

ALGEBRA PER INFORMATICA
Esame scritto - 4 settembre 2007

Esercizio 1

Sia G un gruppo. Si provi che l'unione insiemistica di due suoi sottogruppi è un sottogruppo se e solo se uno dei due è contenuto nell'altro. Si diano due esempi di questo fatto nel caso di due sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$ (uno in cui l'unione insiemistica dei due suoi sottogruppi è un sottogruppo, uno in cui non lo è).

Esercizio 2

Si risolvano i seguenti sistemi di congruenze in $\mathbb{Z}$.

$$a) \begin{cases} 2x \equiv 7 & (\text{mod } 9) \\ 4x \equiv 3 & (\text{mod } 5) \end{cases} \quad b) \begin{cases} 1025x \equiv 5312065 & (\text{mod } 8) \\ 36x \equiv 322 & (\text{mod } 5) \\ 4x \equiv 7 & (\text{mod } 3) \end{cases}$$

Esercizio 3

Dati i polinomi

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 4 \quad \text{e} \quad g(x) = x^5 - 6x + 1$$

appartenenti a $\mathbb{Q}[x]$ trovarne un massimo comune divisore $M(x)$ e trovare due polinomi $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x) = M(x)$.

Esercizio 4

Dimostrare per induzione su a che per ogni intero $a \geq 0$ e per ogni primo p si ha

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Estendere la dimostrazione a tutti gli interi a , non necessariamente positivi.

Esercizio 5

Il centro $Z(G)$ di un gruppo G è $\{x \in G \mid gx = xg \text{ per tutti gli elementi } g \in G\}$. Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G . È normale?

Esercizio 6

Nell'anello degli interi $\mathbb{Z}$ si consideri un ideale $m\mathbb{Z}$. Si dimostri che l'ideale è primo se e solo se m è un numero primo. Se ne deduca che tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}$ sono primi. (Ricordiamo che un ideale I di un anello R è primo se per ogni $a, b \in R$ si ha che $ab \in I$ implica $a \in I$ oppure $b \in I$)

Esercizio 7

Si provi che un elemento $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ha ordine n/d dove $d = \text{MCD}(a, n)$.

Esercizio 8

Scrivere le radici ottave dell'unità complesse (tutte le radici complesse del polinomio $x^8 - 1$), dire quali di esse sono primitive e scrivere il polinomio ciclotomico $\Phi_8(x)$ come polinomio di $\mathbb{Z}[x]$. Scomporlo quindi come prodotto di fattori irriducibili (di primo grado) in $\mathbb{C}[x]$.

Esercizio 9

Si consideri nell'anello $\mathbb{R}[x]$ l'ideale $I = (x^3 + x^2 - x + 2, x^2 + x - 2) = \{p(x)(x^3 + x^2 - x + 2) + q(x)(x^2 + x - 2) \mid p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$: è un ideale principale? Se no lo si dimostri, se sì si mostri un polinomio che lo genera.