

Algebra - Foglio esercizi 6

23 novembre 2005

1. Sia G un gruppo di ordine 30. Dimostrare che un 3-Sylow o un 5-Sylow è normale in G .
2. A partire dall'esercizio 1 dimostrare che un 3-Sylow e un 5-Sylow sono normali in G .
3. Dimostrare che un gruppo di ordine 30 ha un sottogruppo normale di ordine 15.
4. Sia H un gruppo di ordine pq per qualche p, q primi distinti con $p < q$. Dimostrare che se p non divide $q - 1$ allora H è ciclico.
5. Classificare tutti i gruppi di ordine 30.
6. Siano p, q primi distinti con $p < q$. Dimostrare che se p divide $q - 1$ allora esiste un solo gruppo non abeliano di ordine pq a meno di isomorfismi.
7. Quali tra i seguenti gruppi dello stesso ordine,

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ &\quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ &\quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

sono isomorfi?

8. Si provi che $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (ricordiamo che la somma diretta di due anelli R, S è l'anello che ha come insieme di base il prodotto cartesiano $R \times S$ dei due anelli su cui somma e prodotto sono definite componente per componente).