ALGEBRA PER INFORMATICA
Esame scritto - 11 dicembre 2006

Esercizio 1

Quali di questi insiemi è un gruppo con l'operazione data?

- $(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \perp)$ dove $x \perp y = max\{x, y\}$;
- $(\{x \in \mathbb{C} \mid x$ è una radice ottava primitiva dell'unità$\}, \cdot)$ dove $x \cdot y$ è l'usuale prodotto in $\mathbb{C}$;
- $(\{0\} \cup \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(f) \leq 2\}, +)$ dove $f + g$ è l'usuale somma in $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 2

- Dato il gruppo $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$ con l'usuale prodotto tra matrici, dimostrare che il sottoinsieme $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottogruppo normale di G.
- Dimostrare che il quoziente G/X è abeliano.

Esercizio 3

Dimostrare che l'insieme $R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a, b \text{ coprimi}, 2 \nmid b \right\}$ con la somma e il prodotto soliti tra frazioni è un anello.

Esercizio 4

Siano R, S due anelli, sia $f \colon R \to S$ un omomorfismo di anelli e sia I un ideale di S. Dimostrare che $f^{-1}(I)$ è un ideale di R.

Esercizio 5

Scrivere le radici none dell'unità complesse (tutte le radici complesse del polinomio $x^9 - 1$), dire quali di esse sono primitive e scrivere il polinomio ciclotomico $\Phi_9(x)$ come polinomio di $\mathbb{Z}[x]$. Scomporlo quindi come prodotto di fattori irriducibili (di primo grado) in $\mathbb{C}[x]$.

Esercizio 6

Dimostrare che $x^4 + x + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 7

Scrivere un campo con 16 elementi.

Esercizio 8

Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\xrightarrow{\quad\phi\quad} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[x] \\ a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n &\longmapsto [a_0] + [a_1]x + \ldots [a_n]x^n \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli.

Dedurre che un polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots x^n$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ se la sua riduzione modulo m $[a_0] + [a_1]x + \ldots x^n$ è irriducibile in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[x]$.

Dedurne che $x^4 + 8x^2 + 3x + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 9

Dati i polinomi

$$f(x) = 18x^4 + 27x^3 - 23x^2 - 33x - 5 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 6x^3 + 7x^2 - 11x - 10$$

appartenenti a $\mathbb{Q}[x]$ trovarne un massimo comune divisore $M(x)$ e trovare due polinomi $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x) = M(x)$.