

Algebra - Foglio esercizi 3

2 novembre 2005

1. Sia $f: G \rightarrow G$ un omomorfismo del gruppo G in sé. Provare che l'insieme $\{x \in G \mid f(f(x)) = f(x)\}$ è un sottogruppo di G .
2. Sia $f: G_1 \rightarrow G_2$ un omomorfismo tra i gruppi finiti G_1 e G_2 e sia H un sottogruppo di G_1 contenente il nucleo di f . Provare che risulta $(G_1: H) = (f(G_1): f(H))$.
3. Sia G il gruppo dei numeri complessi non nulli rispetto alla moltiplicazione e sia N l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 (cioè l'insieme degli $a + ib$ tali che $a^2 + b^2 = 1$). Dimostrare che N è un sottogruppo normale di G e che G/N è isomorfo al gruppo dei numeri reali positivi rispetto alla moltiplicazione (suggerimento: usare il primo teorema dell'omomorfismo).
4. Sia G il gruppo delle matrici reali 2×2 della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dove $ad \neq 0$.
Sia G' l'insieme delle matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Dimostrare che $G' = \{\prod_{i=1}^n x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \mid n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in G'\}$.
 - b) Scrivere esplicitamente G/G' e dimostrare che è abeliano.
5. Sia $R = \{m/n \in \mathbb{Q} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } 7 \text{ non divide } n\}$. Mostrare che R è un sottoanello del campo dei numeri razionali. Mostrare che $I = \{m/n \in \mathbb{Q} : m, n \in \mathbb{Z}, 7 \text{ non divide } n, 7 \text{ divide } m\}$ è l'unico ideale massimale di R . Tutte le frazioni si intendono ovviamente ridotte ai minimi termini.
6. Sia R un anello e sia X un sottoinsieme di R .
 - a) Dimostrare che $\ell(X) = \{r \in R \mid rx = 0 \text{ per ogni } x \in X\}$ è un ideale sinistro di R .
 - b) Se X è un ideale sinistro di R , dimostrare che $\ell(X)$ è un ideale bilatero.
7. Sia R un anello commutativo finito. Dimostrare che ogni ideale primo di R è un ideale massimale.
8. Sia R un anello commutativo e siano H e K ideali di R . Provare che l'insieme $(H: K) = \{r \in R \mid rx \in H \text{ per ogni } x \in K\}$ è un ideale di R contenente H .
Dimostrare inoltre che l'ideale $(H: K)K$ è contenuto in H e che $(H: H + K) = (H: K)$.
Dimostrare infine che, se R ha un'unità, allora $(H: K) = R$ se e solo se K è contenuto in H .