

ALGEBRA 1
Terzo appello - 3 settembre 2007

Esercizio 1

Per una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dica se sono vere le proposizioni seguenti (dimostrazione o controesempio!):

- a) se $\{B_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Y risulta $f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
b) se $\{A_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X risulta $f(\cap_{j \in J} A_j) = \cap_{j \in J} f(A_j)$.

Esercizio 2

Si dica quante sono e si elenchino le classi resto $\bar{x} \in \mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$ tali che $40\bar{x} = \bar{15}$.

Esercizio 3

Si fattorizzi in irriducibili il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

- a) in $\mathbb{R}[x]$; b) in $\mathbb{Q}[x]$; c) in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 4

Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio 5

- a) Si completi la definizione: "Il polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ si dice primitivo se ..."
b) Si dimostri che il prodotto di due polinomi primitivi è primitivo (*Lemma di Gauss*.)

Esercizio 6

Date le permutazioni in $\text{Sym}(9)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 9 & 2 & 6 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

si determini l'ordine e la classe della permutazione $\alpha^2 \circ \beta^{-1}$.