# **Azioni transitive minimali per gruppi risolubili**

Francesca Dalla Volta

Padova 27-29 settembre 2006

Un gruppo $G$ di permutazioni (finito) su un insieme $\Omega$, si dice *transitivo minimale* se è transitivo nella sua azione su $\Omega$, ma nessun sottogruppo proprio $H \leq G$ è transitivo su $\Omega$.

Suprunenko e Kopilowa (1985, 1986) hanno considerato il caso di gruppi risolubili transitivi minimali di grado prodotto di due primi $p, q\, p \neq q$. Gruppi transitivi minimali sono stati studiati da Praeger, Miller per questioni legati ai grafi non Cayley.

**Qualche risultato preliminare. Esempi.**

- $G \leq Sym(n)$ è transitivo minimale se e solo se non esiste un sottogruppo proprio $H$ di $G$, tale che sia $G = G_\alpha H$.

- Un gruppo primitivo transitivo minimale è semplice

- Ogni gruppo di permutazioni regolare è transitivo minimale

- Se $n > 1$ è diverso da un numero primo o dal quadrato di un numero primo, esistono gruppi non regolari, transitivi minimali di grado $n$ (Ngo Dak Tan, 1976).

## m-sottogruppi

Consideriamo un gruppo $G$ insieme con tutte le sue azioni transitive, fedeli o non fedeli:

- Sia $A \subseteq G$. $G$ opera in modo transitivo su $G : A$.

- Il nucleo è $K_{G:A} = \bigcap_{g \in G} A^g$.

- $G$ ha un'azione transitiva minimale su $G : A$ se e solo se ogni $H \subseteq G, K_{G:A} \subseteq H$ opera in modo non transitivo su $G : A$. $A$ si dice m-**sottogruppo**.

## Proprietà reticolari e un primo teorema di riduzione

Ricordiamo che in un insieme parzialmente ordinato $(L, \leq)$ un *order ideal* è un sottoinsieme $M$ di $L$ tale che se $X \in M$, $Y \leq X$, con $X \in L$, allora $Y \in M$.

**Osservazione** Gli m-sottogruppi $A$ di un gruppo $G$ con $K_{G:A}$ banale sono un *order ideal* in $L(G)$.

Segue da:

**Lemma** (i) Dato un sottogruppo $A$ di $G$, $A \subseteq_{\mathrm{m}} G$ se e solo se $H \subseteq G$ e $AH = G$ implica $HK_{G:A} = G$.
(ii) Dato un sottogruppo $A \subseteq_{\mathrm{m}} G$, si consideri $B \subseteq A$. Allora
(a): $B \subseteq_{\mathrm{m}} G$ o
(b): $K_{G:B} \neq K_{G:A}$, $BK_{G:A} \subseteq_{\mathrm{m}} G$ ed esiste un sottogruppo $H \subseteq G$ con $HK_{G:B} \neq HK_{G:A} = G$.

In particolare, se $A \subset_{\mathrm{m}} G$ e $K_{G:A} \subseteq B \subseteq A$ allora $B \subset_{\mathrm{m}} G$.

**Sottogruppi normali**

Siano $H$ un sottogruppo normale proprio di $G$, $A \subset_{\mathrm{m}} G$, $K_{G:A} \subseteq H$, con $K_{G:A} \neq H$, $n = [G : A]$.

- $H$ non è transitivo su $G : A$;

- posto $\Omega := G : A$ le orbite di $H$ su $\Omega$ sono un sistema di imprimitività per $G$. Quindi, se $\Omega_1, ..., \Omega_{n^*}$ sono tali orbite, $|\Omega_i| = s$ e $n^* := \frac{n}{s}$. Poniamo $\Omega^* := \{\, \Omega_i \mid i = 1, ..., n^* \,\}$.

- Se $1A \in \Omega_1$ e $B$ è lo stabilizzante di $\Omega_1$(come insieme), allora $B = AH$ e $B \subset_{\mathrm{m}} G$.

