Sui gruppi $\mathfrak{X}$-transitivi

Costantino Delizia

Università degli Studi di Salerno
Dipartimento di Matematica e Informatica

in collaborazione con:
Chiara Nicotera [$\star$]
Primož Moravec e Chiara Nicotera [$\star\star$]

Workshop "Teoria dei Gruppi e Applicazioni"
Padova, 27–29 settembre 2006

Gruppi $\mathfrak{X}$-transitivi

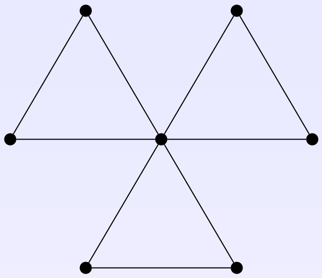
$\mathfrak{X}$ classe gruppale, G gruppo

$\Gamma_{\mathfrak{X}}(G)$:

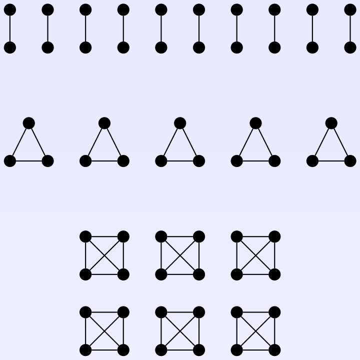
- *vertici*: $G \setminus \{1\}$;
- *lati*: $a — b \iff \langle a, b \rangle \in \mathfrak{X}$.

G $\mathfrak{X}$-**transitivo** (o $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo) $:\iff$
$\langle a, b \rangle \in \mathfrak{X},\ \langle b, c \rangle \in \mathfrak{X} \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \mathfrak{X}, \ \ \forall\, a, b, c \in G \setminus \{1\}$.

Il grafo della commutatività di Q_8



Il grafo della commutatività di A_5



Gruppi commutativi-transitivi

L. Weisner (1925). G $C\mathrm{T}$-gruppo finito $\Longrightarrow$ G risolubile oppure semplice.

M. Suzuki (1957). G $C\mathrm{T}$-gruppo semplice finito, non abeliano $\Longleftrightarrow$ $G \cong \mathrm{PSL}(2, 2^f)$, $f > 1$.

Y.F. Wu (1998). G $C\mathrm{T}$-gruppo finito risolubile, non abeliano $\Longleftrightarrow$ G gruppo di Frobenius finito con nucleo abeliano e complemento ciclico.

Proprietà bigenetiche e T-classi

$\mathfrak{X}$ **bigenetica** nella classe dei gruppi finiti $:\Longleftrightarrow$
G finito, $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{X} \ \ \forall\, a, b \in G \Rightarrow G \in \mathfrak{X}$.

Sono bigenetiche nella classe dei gruppi finiti:

(i) risolubilità [J.G. Thompson (1968)];

(ii) supersolubilità [R.W. Carter, B. Fischer and T. Hawkes (1968)];

(iii) nilpotenza [M. Zorn (1936)].

$\mathfrak{X}$ **T-classe** $:\Longleftrightarrow$

- $\mathfrak{X}$ chiusa per sottogruppi;
- $\mathfrak{X}$ contiene tutti i gruppi abeliani finiti;
- $\mathfrak{X}$ bigenetica nella classe dei gruppi finiti.

$\mathfrak{X}$-radicale di un gruppo

$R_{\mathfrak{X}}(G) :=$ prodotto di tutti gli $\mathfrak{X}$-sottogruppi normali di G ($\mathfrak{X}$-**radicale** di G).

G $\mathfrak{X}$-**semisemplice** $:\Longleftrightarrow R_{\mathfrak{X}}(G) = 1$.

Lemma 1 [$\star\star$]. $\mathfrak{X}$ T-classe, G $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo finito $\Longrightarrow R_{\mathfrak{X}}(G) \in \mathfrak{X}$.

