Capitolo 7

Il problema del Flusso Massimo

Dati un grafo orientato $D = (V, A)$ e due nodi distinti $s, t \in V$, un *flusso* da s a t è un vettore $(f_e)_{e \in A}$ tale che:

- $f_e \geq 0$ per ogni $e \in A$;
- f soddisfa la *legge* (o *equazione*) *di conservazione del flusso* in ogni nodo diverso da s e t: precisamente, per ogni $v \in V \setminus \{s, t\}$, deve valere

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0. \tag{7.1}$$

Per ogni $e \in A$, il valore di f_e è il flusso che scorre sull'arco e. Il *valore* del flusso f da s a t, indicato con $\mathrm{val}(f)$, è la quantità netta di flusso uscente da s:

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e. \tag{7.2}$$

Lemma 7.1 *Per ogni flusso f da s a t si ha*

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in \delta^-(t)} f_e - \sum_{e \in \delta^+(t)} f_e$$

(cioè il flusso netto uscente da s è uguale al flusso netto entrante in t).

Dimostrazione. Si consideri la somma delle equazioni (7.1) per ogni $v \in V \setminus \{s, t\}$. Fissato un arco $(u, v) \in A$, la componente f_{uv} appare una volta con segno "+" ed una volta con segno "−" se $u, v \in V \setminus \{s, t\}$; appare solo una volta con segno "+" se $u \in V \setminus \{s, t\}$ e $v \in \{s, t\}$; appare solo una volta con segno "−" se $u \in \{s, t\}$ e $v \in V \setminus \{s, t\}$; non appare mai se $u, v \in \{s, t\}$. L'equazione ottenuta è dunque

$$\sum_{e \in \delta^-(s)} f_e + \sum_{e \in \delta^-(t)} f_e - \sum_{e \in \delta^+(s)} - \sum_{e \in \delta^+(t)} f_e = 0.$$

La tesi segue ora dal confronto con la definizione (7.2). □

Date *capacità* $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni arco $e \in A$, un flusso da s a t è detto *ammissibile* se il flusso su ogni arco non eccede la capacità: $f_e \leq c_e$ per ogni $e \in A$. Si noti che un flusso ammissibile esiste sempre: basta porre $f_e = 0$ per ogni $e \in A$.

Il problema del *flusso massimo* è il seguente: dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$ e capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni arco $e \in A$, trovare un flusso ammissibile da s a t di valore massimo.

Sottolineiamo che se le capacità fossero numeri razionali non-negativi, potremmo ridurci al caso di capacità intere semplicemente moltiplicandole tutte per il loro minimo comune denominatore: il problema ottenuto è del tutto equivalente, in quanto stiamo solo cambiando l'unità di misura del flusso. Per quanto riguarda, invece, il caso in cui le capacità siano arbitrari numeri reali non-negativi, osserveremo più avanti che la situazione è più delicata.

7.1 Algoritmo di Ford–Fulkerson

In questa sezione presentiamo un algoritmo per la soluzione del problema del flusso massimo.

7.1.1 Cammini aumentanti

Dato un qualunque flusso ammissibile f da s a t, vogliamo determinare se f è ottimo o se invece esiste un flusso ammissibile di valore maggiore. Sia P un cammino non orientato tra s e t. Precisamente, assumiamo che P sia formato dalla sequenza

$$v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k,$$

dove $v_0 = s$ e $v_k = t$. L'arco e_i è un *arco diretto* se $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ed è invece un *arco inverso* se $e_i = (v_{i+1}, v_i)$. Indichiamo con $\overrightarrow{A}(P)$ l'insieme degli archi diretti di P e con $\overleftarrow{A}(P)$ l'insieme degli archi inversi di P. Si dice che P è un *cammino f-aumentante* (o semplicemente cammino aumentante) se $c_e - f_e > 0$ per ogni $e \in \overrightarrow{A}(P)$ e $f_e > 0$ per ogni $e \in \overleftarrow{A}(P)$. L'uso di questa terminologia è spiegato dal seguente lemma.

