HN COME GRUPPO DI BICARATTERISTICA 2,5

C. FRANCHI, M. MAINARDIS, R. SOLOMON

Vogliamo presentare il seguente risultato:

Teorema *Sia G un gruppo semplice finito in cui tutte le sezioni proprie siano gruppi semplici noti. Supponiamo che*

a) esista un sottogruppo 2-locale massimale H di caratteristica 2;

b) per ogni 5-sottogruppo B di G di rango maggiore o uguale a 2, $C_G(B)$ abbia caratteristica 5;

c) $O_{2'}(C_G(t)) = 1$ per ogni elemento $t \in G$ di ordine 2;

d) $O_{5'}(C_G(b)) = 1$ per ogni elemento $b \in G$ di ordine 5;

e) le componenti nei centralizzanti degli elementi di ordine 5 siano gruppi di tipo Lie in caratteristica 5;

f) $m_5(H) = m_{2,5}(G) \geq 2$.

Allora G è isomorfo al gruppo semplice sporadico di $Harada - Norton$.

1. Definizioni

Ricordiamo che se p è un numero primo, un sottogruppo H di un gruppo G si dice p-**locale** se H è il normalizzante in G di un p-sottogruppo non identico.

Un gruppo H ha **caratteristica** p se

$$C_H(O_p(H)) \leq O_p(H).$$

Un gruppo G si dice di **caratteristica locale** p se ogni sottogruppo p-locale di G ha caratteristica p. Per il Teorema di Borel-Tits [1] i gruppi semplici di tipo Lie su un campo di caratteristica p hanno caratteristica locale p.

Una **componente** K in un gruppo X è un sottogruppo subnormale e quasisemplice (cioè K è perfetto e $K/Z(K)$ è semplice);

Una componente di un gruppo G centralizza ogni sottogruppo subnormale che non la contenga, in particolare componenti distinte si centralizzano.

Il gruppo generato dalle componenti di un gruppo G è il prodotto centrale di queste e si indica con $E(G)$ e viene (spesso) detto **sottogruppo di Bender** di G.

Il sottogruppo di **Fitting generalizzato** $F^*(G)$ è il prodotto (centrale) del sottogruppo di Fitting di G con il sottogruppo di Bender di G e, per ogni gruppo finito G vale l'**uguaglianza di Bender-Fitting**:

$$C_G(F^*(G)) = Z(F^*(G)).$$

Si osservi che un gruppo H ha caratteristica p se e solo se $F^*(H)$ è un p-gruppo.

Date: October 11, 2006.

Una p**-componente** di G è un sottogruppo subnormale K di G tale che $K = O^{p'}(K)$ e $K/O_{p'}(K)$ è quasisemplice

Il p**-rango** $m_p(G)$ di un gruppo G è la massima dimensione dei p-sottogruppi abeliani elementari contenuti in G (come spazi vettoriali sul campo con p elementi). Se r è un altro numero primo il p**-rango** r**-locale** $m_{r,p}(G)$ di G è il massimo tra i $m_p(H)$ dove H varia tra i sottogruppi p-locali di G ed infine $e(G)$ è il massimo tra i $m_{2,p}(G)$ al variare tra i primi p che dividono l'ordine di G.

2. Motivazioni

Questo problema ha origine nel progetto di revisione del teorema di Classificazione dei Gruppi Semplici Finiti di Gorenstein, Lyons e Solomon (dimostrazione di II generazione). Ricordiamo che la classificazione originale ha una suddivisione in casi che può essere schematizzata nel modo seguente (tra parentesi gli esempi):

1) $m_2(G) \leq 2$ ($L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, q dispari, M_{11} e $U_3(4)$);
2) $m_2(G) > 2$ ed esiste un'involuzione il cui centralizzante abbia 2-componenti (gruppi alterni e gruppi di tipo Lie in caratteristica dispari);
3) $m_2(G) > 2$ ed i centralizzanti delle involuzioni non hanno 2-componenti (gruppi di tipo Lie in caratteristica 2).

Il caso 3) si divide a sua volta in:
3a) $e(G) \leq 2$ (gruppi quasithin);
3b) $e(G) > 2$ ed esiste un primo p ed un elemento t di ordine p tali che $m_{2,p}(G) > 2$ e $C_G(t)$ ha p-componenti;
3c) $e(G) > 2$ ma per ogni primo p ed ogni elemento t di ordine p tali che $m_{2,p}(G) > 2$, $C_G(t)$ non ha p-componenti.