Teorema 2 [$\star\star$]. $\mathfrak{X}$ T-classe, G $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo finito $\Longrightarrow$

(i) $G \in \mathfrak{X}$, oppure

(ii) G $\mathfrak{X}$-semisemplice, oppure

(iii) G un gruppo di Frobenius con nucleo e complemento in $\mathfrak{X}$.

Dimostrazione del Teorema 2

Sia $R = R_{\mathfrak{X}}(G) \in \mathfrak{X}$. Si può assumere $1 \neq R \neq G$. Sia $y \in R \setminus \{1\}$ e per assurdo esista $a \in C_G(y) \setminus R$. Allora $\langle a, y \rangle \in \mathfrak{X}$. Da ciò $\langle a, h \rangle \in \mathfrak{X}$ per ogni $h \in R$. Quindi $\langle a^x, h \rangle \in \mathfrak{X}$ per ogni $x \in G$ e $h \in R$. Ne segue che $\langle a^x, a^z \rangle \in \mathfrak{X}$ per ogni $x, z \in G$.

Si proverà che $\langle u, v \rangle \in \mathfrak{X}$ per ogni $u, v \in a^G$. Per ogni $u \in a^G$, sia $\mathrm{wt}(u) = r$ il minimo intero tale che u può essere scritto nella forma $a^{\pm g_1} \cdots a^{\pm g_r}$ per qualche $g_1, \dots, g_r \in G$. Si proceda per induzione su $\mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v)$. Se $\mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v) = 2$, l'asserto è vero. Sia $k \geq 2$, e sia $\mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v) = k + 1$. Si può assumere $\mathrm{wt}(u) > 1$. Quindi $u = u' a^{\pm g}$ per qualche $g \in G$ e $u' \in a^G \setminus \{1\}$ con $\mathrm{wt}(u') = \mathrm{wt}(u) - 1$. Allora $\langle u, a^g \rangle = \langle u', a^g \rangle \in \mathfrak{X}$ per ipotesi induttiva. Analogamente $\langle a^f, v \rangle \in \mathfrak{X}$ per qualche $f \in G$. Ne segue che $\langle u, v \rangle \in \mathfrak{X}$.

Quindi $a^G \in \mathfrak{X}$ e $a \in R$, una contraddizione. Pertanto G è un gruppo di Frobenius di nucleo R. Sia H un complemento. Allora H è un $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo con centro non identico, e dunque $H \in \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{X}$-centralizzante di un gruppo

$\mathfrak{X}$ classe di gruppi, G gruppo, $H \leq G$

$C_G^{\mathfrak{X}}(H) := \{x \in G : \langle x, h \rangle \in \mathfrak{X}, \text{ per qualche } h \in H \setminus \{1\}\}$
($\mathfrak{X}$-**centralizzante di** H **in** G).

Lemma 3 [$\star\star$]. $\mathfrak{X}$ T-classe, G $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo finito, H $\mathfrak{X}$-sottogruppo di $G \implies C_G^{\mathfrak{X}}(H)$ $\mathfrak{X}$-sottogruppo di G contenente H.

Proposizione 4 [$\star\star$]. $\mathfrak{X}$ T-classe, G gruppo di Frobenius finito con nucleo F e complemento $H \implies G$ $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo sse $C_G^{\mathfrak{X}}(F)$ e $C_G^{\mathfrak{X}}(H)$ sono $\mathfrak{X}$-gruppi.

Gruppi risolubili-transitivi, gruppi supersolubili-transitivi

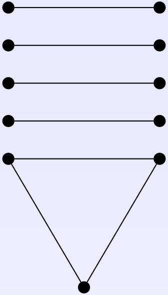
Teorema 5 [$\star\star$]. $\mathfrak{X}$ T-classe contenente tutti i gruppi diedrali finiti e tale che ogni $\mathfrak{X}$-gruppo finito è risolubile, G $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-gruppo finito $\Longrightarrow$ $G \in \mathfrak{X}$ oppure G gruppo di Frobenius con complemento in $\mathfrak{X}$. In particolare, G risolubile.

