Algebra - Foglio esercizi 7

30 novembre 2005

1. Sia F un campo, sia $g(x)$ un polinomio di grado n in $F[x]$ e sia $V = (g(x))$ l'ideale generato da $g(x)$ in $F[x]$. Dimostrare che $F[x]/V$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su F.

2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K e F è un sottocampo di K tale che $[K : F]$ è finito, dimostrare che V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su F e che $\dim_F V = (\dim_K V)[K : F]$.

3. In $\mathbb{R}$ sia $\sqrt{5}$ che $\sqrt{7}$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$ e pertanto lo è $\sqrt{5}+\sqrt{7}$. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{5}+\sqrt{7}$. Quale è il grado di $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}$? Quale è il grado di $\sqrt{5}\sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}$?

4. Con le stesse notazioni del problema precedente, dimostrare che $\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ di grado 6.

5. Trovare un elemento $u \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}) = \mathbb{Q}(u)$.

6. Determinare il grado dei campi di spezzamento dei seguenti polinomi su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$:

   - $x^4 + 1$,
   - $x^4 - 2$,
   - $x^6 + x^3 + 1$,
   - $x^6 + 1$,
   - $x^5 - 1$.

7. Sia p un numero primo.

   - Dimostrare che esiste un polinomio irriducibile di grado 2 su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   - Usare questo polinomio per costruire un campo con p^2 elementi.
   - * Dimostrare che due polinomi irriducibili di grado 2 su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ danno luogo a campi con p^2 elementi isomorfi.

8. Sia $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}$ e sia $F = \mathbb{Q}(\omega)$, dove $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Dimostrare che F è un campo di spezzamento per $f(x)$. Notiamo come $[\mathbb{Q} : F] = 2$, molto inferiore al massimo possibile che è $4! = 24$.