La strategia delle dimostrazioni di prima e seconda generazione del Teorema CSFG è quella di cercare di sfruttare il più possibile le informazioni che, in un generico gruppo semplice G, si possono ottenere dai centralizzanti $C_G(t)$ degli elementi t di ordine primo p, tali che $C_G(t)$ contenga delle p-componenti e, tra i numeri primi p, privilegiare il 2. Questo è il motivo della suddivisione tra i casi 2) e 3).

Le suddivisioni relative al 2-rango ed a $e(G)$ sono invece dovute alla possibilità o meno di usare il metodo del Funtore Segnalante.

Questo metodo permette di eliminare il $2'$-radicale nei centralizzanti delle involuzioni nel caso in cui il 2-rango sia maggiore di 2 (caso 2)) e, analogamente, (nei casi 3b) e 3c)) di eliminare il p'-radicale nei centralizzanti degli elementi di ordine p se il p-rango 2-locale è maggiore di 2.

In particolare, permette di dimostrare che

(1) i gruppi semplici nel caso 3) hanno caratteristica locale 2 e
(2) i gruppi semplici nel caso 3c) hanno caratteristica locale 2 e caratteristica locale p per almeno un primo dispari p.

In [7] Klinger e Mason hanno dimostrato che non esistono gruppi semplici di questo tipo (e dunque i gruppi che hanno una doppia caratteristica devono essere anche quasithin).

Nel progetto di revisione di Gorenstein, Lyons e Solomon la nozione di caratteristica locale viene sostituita da quella di caratteristica debole: dato un primo p, un gruppo G si dice di **caratteristica debole** p se

(1) $m_p(G) \geq 2$;
(2) $O_{p'}(H)$ per ogni sottogruppo p-locale H.
(3) $C_G(B)$ ha caratteristica p per ogni p-sottogruppo B di G di rango maggiore o uguale a 2.
(4) le componenti nei centralizzanti degli elementi di ordine p sono gruppi finiti di tipo Lie in caratteristica p.

(Per esattezza, in [5] al posto di caratteristica debole p si parla di p-**type** che è una nozione molto vicina alla caratteristica debole p). La suddivisione in casi è analoga a quella della dimostrazione di prima generazione salvo sostituire con "2-gruppo (p-gruppo) di rango 2" la parola "involuzione" ("p-elemento"). In questa situazione, nel nuovo caso 3c), si ottengono gruppi che hanno simultaneamente caratteristica debole 2 e caratteristica debole p per un opportuno numero primo p (gruppi di *bicaratteristica* (2,p)). L'insieme di tali gruppi questa volta non è vuoto, ma vi rientrano molti dei grandi gruppi sporadici.

Utilizzando i metodi introdotti da Klinger e Mason (e prima ancora da Thompson nella sua classificazione degli N-gruppi [11]) Gorenstein e Lyons (sotto l'ipotesi che $e(G) \geq 4$) sono riusciti ad ottenere una caratterizzazione come gruppi di bicaratteristica $2, 3$ dei gruppi sporadici F_1, F_2, F'_{24}, F_{23}, F_{22}, Co_1, e di altri sei gruppi di Lie su campi di ordine 2 o 3 [3].

Successivamente Korchagina, Lyons e Solomon, estendendo l'indagine ai gruppi in cui $e(G) \leq 3$ sono riusciti a caratterizzare Su, Th e Co_3 [8] e [9].

Su suggerimento di Solomon, C.Franchi, M.S. Lucido e M. Mainardis [2] sono riusciti a caratterizzare il gruppo di Lyons come l'unico gruppo di bicaratteristica dispari (provando in questo caso che i primi devono essere 3 e 5).

Infine, Korchagina, Lyons e Solomon hanno caratterizzato HN come gruppo di bicaratteristica $2, 3$.

In questa direzione sembra quindi possibile intravvedere la speranza di ottenere una caratterizzazione intrinseca di una buona parte dei gruppi sporadici.

Come già detto che la definizione precisa di bicaratteristica varia un po' nei diversi lavori citati. Nel nostro lavoro la caratteristica debole 2 corrisponde alle condizioni a) e c), la caratteristica debole 5) corrisponde alle condizioni b), d), e) ed f).

