ALGEBRA PER INFORMATICA
Esame scritto - 23 luglio 2007

Esercizio 1

Sia G un gruppo e sia $\mathrm{End}(G)$ l'insieme $\mathrm{End}(G) = \{\alpha\colon G \to G \mid \alpha \text{ è un omomorfismo di gruppi}\}$ dotato delle operazioni $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ e $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$. Dimostrare che $\mathrm{End}(G)$ è un anello (non necessariamente commutativo).

Esercizio 2

Con le notazioni dell'esercizio precedente, dimostrare che $\mathrm{End}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ è un corpo (cioè è un anello tutti i cui elementi $x \neq 0$ hanno un inverso).

Esercizio 3

Si risolvano i seguenti sistemi di congruenze in $\mathbb{Z}$.

$$a)\begin{cases} 7x \equiv 12 \pmod{35} \\ x \equiv 12 \pmod{37} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x \equiv 29 \pmod{78} \\ 7x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

Esercizio 4

Siano R, S due anelli, sia $f\colon R \to S$ un omomorfismo di anelli e sia I un ideale di S. Dimostrare che $f^{-1}(I)$ è un ideale di R.

Esercizio 5

Dimostrare che la funzione

$$\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\quad\phi\quad} \mathbb{Z}$$

$$a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n \longmapsto a_0 + 7a_1 + \ldots 7^n a_n$$

è un omomorfismo di anelli.

Descrivere l'insieme $\mathrm{Ker}\phi = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid \phi(p(x)) = 0\}$.

Esercizio 6

Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Definiamo il *normalizzante di H in G* come $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$. Si dimostri che $N(H)$ è un sottogruppo di G che contiene H.

Esercizio 7

Sia $a = 3522$, $b = 321$. Trovare il massimo comune divisore m di a e b e trovare due numeri interi α, β tali che $a\alpha + b\beta = m$.

Esercizio 8

Sia G un gruppo. Si provi che l'unione insiemistica di due suoi sottogruppi è un sottogruppo se e solo se uno dei due è contenuto nell'altro. Si dia un esempio di questo fatto nel caso di due sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$.

Esercizio 9

Si scriva un campo K di 8 elementi spiegando nel dettaglio perché K è un campo.