Lemma 7.2 *Siano dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$, capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$ ed un flusso ammissibile f da s a t. Se esiste un cammino f-aumentante, allora f non è un flusso massimo.*

Dimostrazione. Sia P un cammino f-aumentante. Definiamo

$$\varepsilon = \min \left\{ \min_{e \in \overrightarrow{A}(P)} (c_e - f_e), \min_{e \in \overleftarrow{A}(P)} f_e \right\} \tag{7.3}$$

e osserviamo che $\varepsilon > 0$. Costruiamo un vettore f' ponendo, per ogni $e \in A$,

$$f'_e = \begin{cases} f_e + \varepsilon & \text{se } e \in \overrightarrow{A}(P) \\ f_e - \varepsilon & \text{se } e \in \overleftarrow{A}(P) \\ f_e & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{7.4}$$

(si veda la Figura 7.1). È semplice verificare che $0 \le f'_e \le c_e$ per ogni $e \in A$ e che f' soddisfa le equazioni di conservazione del flusso. Quindi f' è un flusso ammissibile da s a t. Notiamo infine che esiste un solo arco e incidente in s tale che $f_e \neq f'_e$. In particolare, se s è la coda di e, allora e è un arco diretto e quindi $f'_e = f_e + \varepsilon$; se invece s è la testa di e, allora e è un arco inverso e quindi $f'_e = f_e - \varepsilon$. In entrambi i casi, $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + \varepsilon > \mathrm{val}(f)$, dunque f non è un flusso massimo. $\square$

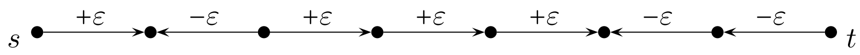

Figura 7.1: Costruzione di un flusso di valore maggiore tramite un cammino aumentante.

Quando costruiamo un flusso f' come descritto nella dimostrazione del lemma precedente, diciamo che stiamo *aumentando* il flusso lungo P.

Osservazione 7.3 *Con riferimento al lemma precedente e alla sua dimostrazione, se f è un flusso* intero *(cioè ha tutte le componenti intere) allora ε è un intero positivo e dunque anche f' è un flusso intero.*

Il Lemma 7.2 mostra che se esiste un cammino f-aumentante allora è possibile trovare un flusso migliore di f. Rimangono due problemi:

1. Com'è possibile trovare un cammino f-aumentante?
2. È vero anche l'inverso del Lemma 7.2? In altre parole, è vero che se non esiste alcun cammino f-aumentante allora f è un flusso massimo?

Risponderemo a queste domande rispettivamente nelle Sezioni 7.1.2 e 7.1.3.

7.1.2 Grafo ausiliario

Sia f un flusso ammissibile da s a t. Il *grafo ausiliario* rispetto ad f è il grafo orientato $D_f = (V, A_f)$ sugli stessi nodi di D in cui gli archi sono definiti come segue:

$$A_f := \{(u,v) : (u,v) \in A,\ c_{uv} - f_{uv} > 0\} \cup \{(v,u) : (u,v) \in A,\ f_{uv} > 0\}.$$

In altri termini, per ogni arco $e = (u,v) \in A$, se $f_e < c_e$ allora (u,v) è un arco di D_f e se $f_e > 0$ allora (v,u) è un arco di D_f. Si noti che se $0 < f_e < c_e$ allora (u,v) e (v,u) sono entrambi archi di D_f.

Lemma 7.4 *Siano dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$, capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$ ed un flusso ammissibile f da s a t. Esiste un cammino f-aumentante in D se e solo se esiste un cammino orientato da s a t in D_f.*

Dimostrazione. Dato un cammino f-aumentante P, il cammino P' ottenuto da P invertendo la direzione di tutti gli archi inversi è un cammino orientato da s a t in D_f. Viceversa, dato un cammino orientato P' da s a t in D_f, allora per ogni arco $(u,v) \in A_f(P')$ vale

$$(u,v) \in A \text{ e } c_{uv} - f_{uv} > 0 \qquad \text{oppure} \qquad (v,u) \in A \text{ e } f_{vu} > 0.$$

Pertanto il cammino P in D ottenuto da P' invertendo la direzione degli archi $(u,v) \in A_f(P')$ tali che $(v,u) \in A$ e $f_{vu} > 0$ è un cammino f-aumentante. □

Per il lemma precedente, trovare un cammino f-aumentante equivale a trovare un cammino orientato da s a t nel grafo ausiliario.