3. Cenno della dimostrazione

D'ora in poi supponiamo che G sia un gruppo che soddisfa le ipotesi del Teorema 1. Il nostro obiettivo è trovare un'involuzione t in G tale che

$$C_G(t) \textit{ sia isomorfo a } (2HS) \cdot 2,$$

cioè isomorfo al centralizzante di un'involuzione non centrale nel gruppo di Harada-Norton (con HS indichiamo il gruppo sporadico di Higman-Sims). Questo permette l'identificazione di G come il gruppo sporadico di Harada-Norton per un risultato di Harada [6].

La strategia per ottenere l'involuzione desiderata è tramite una serie di approssimazioni successive a partire dal sottogruppo 2-locale H, sfruttando interazioni tra i centralizzanti delle involuzioni ed i centralizzanti degli elementi di ordine 5.

Lemma 3.1. *Sia x un elemento di ordine 5 in G e sia $C_x := C_G(x)$. Allora o C_x ha caratteristica 5, oppure valgono le seguenti affermazioni:*

(1) $E(C_x)$ è un gruppo semplice di tipo Lie in caratteristica 5;
(2) $O_5(C_x)$ è ciclico;
(3) per ogni 5-sottogruppo abeliano elementare B contenente x, risulta

$$B \leq \langle x \rangle \times E(C_x).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che C_x non abbia caratteristica 5. Per le ipotesi *d)* ed *e)* esiste una componente J che è un gruppo semplice di tipo Lie in caratteristica 5. Poiché 5 divide l'ordine di J, la condizione *b)* implica che

$$J = E(C_x) \text{ e } \langle x \rangle = \Omega_1(O_5(C_x)).$$

In particolare $O_5(C)$ è ciclico. Per l'Azione Coprima e l'Identità di Bender-Fitting,

$$C_{C_x}(J) = O_5(C).$$

Sia $y \in B \setminus \langle x \rangle$, y deve indurre un automorfismo interno non identico su J da cui

$$y \in C_{C_x}(J) \times E(C_x) = O_5(C) \times E(C_x),$$

da cui la tesi avendo x ordine 5. $\square$

Lo strumento fondamentale per studiare le relazioni tra i centralizzanti delle involuzioni ed i centralizzanti degli elementi di ordine 5 è il Lemma Diedrale di Thompson (Teorema 3.2) ed una sua generalizzazione dovuta a Korchagina, Lyons e Solomon (Teorema 3.4).

Teorema 3.2. [5] *Sia p un numero primo dispari ed E un 2-gruppo abeliano elementare non identico di rango m che agisce fedelmente su un p-gruppo P. Allora P contiene un sottogruppo abeliano elementare E-invariante Q tale che*

$$QE = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_m,$$

dove i D_i sono gruppi diedrali di ordine $2p$.

Corollario 3.3. *Sia X un gruppo finito, p un primo dispari, B un p-sottogruppo abeliano elementare di rango massimo contenuto in un sottogruppo 2-locale di X e sia B_1 un sottogruppo non identico di B. Allora o*

(1) C_{B_1} non ha caratteristica p, oppure
(2) $m_2(C_{B_1}) \leq m_p(B/B_1) + 1$, in particolare $m_2(C_B) \leq 1$.

Teorema 3.4. [8] *Siano p e r numeri primi distinti E un r-gruppo abeliano elementare non identico di rango m che agisce fedelmente su un p-gruppo P. Allora P contiene un sottogruppo E-invariante Q tale che*

$$QE = E_1Q_1 * E_2Q_2 * \ldots * E_mQ_m,$$

dove i gli E_i sono sottogruppi ciclici di E ed i Q_i sono sottogruppi di Q tali che E_i agisce in modo nontriviale su Q_i, ma centralizza ogni sottogruppo proprio E_i-invariante di Q_i.

