Algebra - Foglio esercizi 4

9 novembre 2005

1. Sia G un gruppo e sia $G' = \{\Pi_{i=1}^n x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \colon n \in \mathbf{N}, x_i, y_i \in G\}$ il sottogruppo di G generato dagli elementi della forma $xyx^{-1}y^{-1}$ (chiamati *commutatori* di G). Dimostrare che G' è un sottogruppo normale di G.

2. Con le notazioni dell'esercizio precedente, dimostrare che G/G' è un gruppo abeliano e che, dato un sottogruppo normale $N \leq G$, se G/N è abeliano allora $N \supseteq G'$.

3. Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su un insieme S. Definiamo una azione di G sull'insieme $S \times S$ ponendo $g * (\alpha, \beta) = (g * \alpha, g * \beta)$. Sia α un elemento di S e sia $G_\alpha = \{g \in G \mid g * \alpha = \alpha\}$ lo stabilizzatore di α. Ovviamente anche G_α agisce su S, non necessariamente in modo transitivo. Dimostrare che il numero delle orbite di S sotto l'azione di G_α è uguale al numero di orbite di $S \times S$ sotto l'azione di G.

4. Sia $\varphi \colon G \to H$ un omomorfismo di gruppi e sia S un insieme su cui agisce H. Usando φ costruire una azione di G su S.

5. Ricordiamo che il gruppo dei quaternioni è il gruppo $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ la cui operazione è definita da $i^2 = j^2 = k^2$ e $ij = k = -ji, jk = i = -kj.ki = j = -ik$. I quaternioni reali sono l'insieme $\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ con somma definita componente per componente e prodotto definito estendendo per distributività il prodotto del gruppo dei quaternioni. Dimostrare che $\mathbb{H}$ è un corpo.

6. Un elemento r in un anello R si dice nilpotente se $r^n = 0$ per qualche intero $n \geq 1$. Dimostrare che se r è nilpotente, allora $1 - r$ è invertibile in R.

7. Dimostrare che in un anello commutativo l'insieme degli elementi nilpotenti è un ideale.

8. Sia R un anello commutativo senza elementi nilpotenti diversi da zero. Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ è un divisore dello zero, dimostrare che esiste un elemento $b \neq 0$ in R tale che $ba_0 = ba_1 = \ldots = ba_n = 0$.

9. Sia R un anello euclideo e siano a, b due elementi di R. Un loro *minimo comune multiplo* c è un elemento di R tale che $a \mid c, b \mid c$ e che se $a \mid x, b \mid x$ per qualche $x \in R$, allora $c \mid x$. Dimostrare

   (a) che due elementi non nulli di un anello euclideo ammettono un minimo comune multiplo;
   (b) che due minimi comuni multipli c, c' di due elementia, b sono associati;
   (c) che, denotando con $[a, b]$ il minimo comune multiplo di a, b, si ha $[a, b] = ab/(a, b)$.