ALGEBRA 1
Secondo appello - 10 gennaio 2007

Tema A

Esercizio 1

Per una funzione $f : X \to Y$
a) si provi che per ogni $A \subseteq Y$ risulta $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.
b) si dica se è vero che per ogni $B \subseteq X$ risulta $f(X \setminus B) = f(X) \setminus f(B)$ (dimostrazione o controesempio!).

Esercizio 2

Si dica quante sono e si elenchino le classi resto $\bar{x} \in \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ tali che $\bar{52}\bar{x} = \bar{20}$.

Esercizio 3

Si fattorizzi in irriducibili il polinomio $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$
a) in $\mathbb{R}[x]$; b) in $\mathbb{Q}[x]$; c) in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 4

È noto che se f e g sono due funzioni reali di variabile reale derivabili in un intervallo I, allora per la derivata prima vale

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Supponiamo che f e g siano derivabili infinite volte; poniamo $f^{(0)} = f$ e indichiamo con $f^{(i)}$ la derivata i-esima; analogamente per g e per fg. Si dimostri che per ogni intero positivo n risulta

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Esercizio 5

Siano $f, g \in K[x]$, dove K è un campo e $g \neq 0$. Si dimostri che esistono $q, r \in K[x]$ tali che $f = gq + r$ e $r = 0$ oppure il grado di r è minore del grado di g.

Esercizio 6

Date le permutazioni in Sym(9)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 6 & 2 & 9 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

si determini l'ordine e la classe della permutazione $\alpha \circ \beta^{-1}$.

ALGEBRA 1
Secondo appello - 10 gennaio 2007

Tema B

Esercizio 1

Per una funzione $f : X \to Y$
a) si provi che per ogni $A \subseteq Y$ risulta $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.
b) si dica se è vero che per ogni $B \subseteq X$ risulta $f(X \setminus B) = f(X) \setminus f(B)$ (dimostrazione o controesempio!).

Esercizio 2

Si dica quante sono e si elenchino le classi resto $\bar{x} \in \mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$ tali che $\bar{55}\bar{x} = \bar{30}$.

Esercizio 3

Si fattorizzi in irriducibili il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$
a) in $\mathbb{R}[x]$; b) in $\mathbb{Q}[x]$; c) in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 4

È noto che se f e g sono due funzioni reali di variabile reale derivabili in un intervallo I, allora per la derivata prima vale

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Supponiamo che f e g siano derivabili infinite volte; poniamo $f^{(0)} = f$ e indichiamo con $f^{(i)}$ la derivata i-esima; analogamente per g e per fg. Si dimostri che per ogni intero positivo n risulta

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Esercizio 5

Siano $f, g \in K[x]$, dove K è un campo e $g \neq 0$. Si dimostri che esistono $q, r \in K[x]$ tali che $f = gq + r$ e $r = 0$ oppure il grado di r è minore del grado di g.

Esercizio 6

Date le permutazioni in Sym(9)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 6 & 2 & 9 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

si determini l'ordine e la classe della permutazione $\alpha^{-1} \circ \beta$.