La dimostrazione del seguente Lemma è un esempio di come si utilizzano questi risultati:

Lemma 3.5. *$O_2(H)$ non contiene alcun sottogruppo abeliano elementare caratteristico e di rango maggiore o uguale a 2*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che A sia un sottogruppo abeliano elementare di $O_2(H)$ di rango maggiore o uguale a 2. Sia B un 5-sottogruppo abeliano elementare di rango massimo in H. Per il Corollario 3.3 e l'ipotesi *b)*, $m_2(C_B) \leq 1$. In particolare B agisce in modo non triviale su A. Per 3.4 esiste un iperpiano B_1 di B tale che

$$m_2([C_A(B_1), B]) \geq 4. \tag{1}$$

Per il Corollario 3.3 $E(C_G(B_1)) \neq 1$ e quindi, per il Lemma 3.1,

(1) $m_5(B_1) = 1$ e $m_5(B) = 2$;
(2) $J := E(C_x)$ è un gruppo semplice di tipo Lie in caratteristica 5;
(3) $B = B_1(B \cap J)$;
(4) $m_{2,5}(J) \leq 1$

Ispezionando i gruppi semplici di tipo Lie in caratteristica 5, l'ultima condizione implica che $m_2(J) \geq 2$. D'altra parte

$$[C_A(B_1), B] = [C_A(B_1), B \cap J] \leq J$$

in contraddizione con 1 □

In particolare $\Omega_1(Z(O_2(H)))$ è ciclico. Sia z un'involuzione che lo genera. Dal lemma precedente si ottiene subito:

Corollario 3.6. *$H = C_G(z)$ e z è 2-centrale in G*

Chiaramente z non è ancora l'involuzione che cerchiamo (il suo centralizzante H ha caratteristica 2)

Sfruttando il lemma precedente, con argomentazioni analoghe, si dimostra che

Lemma 3.7. $m_{2,5}(G) = 2$.

Sia ora B un 5-sottogruppo abeliano elementare di rango 2 di H (un tale sottogruppo esiste per la condizione *f)*. Studiando l'azione di B su $O_2(H)$ si riesce a dimostrare che $O_2(H)$ è un prodotto centrale di due o più sottogruppi R_i ciascuno dei quali è isomorfo a $Q_8 * D_8$. Per il Teorema 3.4 possiamo trovare un elemento

x in B tale che $C_{O_2(H)}(x)$ contenga un sottogruppo T isomorfo a $Q_8 * D_8$ e tale che $T = [B, T]$.

A questo punto abbiamo informazioni sufficienti per dare una descrizione abbastanza precisa di C_x:

Lemma 3.8. *Con le notazioni precedenti, valgono le seguenti affermazioni*

(1) $C_{O_2(H)}(x) = T \cong Q_8 * D_8$;
(2) $F^*(C_x) = O_5(C_x) \cong 5^{1+4} * 5^m$ *per qualche numero naturale* m;
(3) $TO_5(C_x)$ *è normale in* C_x *e* $C_x/TO_5(C_x)$ *è isomorfo ad un sottogruppo di* A_5 *il cui ordine è un multiplo di* 5.

Sia ora t un'involuzione noncentrale in T, tale che t centralizzi un sottogruppo P di tipo 5^{1+2} contenuto in $O_5(C_x)$.

Vogliamo provare che t è l'involuzione cercata ed il seguente lemma ci dice che siamo sulla buona strada:

Lemma 3.9. $E(C_t) \neq 1$.

Dimostrazione. (cenno) Se per assurdo $E(C_t) = 1$, allora C_t soddisferebbe le medesime condizioni di H. In particolare, per il Corollario 3.6, t sarebbe coniugato con z. Ma questo si dimostra essere impossibile. □

Lemma 3.10. *1)* $E(C_t)/Z(E(C_t)) \cong HS$,
2) $P \leq E(C_t)$ *e*
3) esiste un'involuzione v *in* C_t *che agisce su* $E(C_t)$ *come automorfismo esterno.*

Dimostrazione. (cenno) Sia $K := E(C_t)$. Studiando l'azione di x su K si prova che K è quasisemplice, inoltre

(1) $Aut(K)$ contiene un sottogruppo isomorfo a P
(2) (per il Lemma 3.7) $m_5(K) \leq 2$

Non ci sono molti gruppi quasisemplici che soddisfano queste condizioni, infatti un'ispezione ai gruppi semplici noti prova che $K/Z(K)$ può essere isomorfo ad uno dei seguenti gruppi:

$$L_3(5),\ U_3(5),\ Co_3,\ Co_2,\ HS,\ Mc,\ Ru,\ \text{e}\ Th.$$

A questo punto si dimostra che $z \in K$ e, dopo un'ulteriore indagine caso per caso (studiando in particolare l'intersezione tra $O_2(H)$ e K), si eliminano tutti tranne HS. La terza parte segue dal fatto che $O_2(H) \cap C_t$ è troppo grande per essere contenuto nel 2 radicale del centralizzante di un'involuzione (2-centrale) in HS. □

Ora ci sono due estensioni centrali di un gruppo ciclico di ordine 2 con HS, una spezzante, l'altra (quella che vogliamo) non spezzante. Il primo caso è eliminato dal seguente lemma.

