Sulle classi di coniugio dei sottogruppi massimali

F. Fumagalli

Padova, 28/09/2006

Sia G un gruppo finito.
Per H sottogruppo di G indichiamo con

$$[H]_G := \{H^g | g \in G\}.$$

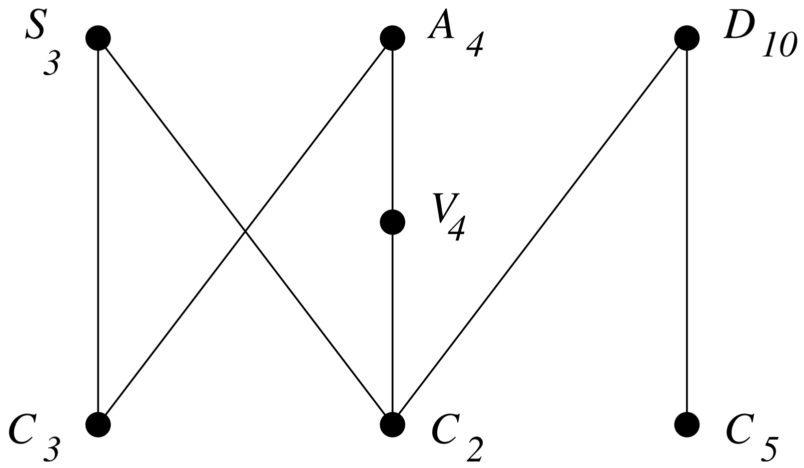
Dati H e K sottogruppi di G, definiamo

$$[H]_G \leq [K]_G :\Longleftrightarrow \exists g \in G : H \leq K^g.$$

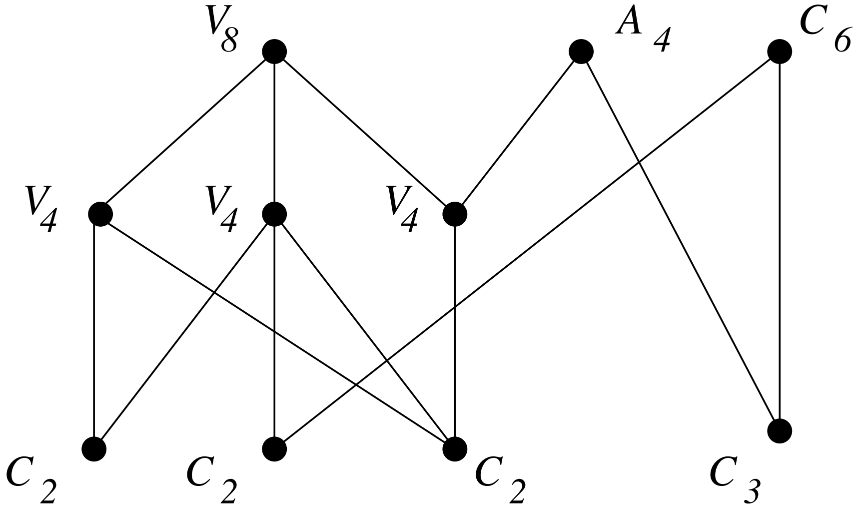
Poniamo $\mathcal{C}(G) := \{[H]_G | H \leq G\}$.

$(\mathcal{C}(G), \leq)$: il *Frame di* G.

$$\mathcal{C}(A_5)$$



$$\mathcal{C}(A_4 \times C_2)$$



Problema.

Il Frame è in grado di caratterizzare la risolubilità?

Denotiamo con

$$\mathcal{M}(G) := \{\text{intersezioni di elementi massimali di } \mathcal{C}(G)\}.$$

<u>Teorema 1</u>.
Se G è risolubile, $\mathcal{M}(G)$ è un reticolo in cui elementi massimali si intersecano massimalmente, ovvero:
$\forall\,[M_1]_G, [M_2]_G$ *elementi massimali di* $\mathcal{M}(G)$*,*
$[M_1]_G \wedge [M_2]_G$ *è coperto da entrambi.*

Inoltre

Teorema 2.
Se G è risolubile, $\mathcal{M}(G)$ è un reticolo graduato di dim. $\leq s-2$
($s=$ la lunghezza di una serie principale).
Inoltre $\mathcal{M}(G)$ ammette un ordinamento ricorsivo di coatomi.

Corollario
Se G è risolubile, il complesso d'ordine $\Delta(\mathcal{C}(G))$ è contraibile o sferico di dimensione $s-2$.

Congettura.

G è risolubile se e solo se $\mathcal{M}(G)$ è un reticolo in cui elementi massimali si intersecano massimalmente.

La questione si riduce a

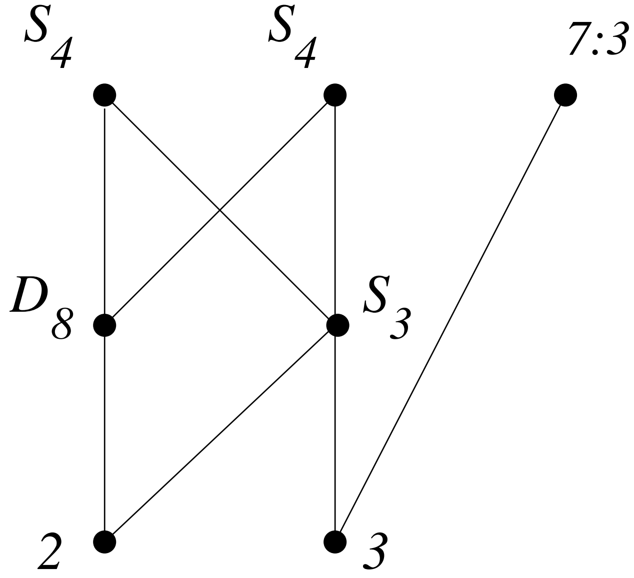
classificare i gruppi semplici S per cui se $S \leq G \leq Aut(S)$ esistono due classi $[M_1]_S, [M_2]_S$:

1) entrambe massimali rispetto all'essere $G-$invarianti e per cui

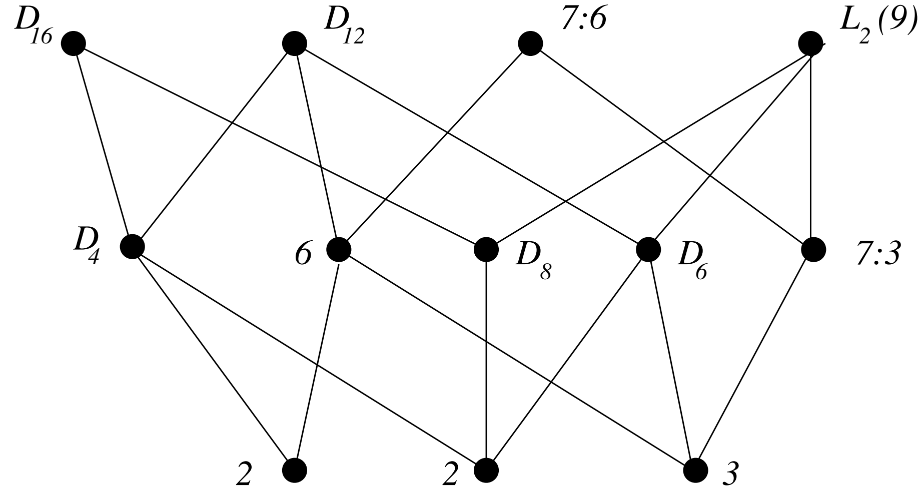
2) esista $x \in S$ t.c.

$$M_1 \cap (M_2)^x \not\leq (M_1 \cap M_2)^y, \ \forall y \in S.$$

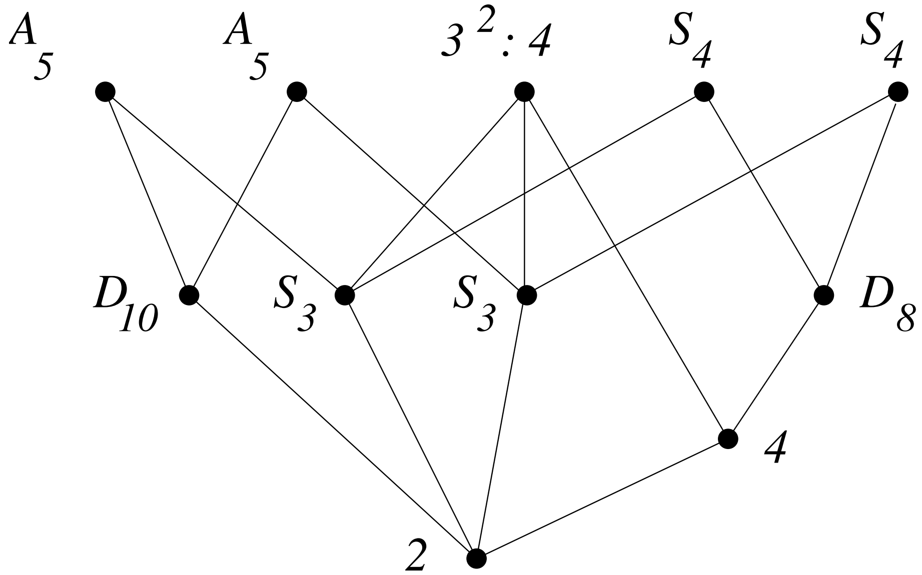
$\mathcal{M}(L_2(7))$



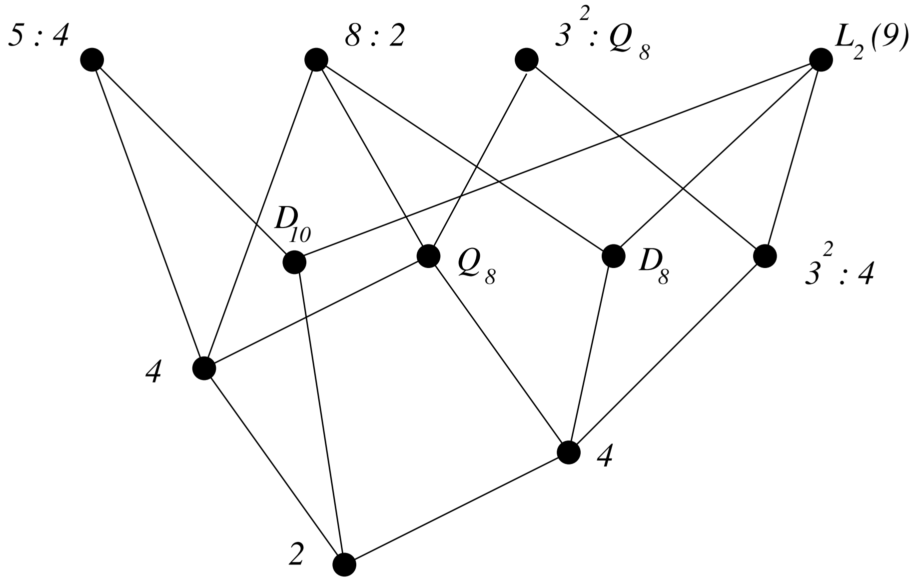
$\mathcal{M}(PGL_2(7))$



$\mathcal{M}(L_2(9))$



$\mathcal{M}(M_{10})$



$\mathcal{M}(PGL_2(9))$