7.1.3 Teorema del Flusso Massimo e Taglio Minimo

Sia $D = (V, A)$ un grafo orientato. Dato un sottoinsieme di nodi $S \subseteq V$, l'insieme di archi

$$\delta^+(S) = \{(u, v) \in A : u \in S,\ v \in V \setminus S\}$$

è detto un *taglio*. Dato $S \subseteq V$ tale che $s \in S$ e $t \in V \setminus S$, diciamo che $\delta^+(S)$ è un taglio che *separa* s da t. Definiamo inoltre $\delta^-(S) = \delta^+(V \setminus S)$.

(La terminologia "taglio" è giustificata dal fatto che se vengono rimossi gli archi di $\delta^+(S)$ non esisterà alcun cammino orientato da un nodo di S ad un nodo di $V \setminus S$, dunque il grafo viene "tagliato" in due pezzi.)

Date capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni arco $e \in A$, la *capacità* del taglio $\delta^+(S)$, indicata con $c(\delta^+(S))$, è la somma delle capacità dei suoi archi:

$$c(\delta^+(S)) = \sum_{e \in \delta^+(S)} c_e.$$

Lemma 7.5 *Siano dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$ e capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$. Per ogni flusso ammissibile f da s a t e per ogni $S \subseteq V$ tale che $s \in S$ e $t \in V \setminus S$, si ha* $\mathrm{val}(f) \le c(\delta^+(S))$. *Inoltre, la disuguaglianza vale come uguaglianza se e solo se $f_e = c_e$ per ogni $e \in \delta^+(S)$ e $f_e = 0$ per ogni $e \in \delta^-(S)$.*

Dimostrazione. Usando la definizione (7.2) e le equazioni di conservazione del flusso (7.1), si trova

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(f) &= \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e \\
&= \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} \left(\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e \right) \\
&= \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e \right) \\
&= \sum_{e \in \delta^+(S)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(S)} f_e \\
&\le \sum_{e \in \delta^+(S)} c_e = c(\delta^+(S)).
\end{aligned}$$

Per giustificare la quarta uguaglianza, si può ragionare come nella dimostrazione del Lemma 6.12. Infine, l'unica disuguaglianza della catena precedente vale come uguaglianza se e solo se $f_e = c_e$ per ogni $e \in \delta^+(S)$ e $f_e = 0$ per ogni $e \in \delta^-(S)$. □

Come mostrato dal lemma precedente, la capacità di un taglio che separa s da t è un upper-bound per il valore massimo di un flusso ammissibile da s a t. Il seguente teorema mostra che il valore del flusso massimo è in effetti proprio uguale alla capacità minima di un taglio che separa s da t. Inoltre, come vedremo, un taglio di capacità minima può essere ricavato immediatamente a partire da un flusso massimo.

Teorema 7.6 (Teorema del Flusso Massimo e Taglio Minimo) *Dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$ e capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$, si ha*

$$\begin{aligned}
&\max\{\mathrm{val}(f) : f \textit{ è un flusso ammissibile da } s \textit{ a } t\} \\
&\qquad = \min\{c(\delta^+(S)) : S \subseteq V,\ s \in S,\ t \in V \setminus S\}. \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Il Lemma 7.5 implica che il massimo non eccede il minimo in (7.5). Sia f un flusso ammissibile da s a t tale che non esista alcun cammino f-aumentante. Si noti che un tale flusso esiste sicuramente: infatti, partendo dal flusso identicamente nullo, è possibile aumentare iterativamente il valore del flusso di una quantità intera (si veda l'Osservazione 7.3), dunque di almeno un'unità per iterazione; poiché il valore del flusso massimo è chiaramente finito, dopo un numero finito di iterazioni otteniamo un flusso f per cui non esiste alcun cammino f-aumentante.