Lemma 3.11. $Z(E(C_t)) \neq 1$.

Dimostrazione. (cenno) Sia $K := E(C_t)$ e supponiamo per assurdo che $K \cong HS$ e sia v come nel lemma precedente. Dalla struttura di HS, risulta

$$K_v \cong S_8.$$

Sia y un elemento di ordine 5 in K_v. Nuovamente per la struttura di HS

$$K_y = \langle y \rangle \times K'_y$$

con $K'_y \cong A_5$ e si prova che

$$G_y = \langle y \rangle \times J\langle t \rangle$$

con J isomorfo a $L_3(5)$, $U_3(5)$ o $U_3(5) \cdot 3$ e

$$G_t = \langle t \rangle \times K\langle v \rangle.$$

Ne segue che se $s \in \langle t, v \rangle \cap J$, allora

$$E(J_s) \cong SL_2(5).$$

Per il Balance Theorem ([5], Theorem 5.23, pag. 30), applicato a G_t e G_s si ottiene

$$L'_v \leq E(E(C_t) \cap C_s) = E(E(C_s) \cap C_t).$$

In particolare, posto $L := E(C_s)$, risulta

$$L'_v \leq L_t.$$

Ora, tenendo presente che $m_{2,5}(G) = 2$, le uniche possibilità per L e l'azione di t sono

L	azione di t
A_8	t centralizza L
$A_8 \times A_8$	t scambia i fattori
A_{10}	t è una trasposizione in A_{10}
$L_4(4)$	t automorfismo di campo
HS	t automorfismo esterno

D'altra parte si riesce a dimostrare $s \in L$ e questo è una contraddizione perché, dalla tabella, $Z(L) = 1$.

□

Resta infine da dimostrare che

$$|O_2(G_t)| = 2.$$

Studiando la struttura di $C_G(x, t)$ si dimostra che $O_2(G_t)$ è ciclico di ordine 2 o 4 ed il caso in cui quest'ordine è 4 viene eliminato per un risultato di Solomon [10].

References

[1] Borel, A.; Tits, J. *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I,* Invent. Math. **12** 95–104(1971).

[2] C. Franchi, M.S. Lucido, M. Mainardis *A characterization of Ly* Preprint (2004).

[3] D. Gorenstein, R. Lyons *A local Characterization of Large Sporadic Groups,* Preprint 1992.

[4] Gorenstein, Daniel; Lyons, Richard; Solomon, Ronald *The classification of the finite simple groups.* Mathematical Surveys and Monographs, 40.1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[5] Gorenstein, Daniel; Lyons, Richard; Solomon, Ronald *The classification of the finite simple groups. Number 2. Part I. Chapter G. General group theory.* Mathematical Surveys and Monographs, **40.2.** American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[6] K. Harada, *On the simple group F of order* $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. in " Proceedings of the Conference on Finite Groups", Academic Press, New York, (1976).

[7] K. Klinger, G. Mason, *Centralizers of p-subgroups in groups of characteristic* $2, p$ *type,* J. Algebra **37** (1975).

[8] I. Korchagina, R. Lyons, R. Solomon *Toward a characterization of Su and Th,* J. Algebra **257** 414-451 (2002).

[9] Korchagina, R. Solomon *Toward a characterization of Co_3,* Bull. London Math. Soc. **35**, 793-804 (2003).

[10] R. Solomon *Standard Components of Alternating Type I e II*, J. Algebra **41** 496-514 e **47** 162-179 (1976).

[11] Thompson, John G. *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable I-VI*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** 383–437 (1968); Pacific J. Math. **33** 451–536 (1970); ibid. **39** 483–534 (1971); ibid. **48** 511–592 (1973); ibid. **50** 215–297 (1974); ibid. **51** 573–630 (1974).