- $G$ opera come gruppo transitivo minimale su $\Omega^*$

Abbiamo quindi:

**Teorema**

• Un gruppo di permutazioni $G$ che sia transitivo minimale e quasi-primitivo è semplice.
• In generale, se $G$ non è un gruppo semplice e $H$ è un sottogruppo normale proprio di $G$, allora l'azione di $G$ sull'insieme delle orbite di $H$ è transitiva minimale.
• Se $N$ è un sottogruppo normale di $G$ e $N \subseteq A \subseteq G$, $A/N \subset_{\mathsf{m}} G/N$ se e solo se $A \subset_{\mathsf{m}} G$.

**Gruppi risolubili**

**Teorema**(i) Sia $A \subset_{\mathrm{m}} G$ con $G/K_{G:A}$ risolubile. Allora $\pi(G:A) = \pi(G/K_{G:A})$. In particolare, se $G$ è un guppo risolubile transitivo minimale di grado $n$ si ha $\pi(G) = \pi(n)$.

(ii) Sia $A \subset G$. Se $A/K_{G:A}$ è contenuto nel sottogruppo di Frattini di $G/K_{G:A}$ allora $A \subset_{\mathrm{m}} G$. Viceversa, se $G/K_{G:A}$ è nilpotente e $A \subset_{\mathrm{m}} G$ allora $A/K_{G:A}$ è contenuto nel sottogruppo di Frattini $G/K_{G:A}$.

(iii) in particolare, se $A \subset_{\mathrm{m}} G$ e $|G : A| = p^i$ per un primo $p$ allora $G/K_{G:A}$ è un $p$-gruppo e $A/K_{G:A}$ è contenuto nel Frattini di $G/K_{G:A}$.

**Teorema (riduzione)** Sia $F(G)$ il sottogruppo di Fitting del gruppo risolubile $G$,

• $A$ un m-sottogruppo di $G$, core-free, $A \subseteq F(G)$.

• $\pi^* := \pi(G : F)$ e $Q$ è un Hall $\pi^*$-sottogruppo di $G$.

• $P$ $p$-sottogruppo di Sylow normale di $G$.

• $A_P := A \cap P$ e $A_Q := A \cap Q$,

allora $p \notin \pi^*$ e $A_Q \times A_P \subset_{\mathrm{m}} Q^*P$ è core-free in $Q^*P$ per ogni coniugato $Q^*$ di $Q$.

Viceversa, siano $P_1, P_2, .., P_t$ $p_i$-sottogruppi di Sylow normali in $G$ e supponiamo:

• esistono un sottogruppo $A_Q$ di $F \cap Q$ e sottogruppi $A_{P_i} \subseteq P_i$ tali che $A_Q \times A_{P_i} \subset_{\mathrm{m}} Q^*P_i$ sia core-free in $Q^*P_i$, per tutti i coniugati $Q^*$ of $Q$ e per ogni $i = 1...t$

allora $A_Q \times A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_t} \subset_{\mathrm{m}} G$ è core-free in $G$.

**Esempio** Sia $\pi^* = \{q\}$; $p$ qualsiasi primo in $\pi(n) \setminus \{q\}$, $n = |G : A|$. Allora

- $Q \cap F$ è il $q$-sottogruppo di Sylow di $F$
- $A_Q$ è il $q$-sottogruppo di Sylow of $A$.
- $A_P$ è il $p$-sottogruppo di Sylow di $A$.
- Dunque $A_Q \times A_P \subset_{\mathrm{m}} QP$ è transitivo minimale di grado $|n|_q|n|_p$.
- Per almeno un $p$ $QP$ non è nilpotente.
- Gruppi di questo tipo sono alla base di costruzioni induttive.

