Algebra - Foglio esercizi 2

19 ottobre 2005

1. Siano G un gruppo, N un sottogruppo normale di G e H un qualunque sottogruppo di G. Dimostrare che $N \cap H$ è un sottogruppo normale di H.

2. Dare un esempio di un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi sono normali.

3. Sia H l'unico sottogruppo di ordine $o(H)$ di un gruppo finito G. Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.

4. Verificare se le seguenti applicazioni $\varphi\colon G \to H$ sono omomorfismi. In caso affermativo determinarne il nucleo.

   - G gruppo dei reali non nulli rispetto alla moltiplicazione, $H = G$, $\varphi(x) = x^2$ per ogni $x \in G$;
   - G, H come sopra, $\varphi(x) = 2^x$;
   - G gruppo dei reali rispetto all'addizione, $H = G$, $\varphi(x) = x + 1$ per ogni $x \in G$;
   - G, H come sopra, $\varphi(x) = 13x$;
   - G gruppo abeliano, $H = G$, $\varphi(x) = x^5$ per ogni $x \in G$.

5. Sia G il gruppo delle matrici reali 2×2 della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dove $ad \neq 0$. Dimostrare che l'insieme N delle matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un sottogruppo normale di G.

6. Sia R un anello commutativo e sia I un ideale di R. Sia inoltre $N(I) = \{x \in R\colon x^n \in I \text{ per qualche } n\}$. Dimostrare che $N(I)$ è un ideale di R che contiene I e che $N(N(I)) = N(I)$.

7. Sia $R = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti interi e sia
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \mid b \text{ è pari} \right\}.$$

   a) Si dimostri che S è un sottoanello di R.

   b) Si determini il gruppo $U(S)$ degli elementi invertibili di S.

   c) Si trovi un ideale T di $U(S)$ tale che $U(S)/T$ sia isomorfo, come gruppo abeliano, a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   d) Sia
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \mid \ b \text{ è pari} \right\}.$$
   Si dica se I è un ideale di R oppure no, giustificando la risposta.

8. Sia D un dominio di integrità e sia F il suo campo delle frazioni. Dimostrare che se K è un campo che contiene D, allora K contiene F.