Per il Lemma 7.4, il grafo ausiliario D_f non contiene alcun cammino orientato da s a t. Sia S l'insieme dei nodi raggiungibili da s in D_f. Poiché $s \in S$ e $t \notin S$, $\delta^+(S)$ è un taglio che separa s da t. Si noti che, per definizione di S, non esiste alcun arco $(u,v) \in A_f$ tale che $u \in S$ e $v \in V \setminus S$, altrimenti anche v sarebbe raggiungibile da s. Per la definizione di D_f, questo significa che per ogni $e \in \delta^+(S)$ vale $c_e - f_e = 0$, mentre per ogni $e \in \delta^-(S)$ vale $f_e = 0$. Allora l'ultima parte del Lemma 7.5 implica che $\mathrm{val}(f) = c(\delta^+(S))$. Pertanto f è un flusso massimo, $\delta^+(S)$ è un taglio minimo e vale l'uguaglianza (7.5). □

Dalla dimostrazione del teorema precedente seguono i seguenti importanti risultati.

Corollario 7.7 *Dato un flusso massimo f da s a t, un taglio di capacità minima $\delta^+(S)$ che separi s da t può essere ottenuto definendo S come l'insieme dei vertici raggiungibili da s nel grafo ausiliario D_f.*

Corollario 7.8 (Condizione di ottimalità) *Un flusso ammissibile da s a t ha valore massimo se e solo se non esiste alcun cammino f-aumentante.*

7.1.4 L'algoritmo di Ford–Fulkerson

La discussione svolta finora mostra la correttezza del seguente algoritmo. (Un esempio di applicazione dell'algoritmo è dato in Figura 7.2.)

Algoritmo di Ford–Fulkerson

Input: Un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$ e capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$.

Output: Un flusso ammissibile f da s a t di valore massimo ed un taglio $\delta^+(S)$ che separa s da t di capacità minima.

1. Si ponga $f_e := 0$ per ogni $e \in A$.
2. Si costruisca il grafo ausiliario D_f.
3. Se esiste un cammino orientato P' da s a t in D_f, allora
   - 3.1 si determini un cammino f-aumentante P in D e si aumenti f lungo P, ottenendo f';
   - 3.2 si ridefinisca $f := f'$ e si torni al punto 2.
4. Si definisca S come l'insieme dei nodi raggiungibili da s in D_f.