Nel caso di rappresentazioni di grado $n$ libero da quadrati otteniamo precise informazioni sul sottogruppo di Fitting di $G$:

**Teorema** *(1) Sia* $A \subset_{\mathrm{m}} G$ *,* $G$ *risolubile core-free*

- *suppponiamo* $[G : A] = n$ *libero da quadrati.*
- $F$ *il sottogruppo di Fitting* $G$*.*

*Allora*$|F|$ *è coprimo con* $|G : F|$ *e tutti i sottogruppi di Sylow di* $F$ *sono abeliani elementari. In particolare,* $G$ *è nilpotente se e solo se* $G$ *è ciclico di ordine* $n$*, con* $A = 1$*.*

*inoltre (2) si consideri*

- $\pi^* = \pi(n) \setminus \pi(F)$ *e* $n^*$ *prodotto dei primi in* $\pi^*$*.*
- *Se* $C$ *è un* $\pi^*$*-sottogruppo di Hall di* $A$ *e se* $Q$ *un* $\pi^*$*-sottogruppo di Hall che contiene* $C$ *allora* $|Q : C| = n^*$ *e l'azione di* $Q$ *su* $Q : C$ *è permutationalmente equivalente all'azione di* $G$ *su* $G : AF$*.*

Qui abbiamo una base di induzione:

(**Suprunenko**) *Un gruppo di permutazioni di grado $n$, $G \leq Sym_{pq}$ con $p \neq q$, numeri primi, $q < p$ e $q$ non divide $(p-1)$, è transitivo minimale se e solo se è isomorfo a uno dei tre gruppi:*

*(i) Il gruppo ciclico di ordine $pq$;*

*(ii) Un gruppo non-abeliano minimale $PQ$ con $P$ normale, $|P| = p^m$ e $|Q| = q$; $m$ è l'esponente di $p$ mod $q$;*

*(iii) Un gruppo non-abeliano minimale $PQ$ con $Q$ normale, $|P| = p$ and $|Q| = q^r$, dove $r$ è l'esponente di $q$ mod $p$.*

## Azioni di grado che coinvolge 2 primi

I $\{p, q\}$-gruppi e le loro rappresentazioni transitive minimali giocano un ruolo particolare. Supponiamo $A \subsetneq_{\mathsf{m}} G$ sia core-free e $\pi(G) = \{p, q\}$. Ogni sottogruppo normale $N$ di $G$ fornisce una rappresentazione transitiva minimale $AN/N \subsetneq_{\mathsf{m}} G/N$ di grado $\leq |G : A|$.

**Lemma** *Sia $G$ un gruppo risolubile e sia $A \subsetneq_{\mathsf{m}} G$ core-free. Supponiamo che il primo $q$ divida $|G : A|$ alla prima potenza. Sia $N$ un $q$-gruppo normale in $G$. Allora $N$ è abeliano elementare ed è un sottogruppo di Sylow irriducibile per l'azione di $G$.*

Consideriamo il caso di $A \subsetneq_{\mathsf{m}} G$, di indice $p^i q$

**1** *Se uno dei 2 sottogruppi di Sylow è normale ci riduciamo al caso nilpotente.*

2 Altrimenti $F_1 = F(G)$ è un $p$-gruppo.
• $AF_1 \subset_{\mathrm{m}} G$ e, se $K \supseteq F_1$ è il core di $AF_1$ in $G$, $AF_1/K \subset_{\mathrm{m}} G/K$ è transitivo minimale, fedele di grado $p^j q$ con $j < i$ e con $|G/K|_p < |G|_p$.
• Se $F_2$ è la preimmagine di $F(G/F)$ in $G$ allora $F_2/F_1$ è un $q$-gruppo. Quindi, se $F_2$ non è contenuto in $K$ $F_2K/K$ è un $q$-sottogruppo di Sylow normale di $G/K$. In questo caso ci si riduce al caso nilpotente. Altrimenti $K \supseteq F_2$ e $|G/K|_q < |G|_q$. Il processo ha termine quando il gruppo diventa nilpotente o quando si arriva a un gruppo di "Suprunenko-Kopylova".