Corollario 6 [$\star\star$]. G finito risolubile-transitivo $\Longrightarrow$ G risolubile.

Corollario 7 [$\star\star$]. G finito supersolubile-transitivo $\Longrightarrow$ G supersolubile oppure G gruppo di Frobenius con complemento supersolubile. In particolare, G risolubile.

Supersolubile-transitivo $\not\Rightarrow$ supersolubile.

Il grafo della supersolubilità di A_4



Esempi

Esempio 8. Sia $A = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$ un gruppo abeliano elementare di ordine 9 e sia α l'automorfismo di A associato alla matrice

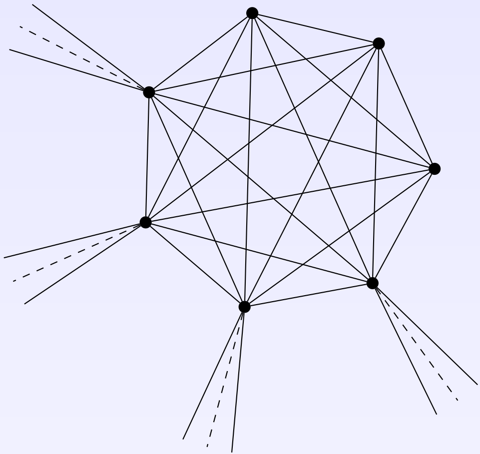
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $G = A \rtimes \langle \alpha \rangle$. G è un gruppo di ordine 36 non supersolubile-transitivo. Infatti $\langle \alpha^2, (\alpha y)^2 \rangle$ è un gruppo diedrale, $\langle (\alpha y)^2, \alpha y \rangle$ è ciclico, mentre $\langle \alpha^2, \alpha y \rangle = G$ non è supersolubile. Si noti che $C_G^{\mathfrak{S}}(\langle \alpha \rangle)$ ha ordine 20, quindi non è un sottogruppo di G.

Esempio 9. Sia $A = \mathbb{Z}_3^2 \oplus \mathbb{Z}_5^2$. Per un risultato di Zassenhaus, A ammette un gruppo di automorfismi senza punti fissi isomorfo a Q_8. Sia $G = A \rtimes Q_8$. Allora $C_G^{\mathfrak{S}}(A) = G$ non è supersolubile.

Il grafo della nilpotenza di $PSL(2,9)$

Contiene una componente connessa della forma



Gruppi nilpotenti-transitivi

Teorema 10 [⋆⋆]. G $\mathfrak{N}\mathrm{T}$-gruppo finito $\Longrightarrow$

(i) G è nilpotente, oppure

(ii) G è un gruppo di Frobenius con complemento nilpotente, oppure

(iii) $G \cong \mathrm{PSL}(2, 2^f)$ per qualche $f > 1$, oppure

(iv) $G \cong \mathrm{Sz}(q)$ con $q = 2^{2n+1} > 2$.

Viceversa, ogni gruppo finito del tipo (i)–(iv) è un $\mathfrak{N}\mathrm{T}$-gruppo.

Gruppi localmente finiti con grafo della commutatività di diametro 1

G $\mathfrak{X}$-transitivo $\Longleftrightarrow$ diam($\Gamma_{\mathfrak{X}}(G)$)=1.

Y. Fen-Wu (1998). Se G è un CT-gruppo risolubile localmente finito, allora $G = F \rtimes H$, dove $F = FitG$ è abeliano e H è un gruppo localmente ciclico di automorfismi di F senza punti fissi. Inoltre tutti i complementi di F sono coniugati in G. Viceversa, se F è un gruppo abeliano localmente finito e H è un gruppo localmente ciclico di automorfismi di F senza punti fissi, allora $G = F \rtimes H$ è un CT-gruppo risolubile localmente finito.

Y. Fen-Wu (1998). Un gruppo G localmente finito e non risolubile è commutativo-transitivo se e solo se $G \simeq PSL(2, F)$ per qualche campo localmente finito F di caratteristica 2 con $|F| \geq 4$.