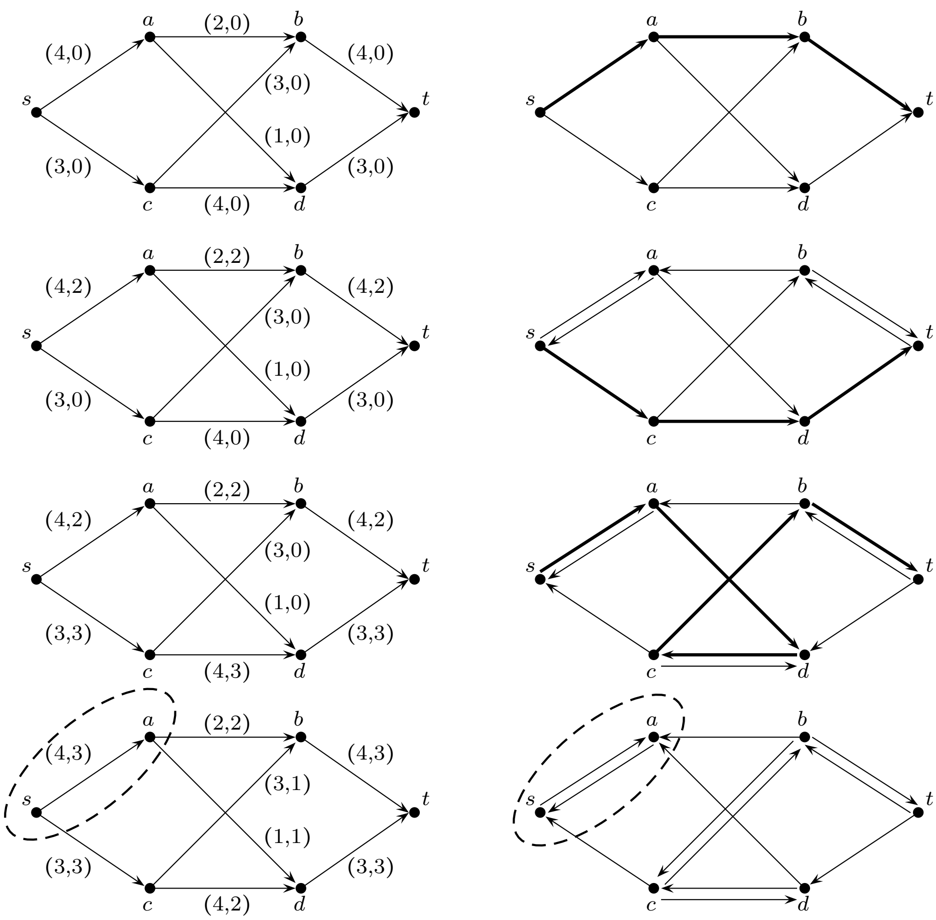

Figura 7.2: Esempio di esecuzione dell'algoritmo di Ford–Fulkerson. Ogni arco $e \in A$ è etichettato con una coppia di numeri (c_e, f_e), dove c_e è la capacità e f_e è il flusso trovato finora. I grafi sulla destra sono i grafi ausiliari relativi al flusso nella figura corrispondente sulla sinistra. In grassetto è evidenziato un cammino aumentante (quando ne esiste uno). Il flusso massimo ha valore 6. L'ovale tratteggiato indica l'insieme dei nodi ragiungibili da s *nel grafo ausiliario*: $S = \{s, a\}$. Gli archi uscenti da S *nel grafo originario* costituiscono un taglio di capacità minima, ancora pari a 6: $\delta^+(S) = \{(s,c),(a,b),(a,d)\}$.

Restano aperte due importanti questioni:

- L'algoritmo di Ford–Fulkerson termina sempre?
- Se sì, qual è il numero di iterazioni necessario affinché l'algoritmo termini? Questo numero è polinomiale nella grandezza dell'istanza?

Teorema 7.9 *L'algoritmo di Ford–Fulkerson termina sempre.*

Dimostrazione. Ad ogni iterazione, il flusso f è un intero, perché l'algoritmo parte dal vettore identicamente nullo ed aumenta il valore del flusso di quantità intere (Ossevazione 7.3). Quindi il valore del flusso aumenta di almeno un'unità ad ogni iterazione. Poiché il valore del flusso massimo non può eccedere $c(\delta^+(s))$, ne segue che l'algoritmo termina dopo al massimo $c(\delta^+(s))$ iterazioni. $\square$

Menzioniamo il fatto che se le capacità sono arbitrari numeri reali non-negativi allora la terminazione dell'algoritmo non è garantita. È addirittura possibile che le infinite iterazioni dell'algoritmo convergano ad un flusso che non è quello massimo. Questo è mostrato da esempi costruiti ad hoc che non riportiamo qui.

Dalla dimostrazione del teorema precedente ricaviamo un semplice (ma importante) corollario.

Corollario 7.10 *Per ogni problema di flusso massimo (con capacità intere), esiste un flusso massimo intero.*

Rimane aperta la questione della polinomialità. In effetti, l'algoritmo di Ford–Fulkerson, così come l'abbiamo descritto, non è polinomiale. Consideriamo infatti l'esempio in Figura 7.3, dove C è un qualunque intero positivo. Il flusso massimo ha valore $2C$: lo si ottiene assegnando flusso C agli archi $(s,a),(s,b),(a,t),(b,t)$ e flusso 0 all'arco (a,b). Partendo dal flusso nullo, se ad ogni iterazione dispari scegliamo come cammino aumentante il cammino s,a,b,t e in quelle pari scegliamo s,b,a,t, allora il valore del flusso aumenta di 1 ad ogni iterazione. Sono pertanto necessarie $2C$ iterazioni per trovare il flusso massimo. Poiché per rappresentare il numero C sono sufficienti $\lceil \log(C+1) \rceil + 1$ bits, il numero di iterazioni cresce in maniera esponenziale rispetto alla grandezza dell'istanza.

