

Algebra - Foglio esercizi 8

1. Sia G un gruppo e sia $T = G \times G$.
 - (a) Dimostrare che $D = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in G\}$ è un sottogruppo di T isomorfo a G .
 - (b)* Dimostrare che D è normale in T se e solo se G è abeliano.
2. Dimostrare che un gruppo G è isomorfo al prodotto diretto esterno dei sottogruppi normali $N_1, N_2, \dots, N_k$ se $G = N_1 N_2 \dots N_k$ e $N_i \cap (N_1 N_2 \dots N_{i-1} N_{i+1} \dots N_k) = (e)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$.
- 3* Dare un esempio di un gruppo G e sottogruppi normali $N_1, N_2, \dots, N_k$ tali che $G = N_1 N_2 \dots N_k$ e $N_i \cap N_j = (e)$ per ogni $i, j = 1, 2, \dots, k$ con $i \neq j$ ma G non è prodotto diretto interno di $N_1, N_2, \dots, N_k$.
4. Sia $G = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$. Scrivere il centro di G in funzione dei centri degli N_i .
5. Si consideri l'anello $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ (con p primo fissato) con le operazioni definite da

$$(x, y) + (w, z) = (x + w, y + z), \quad (x, y)(w, z) = (xw, yw + xz).$$

Si dimostri che:

- (a) A è commutativo con unità $(1, 0)$;
 - (b) $I = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ è l'insieme degli elementi non invertibili di A ;
 - (c) I è l'unico ideale proprio non nullo di A ;
 - (d) esiste un isomorfismo d'anneali $A/I \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
6. Siano G, H gruppi finiti e sia $f: G \rightarrow H$ un omomorfismo suriettivo. Si provi che:
 - (a) l'ordine di H divide l'ordine di G ;
 - (b) per ogni $g \in G$ il periodo di $f(g)$ divide il periodo di g ;
 - (c) se per ogni $g \in G$ il periodo di $f(g)$ coincide con il periodo di g , allora f è un isomorfismo.
 7. Sia R un anello commutativo con unità e sia I un ideale proprio di R . Si provi che I è massimale se e solo se $I + aR = R$ per ogni elemento $a \in R \setminus I$.
 8. Sia R un anello commutativo e siano I, J due ideali di R tali che $I \not\subseteq J$ e $J \not\subseteq I$. Si provi che $I \cap J$ non è un ideale primo di R .
 9. Sia n un numero intero. Si consideri una radice n -ma primitiva dell'unità ω (cioè un numero complesso ω tale che $\omega^k = 1$ se e solo se $n \mid k$).
 - (a) Si provi che ω genera tutte le n radici n -me dell'unità.
 - (b) Si provi che esistono $\phi(n)$ radici primitive dell'unità (dove ϕ è la funzione di Eulero, cioè $\phi(n)$ è la cardinalità di $\{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x \text{ non divide } n\}$)
 - (c)* Si consideri il polinomio $\Phi_n(x) = (x - \omega_1)(x - \omega_2) \dots (x - \omega_{\phi(n)})$ dove $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\phi(n)}$ sono le radici primitive dell'unità. Si dimostri che $x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$ (tali polinomi si chiamano *polinomi ciclotomici*).
 - (d) Si dimostri che
$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d \mid n, d < n} \Phi_d(x)}$$
si usi questa formula per calcolare $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x), \Phi_4(x), \Phi_5(x)$.
 - (e)* Si dimostri che ogni $\Phi_n(x)$ è monico a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
 - (f)** Dimostrare che i polinomi ciclotomici sono irriducibili su $\mathbb{Q}$.
 10. Sia $u = 2i + \sqrt{5}$.
 - (a) Trovare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
 - (c) Descrivere $Q(u) \cap R$.