Algebra - Foglio esercizi 1

12 ottobre 2004

1. Sia G un gruppo nel quale $(ab)^i = a^i b^i$ per tre interi i consecutivi e per ogni coppia di elementi $a, b \in G$. Dimostrare che G è abeliano.

2. Dimostrare che la conclusione del problema precedente non vale se la relazione $(ab)^i = a^i b^i$ sussiste solo per due interi consecutivi.

3. Sia G un insieme non vuoto, sia $\cdot$ una operazione binaria interna associativa su G tale che:

   - esiste un elemento $e \in G$ tale che per ogni $a \in G$ si ha $a \cdot e = a$;
   - per ogni $a \in G$ esiste un elemento $y(a) \in G$ tale che $a \cdot y(a) = e$.

   Dimostrare che $(G, \cdot)$ è un gruppo.

4. Sia $(R, +, \cdot)$ un anello con unità. Costruiamo un anello $\tilde{R}$ che ha come elementi gli elementi di R, come somma l'operazione $a \oplus b = a + b + 1$ e come prodotto l'operazione $a \otimes b = a \cdot b + a + b$ per $a, b \in R$. Dimostrare che $(\tilde{R}, \oplus, \otimes)$ è un anello, trovarne lo zero e l'unità e dimostrare che è isomorfo a R.

5.
   - Date le permutazioni $x = (1, 2)(3, 4)$ e $y = (5, 6)(1, 3)$, trovare una permutazione a tale che $a^{-1}xa = y$.
   - Dimostrare che non esiste alcuna permutazione a per la quale $a^{-1}(1, 2, 3)a = (1, 3)(5, 7, 8)$.
   - Dimostrare che non esiste alcuna permutazione a per la quale $a^{-1}(1, 2)a = (3, 4)(1, 5)$.

6. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine $o(G)$ e supponiamo che l'intero n sia coprimo con $o(G)$. Dimostrare che ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = x^n$ per qualche $x \in G$.

7. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ha idempotenti non banali se e solo se m è divisibile per almeno due primi distinti.

8. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un primo e sia $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ il gruppo moltiplicativo di tutti gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   a) Dimostrare che la famiglia $\mathcal{F} = \big\{\{x, x^{-1}\} \mid x \in G\big\}$ forma una partizione di G.

   b) Dimostrare che, se $p \neq 2$, due elementi di $\mathcal{F}$ hanno cardinalità 1 mentre ogni altro elemento ha cardinalità 2.

   c) Dimostrare che il prodotto di tutti gli elementi di G è, in G, uguale a -1. In simboli $\Pi_{g \in G} g = -1$.

   d) Dimostrare che, in $\mathbb{Z}$, p divide $(p-1)! + 1$.

9. Se U è un ideale di R, sia $r(U) = \{x \in R \colon xu = 0 \text{ per ogni } u \in U\}$. Dimostrare che $r(U)$ è un ideale di R.

10. Dimostrare che l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti razionali non ha altri ideali bilateri se non (0) e l'anello stesso.