Gruppi localmente finiti con grafo della commutatività non connesso di diametro 2

Teorema 11 [$\star$]. G localmente finito con grafo della commutatività di diametro 2 e non connesso $\Longrightarrow$ G gruppo di Frobenius oppure semplice non abeliano.

Dimostrazione del Teorema 11

Sia $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{A}}(G)$, e siano $\{\Gamma_i : i \in L\}$ le componenti connesse di Γ, con $|L| > 1$. Sia $H_i = \Gamma_i \cup \{1\}$ per ogni $i \in L$.

(1) $H_i \leq G$ per ogni $i \in L$.

(2) Se p è un primo e P è un $p-$Sylow di G tale che $P \cap H_i \neq 1$ per qualche $i \in L$, allora $P \leq H_i$.

(3) Se G è finito, $\{H_i : i \in L\}$ è una partizione normale di Hall (non banale) di G.

Sia ora G infinito e non semplice. Sia $1 \neq S \neq G$ con $S \triangleleft G$, e siano $s \in S \setminus \{1\}$ e $t \in G \setminus S$.

(4) Se $a \in \Gamma_i$, $b \in \Gamma_j$ e $i \neq j$ allora ogni sottogruppo finito H tale che $\langle a, b, s, t\rangle \leq H$ è di Frobenius.

(5) I sottogruppi di Frobenius finiti di G contenenti s e t costituiscono un sistema locale per G, dunque G è un gruppo di Frobenius.

Gruppi localmente finiti con grafo della commutatività connesso di diametro 2

$Z(G) \neq 1 \Longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{A}}(G)$ connesso di diametro ≤ 2.

$\not\Longleftarrow$

Esempio 12 (A. Lucchini). Sia H abeliano elementare di ordine 8 e siano $H_1, \ldots, H_7$ i suoi sottogruppi di ordine 4. Il gruppo H agisce sul gruppo abeliano elementare $V = V_1 \times \cdots \times V_7$ di ordine 3^7 come segue: $v_i^h = v_i$ if $h \in H_i$ e $v_i^h = v_i^{-1}$ se $h \notin H_i$. Sia $G = V \rtimes H$. Per ogni $a, b \in G \setminus \{1\}$ si ha $C_G(a) \cap C_G(b) \neq 1$, quindi $\Gamma_{\mathfrak{A}}(G)$ è connesso di diametro 2. Inoltre $Z(G) = 1$.

Esempio 13. Il gruppo finitario.

Problema. Classificare i gruppi localmente finiti con centro identico e grafo della commutatività connesso di diametro 2.

Gruppi risolubili-transitivi infiniti

Lemma 14 [$\star\star$]. G risolubile-transitivo, $N \triangleleft G$, N risolubile $\Longrightarrow$ G/N risolubile-transitivo.

Proposizione 15 [$\star\star$]. G risolubile-transitivo e risolubile-per-finito $\Longrightarrow$ G risolubile.

Teorema 16 [$\star\star$]. Un gruppo iper(abeliano-per-finito) e finitamente generato è risolubile-transitivo se e solo se è 2-risolubile.

Gruppi policiclici-transitivi infiniti

J. Lennox (1973). G iper(abeliano-per-finito) e finitamente generato, $\langle a, b \rangle$ policiclico $\forall\, a, b \in G \implies G$ policiclico.

Teorema 17 [$\star\star$]. Sia G un gruppo iper(abeliano-per-finito) e finitamente generato. Se G è policiclico-transitivo allora G è policiclico oppure policiclico-semisemplice.

Problema. Esistono gruppi risolubili e finitamente generati di rango finito che siano policiclici-transitivi ma non policiclici ?

Teorema 18 [$\star\star$]. Sia G un gruppo risolubile e finitamente generato di rango finito. Se G è policiclico-transitivo allora G è nilpotente-per-abeliano-per-finito e residualmente finito.