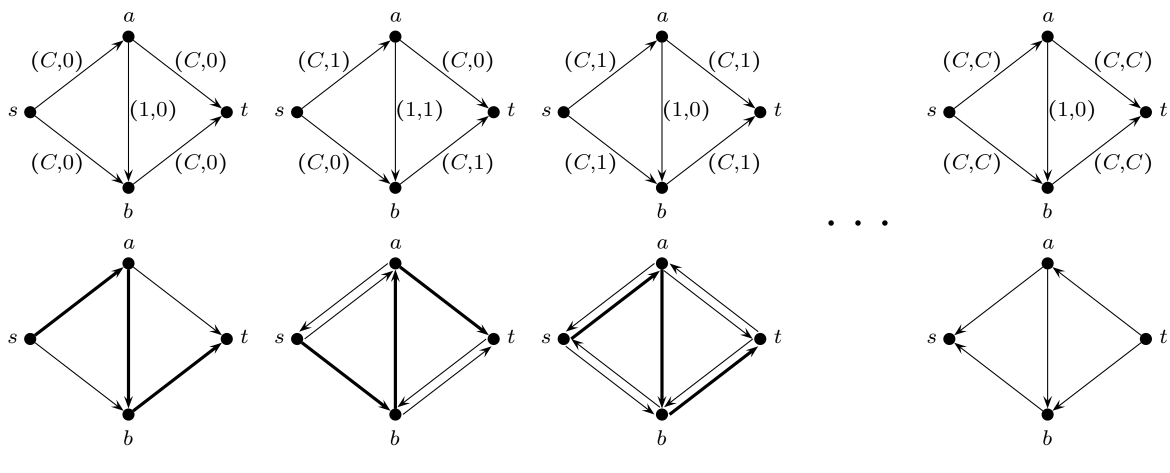

Figura 7.3: Esempio di scelta dei cammini aumentanti per cui l'algoritmo di Ford–Fulkerson non è polinomiale. I grafi in basso sono i grafi ausiliari relativi al flusso rappresentato nel grafo corrispondente in alto. In grassetto i cammini aumentanti scelti.

Tuttavia, è possibile dimostrare che la seguente semplice modifica dell'algoritmo di Ford–Fulkerson garantisce che l'algoritmo termini sempre in tempo polinomiale.

Regola del cammino minimo *Ad ogni iterazione, si scelga un cammino aumentante di lunghezza minima (cioè con il minimo numero di archi).*

Nel caso in Figura 7.3, alla prima iterazione i due cammini aumentanti di lunghezza minima hanno lunghezza 2; ad esempio, possiamo scegliere il cammino s,a,t. Aumentando il flusso lungo questo cammino si ottiene un flusso di valore C. Alla seconda iterazione, c'è un unico cammino aumentante disponibile: s, b, t. Aumentando lungo tale cammino si giunge al flusso ottimo.

È possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 7.11 *Dati un grafo orientato $D = (V, A)$, nodi distinti $s, t \in V$ e capacità $c_e \in \mathbb{Z}_+$ per ogni $e \in A$, l'algoritmo di Ford–Fulkerson con la regola del cammino minimo termina dopo al massimo $|V| \cdot |A|$ iterazioni.*

Un cammino aumentante di lunghezza minima può essere determinato trovando un cammino di lunghezza minima da s a t nel grafo ausiliario: per fare questo è sufficiente utilizzare l'algoritmo descritto nella Sezione 6.1, che è polinomiale. Dunque ogni iterazione dell'algoritmo di Ford-Fulkerson con la regola del cammino minimo richiede un numero polinomiale di operazioni. Da questo e dal teorema precedente segue che l'algoritmo nel suo complesso è polinomiale.

