Algebra - Foglio esercizi 5

12 ottobre 2005

1. Sia G un gruppo ciclico finito. Dimostrare che:
   (a) G è abeliano;
   (b) ogni sottogruppo H di G è ciclico;
   (c) se $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, trovare tutti i sottogruppi di G.

2. Sia G un gruppo finito tale che i suoi sottogruppi sono totalmente ordinati dall'inclusione, cioè se $H, K \leq G$ allora $H \leq K$ o $K \leq H$. Dimostrare che:
   (a) G è ciclico;
   (b) non possono esistere due primi distinti p e q che dividono l'ordine di G;
   (c) ogni gruppo del tipo $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ con p primo ha questa proprietà [Suggerimento: i sottogruppi generati dalle potenze p^h con $h \leq k$ sono tutti e soli i sottogruppi di $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$].

3. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo, sia g un elemento di G con ordine finito $o(g)$ e sia N un sottogruppo normale di G. Sappiamo che $o(gN)$ divide $o(g)$. Dimostrare che $o(gN) = o(g)$ se e solo se il sottogruppo generato da g e N hanno intersezione banale, cioè $(g) \cap N = (e)$.

4. Sia D un domonio di integrità. Dimostrarte che esiste $\mathrm{GCD}(a, b)$ per ogni $a, b \in D$ se e solo se esiste $\mathrm{LCM}(a, b)$ per ogni $a, b \in D$.

5. Si scompongano in fattori irriducibili su $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i seguenti polinomi:
$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12$$
$$x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 4.$$
   Si scompongano in fattori irriducibili su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ i seguenti polinomi:
$$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$$
$$x^4 + 1$$

6. Si determinino tutti gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Si dimostri che l'ideale generato da 2 e da $1 - \sqrt{-7}$ non è principale e se ne deduca che $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ non è un dominio eucldeo.

   Più difficile: seguendo la stessa idea dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-x}]$ è un dominio euclideo se e solo se $x = 1$.