

ALGEBRA 1
Esame scritto - 12 dicembre 2006

Tema A

Esercizio 1

Si consideri la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 8 & 7 & 5 & 11 & 6 & 1 & 2 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

La si scriva come prodotto di cicli disgiunti, come prodotto di scambi, se ne calcoli l'ordine, la classe e la permutazione inversa.

Esercizio 2

Dati i polinomi

$$f(x) = 12x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 23x^2 - 15x - 9 \quad \text{e} \quad g(x) = 6x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 15x - 14$$

appartenenti a $\mathbb{Q}[x]$ trovare il loro massimo comune divisore $M(x)$ e trovare due polinomi $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x) = M(x)$.

Esercizio 3

Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ e per ogni n intero positivo si ha che $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dimostrare che l'uguaglianza vale se e solo se $x=0$ o $n=1$.

Esercizio 4

Dati due insiemi X, Y , una funzione $f: X \rightarrow Y$ e due sottoinsiemi $A, B \subseteq Y$ dimostrare che $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Se C e D sono due sottoinsiemi di X , vale che $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$? Se f iniettiva?

ALGEBRA 1
Esame scritto - 12 dicembre 2006

Tema B

Esercizio 1

Si consideri la permutazione

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 7 & 10 & 9 & 8 & 1 & 6 & 11 \end{array} \right).$$

La si scriva come prodotto di cicli disgiunti, come prodotto di scambi, se ne calcoli l'ordine, la classe e la permutazione inversa.

Esercizio 2

Dati i polinomi

$$f(x) = 12x^5 - 20x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 27x + 11 \quad \text{e} \quad g(x) = 6x^4 - 13x^3 + 3x^2 - 3x + 16$$

appartenenti a $\mathbb{Q}[x]$ trovare il loro massimo comune divisore $M(x)$ e trovare due polinomi $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x) = M(x)$.

Esercizio 3

Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 1$ e per ogni n intero positivo si ha che $(1-x)^n \geq 1-nx$. Dimostrare che l'uguaglianza vale se e solo se $x = 0$ o $n = 1$.

Esercizio 4

Dati due insiemi X, Y , una funzione $f: X \rightarrow Y$ e due sottoinsiemi $A, B \subseteq Y$ dimostrare che $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Se C e D sono due sottoinsiemi di X , vale che $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$? Se f iniettiva?