7.2 Flusso massimo flusso, taglio minimo e programmazione lineare

Il Teorema del Flusso Massimo e Taglio Minimo può essere spiegato tramite la teroia della dualità in programmazione lineare. Il problema del flusso massimo può essere formulato tramite il seguente programma lineare:

$$\begin{array}{lrl}
\max & \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e & \\
\text{s.a} & \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0, & v \in V \setminus \{s, t\} \\
& 0 \le f_e \le c_e, & e \in A.
\end{array}$$

Sarà utile riscrivere il problema in una forma equivalente. Indichiamo con una variabile θ il valore del flusso. Ricordando il risultato del Lemma 7.1, possiamo allora scrivere:

$$\begin{array}{lrl}
\max & \theta & \\
\text{s.a} & \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0, & v \in V \setminus \{s, t\} \\
& -\theta + \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e = 0 & \\
& \theta + \sum_{e \in \delta^+(t)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(t)} f_e = 0 & \\
& f_e \le c_e, & e \in A \\
& f_e \ge 0, & e \in A
\end{array}$$

Il duale avrà una variabile y_v per ogni $v \in V$, ciascuna associata ad un vincolo di conservazione del flusso o a uno dei vincoli relativi a s e t; avrà inoltre variabili z_e per ogni $e \in A$, ciascuna associata al vincolo di capacità dell'arco e. Il duale è il seguente:

$$\min \sum_{e \in A} c_e z_e \tag{7.6}$$

$$\text{s.a} \quad y_u - y_v + z_{uv} \geq 0, \quad (u,v) \in A \tag{7.7}$$

$$y_t - y_s = 1 \tag{7.8}$$

$$z_e \geq 0, \quad e \in A. \tag{7.9}$$

(L'equazione $y_t - y_s = 1$ è il vincolo relativo alla variabile primale θ.)

Ridimostriamo ora per mezzo della teoria della dualità la versione debole del Teorema del Flusso Massimo e Taglio Minimo, cioè la prima parte del Lemma 7.5.

Proposizione 7.12 *Il valore ottimo del problema primale (cioè il valore del flusso massimo) non eccede il costo di un taglio di capacità minima che separa s da t.*

Dimostrazione. Per ogni sottoinsieme $S \subseteq V$ tale che $s \in S$ e $t \in V \setminus S$, definiamo una soluzione $(\bar{y}, \bar{z})$ per il problema duale ponendo, per $v \in V$ e $e \in A$,

$$\bar{y}_v = \begin{cases} 0 & \text{se } v \in S \\ 1 & \text{se } v \notin S \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \bar{z}_e = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \delta^+(S) \\ 0 & \text{se } e \notin \delta^+(S). \end{cases}$$

Si noti che $(\bar{y}, \bar{z})$ è una soluzione duale ammissibile. Infatti, $\bar{y}_t - \bar{y}_s = 1 - 0 = 1$, mentre, per ogni $(u,v) \in A$, vale

$$\bar{y}_u - \bar{y}_v + \bar{z}_{uv} = \begin{cases} 0 - 0 + 0 = 0 & \text{se } u, v \in S \\ 1 - 1 + 0 = 0 & \text{se } u, v \notin S \\ 0 - 1 + 1 = 0 & \text{se } u \in S,\ v \notin S \\ 1 - 0 + 0 \geq 0 & \text{se } u \notin S,\ v \in S. \end{cases}$$

Inoltre, il valore della soluzione $(\bar{y}, \bar{z})$ nel duale è $\sum_{e \in A} c_e \bar{z}_e = \sum_{e \in \delta^+(S)} c_e = c(\delta^+(S))$.

Ad ogni taglio $\delta^+(S)$ che separa s da t abbiamo dunque associato una soluzione ammissibile $(\bar{y}, \bar{z})$ del duale il cui valore è esattamente la capacità del taglio. Ricordando che il valore ottimo del primale è $\text{val}(f)$, abbiamo, dal Teorema di Dualità Debole, $\text{val}(f) \leq c(\delta^+(S))$ per ogni taglio $\delta^+(S)$ che separa s da t. □

È possibile dimostrare che le soluzioni *di base* del duale sono esattamente i vettori $(\bar{y}, \bar{z})$ del tipo definito nella dimostrazione della proposizione precedente. Ricordando che ogni programma lineare ha una soluzione ottima che è una soluzione di base, questo implica immediatamente il Teorema del Flusso Massimo e Taglio Minimo nella sua versione più forte (Teorema 7.6).