Algebra - Foglio esercizi 0

11 ottobre 2004

1. Esempi di gruppi e anelli.
2. Dimostrare che se in un gruppo G ogni elemento coincide con il suo inverso, allora il gruppo è abeliano.
3. Sia G un gruppo nel quale l'intersezione di tutti i sottogruppi diversi da (e) è un sottogruppo diverso da (e). Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine finito.
4. Dimostrare che l'anello commutativo D è un dominio di integrità se e solo se per $a, b, c \in D$ con $a \neq 0$, la relazione $ab = ac$ implica la $b = c$.
5. Determinare le orbite e i cicli delle seguenti permutazioni:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
6. Scrivere le permutazioni del problema precedente come prodotto di cicli disgiunti.
7. Scrivere il massimo comune divisore $M(x)$ dei polinomi $x^3 + 2$ e $2x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$. Trovare inoltre due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ tali che $p(x)(x^3 + 2) + q(x)(2x^2 + 1) = M(x)$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.
8. Dimostrare che un omomorfismo di un campo o è iniettivo oppure porta ogni elemento nello zero.
9. Si provi che un anello R tale che $x^2 = x$ per ogni $x \in R$ è tale che $2x = 0$ per ogni $x \in R$ ed è commutativo.
10. Determinare quali di queste strutture sia un anello. Di questi elencare gli elementi invertibili e gli idempotenti.
    - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
    - $(\{Y \mid Y \subseteq X\}, \oplus, \cap)$ dove X è un insieme e $Y \oplus Z = Y \cup Z - (Y \cap Z)$
    - $(\mathbb{R}, +, \star)$, dove $a \star B = \begin{cases} a & \text{se } a = b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$