un fissato $(V, +)$ (di dimensione finita) in modo che U abbia dimensione arbitraria.

Inoltre

$$\begin{aligned} N \cap T &= \{ \nu(x) : \tau(x) = \nu(x) \} \\ &= \{ \nu(x) : \delta(x) = 0 \} \\ &= \{ \nu(x) : x \in U \} . \end{aligned}$$

Dunque ritrovo

Lemma

$$N \cap T = C_N(T) = C_T(N).$$

Annullatori

Fissata una struttura di F-algebra $(V, +, \cdot)$, definisco

$$U = \ker(\delta) = \{ x \in V : x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in V \} .$$

E' facile scegliere la struttura di algebra su un fissato $(V, +)$ (di dimensione finita) in modo che U abbia dimensione arbitraria.

Inoltre

$$\begin{aligned} N \cap T &= \{ \nu(x) : \tau(x) = \nu(x) \} \\ &= \{ \nu(x) : \delta(x) = 0 \} \\ &= \{ \nu(x) : x \in U \} . \end{aligned}$$

Dunque ritrovo

Lemma

$$N \cap T = C_N(T) = C_T(N).$$

Annullatori

Fissata una struttura di F-algebra $(V, +, \cdot)$, definisco

$$U = \ker(\delta) = \{ x \in V : x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in V \}.$$

E' facile scegliere la struttura di algebra su un fissato $(V, +)$ (di dimensione finita) in modo che U abbia dimensione arbitraria.
Inoltre

$$\begin{aligned} N \cap T &= \{ \nu(x) : \tau(x) = \nu(x) \} \\ &= \{ \nu(x) : \delta(x) = 0 \} \\ &= \{ \nu(x) : x \in U \}. \end{aligned}$$

Dunque ritrovo

Lemma

$$N \cap T = C_N(T) = C_T(N).$$

Annullatori

Fissata una struttura di F-algebra $(V, +, \cdot)$, definisco

$$U = \ker(\delta) = \{ x \in V : x \cdot y = 0 \text{ for all } y \in V \} .$$

E' facile scegliere la struttura di algebra su un fissato $(V, +)$ (di dimensione finita) in modo che U abbia dimensione arbitraria.
Inoltre

$$\begin{aligned} N \cap T &= \{ \nu(x) : \tau(x) = \nu(x) \} \\ &= \{ \nu(x) : \delta(x) = 0 \} \\ &= \{ \nu(x) : x \in U \} . \end{aligned}$$

Dunque ritrovo

Lemma

$$N \cap T = C_N(T) = C_T(N).$$

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Intersezioni

- Quando V, e dunque $\mathrm{Aff}(V)$, sono finiti, si ha che $U \neq 0$, dato che $(V, +, \cdot)$ è nilpotente, dunque $N \cap T = \{ \nu(x) : x \in U \}$ è non banale.
- In altre parole, un sottogruppo abeliano regolare del gruppo affine ha intersezione non banale con il gruppo delle traslazioni.
- Ricordiamo che c'è un semplice argomento alternativo elementare di p-gruppi.
- Inoltre quando V è finito segue da quanto visto prima che $N \cap T$ può avere ordine arbitrario $\neq 1$.

Il piano

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.

Dimensione infinita

Esempio

- Sia $(V, +, \cdot)$ l'ideale massimale $tF[[t]]$ dell'anello delle serie di potenze formali $F[[t]]$.
- E' un anello radicale.
- Siccome $F[[t]]$ è un dominio, abbiamo $U = \{ x \in V : xy = 0 \text{ per ogni } y \in V \} = \{ 0 \}$.
- Dunque il sottogruppo abeliano regolare T interseca il gruppo N delle traslazioni in $\{ 1 \}$.
- Inoltre T è privo di torsione. Se F ha caratteristica positiva p, il gruppo N delle traslazioni ha esponente p. Dunque $\mathrm{Aff}(V)$ ha due sottogruppi abeliani regolari molto diversi, un po' come S_4 con cui abbiamo cominciato.