Automi e Linguaggi Formali

Espressioni regolari

A.A. 2014-2015
Enrico Mezzetti
emezzett@math.unipd.it

Università degli Studi di Padova

Espressioni regolari

- Un FA (NFA o DFA) e' un metodo per costruire una macchina che riconosce linguaggi regolari
- Una *espressione regolare* e' un modo dichiarativo per descrivere un linguaggio regolare
  - Descrizione *algebrica* vs. *comportamentale*
- Esempio: $\mathbf{01^* + 10^*}$
  - $L(01^* + 10^*) = \{0111111111111 \vee 1000000000 \vee \ldots\}$
- Le espressioni regolari sono usate, ad esempio, in
  - Comandi UNIX (`grep`)
  - Strumenti per l'analisi lessicale presenti nelle distro Linux (E.g., `lex` - Lexical analyzer generator e `flex` - Fast Lex)

Notazione delle espressioni regolari: Operatori

- Espressioni comprendono **operatori** e **simboli**

Unione $L \cup M = \{w : w \in L \text{ o } w \in M\}$
Es.: $L = \{001, 10, 111\}$ e $M = \{\epsilon, 001\}$
$L \cup M = \{\epsilon, 001, 10, 111\}$

Concatenazione $L.M = \{w : w = xy, x \in L, y \in M\}$
Es.: $L = \{001, 10, 111\}$ e $M = \{\epsilon, 001\}$
$L.M = \{001, 10, 111, 001001, 10001, 111001\}$

Potenza $L^0 = \{\epsilon\},\ L^1 = L,\ L^{k+1} = L.L^k$
Es.: $L = \{001, 10\}$
$L^0 = \{\epsilon\},\ L^1 = \{001, 10\},\ L^2 = \{00110, 10001, 1010, 001001\}$

Chiusura di Kleene $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$
Es.: $L = \{0, 11\}$
L^* = {stringhe di 0 e 1 tali che gli 1 compaiono a coppie}

👁 *L^* include tutte le stringhe che possono essere formate concatenando elementi in L*

Notazione delle espressioni regolari: Costruzione

- Definizione induttiva delle espressioni

Base
- Costanti: ϵ e $\emptyset$ sono espressioni regolari
  $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ e $L(\emptyset) = \emptyset$.
- Simboli: Se $a \in \Sigma$, allora **a** e' un'espressione regolare.
  $L(\mathbf{a}) = \{a\}$ ↑ *(in grassetto)*
- Variabili: L rappresenta un linguaggio arbitrario

Induzione
- Unione: se E e F sono espressioni regolari ⇒
  $E + F$ e' un'espressione regolare per $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$
- Concatenazione: se E e F sono espressioni regolari ⇒
  $E.F$ e' un'espressione regolare per $L(E.F) = L(E).L(F)$
- Chiusura: se E e' un'espressione regolare ⇒
  E^* e' un'espressione regolare per $L(E^*) = (L(E))^*$
- Parentesizzazione: se E e' un'espressione regolare ⇒
  (E) e' un'espressione regolare per $L((E)) = L(E)$

Esempio costruzione espressione regolare

- Espressione regolare per le stringhe di 0 e 1 alternati

  $L = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ 0 e 1 alternati in } w\}$
- Costruzione
  - $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1} \in$ `regexp` (base - simboli)
  - $\mathbf{01} \in$ `regexp` per concatenazione
  - $(\mathbf{01})^* \in$ `regexp` per chiusura
  - $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* \in$ `regexp` per unione
  - $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* \in$ `regexp` per unione

$$(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^*$$

equivalentemente:

$$(\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{0})$$

$L = (epsilon + \mathbf{1}) = L(\epsilon) + L(\mathbf{1}) = \{\epsilon\} \cup \{1\} = \{\epsilon, 1\}$

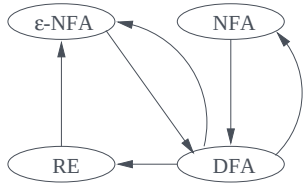
Ordine di precedenza per gli operatori

- Algebre definiscono precedenza tra operatori
  - $x \cdot y + z \rightarrow (x \cdot y) + z$ e non $x \cdot (y + z)$
- Precedenza in espressioni regolari
  1. Chiusura (*)
  2. Concatenazione (punto)
  3. Unione ($+$)
  - Esempio: $\mathbf{01}^* + \mathbf{1}$ e' raggruppato in $(\mathbf{0}(\mathbf{1})^*) + \mathbf{1}$
- Derogabile con uso di parentesi
  - Esempio: $(\mathbf{01})^*$

Esempi di `regexp`

Equivalenza di FA e `regexp`

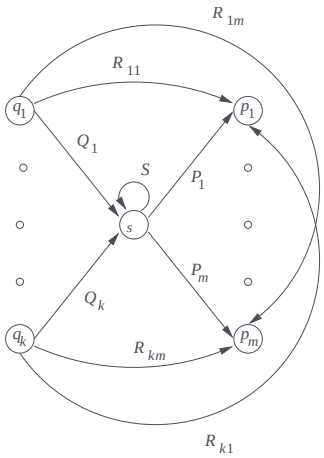
- DFA, NFA e ϵ-NFA sono equivalenti
  - Accettano la stessa classe di linguaggi (l. regolari)



- Per sostenere equivalenza tra `regexp` FA dimostriamo che
  1. Per ogni DFA A possiamo trovare (costruire) un'espressione regolare R, tale che $L(R) = L(A)$.
  2. Per ogni espressione regolare R esiste un ϵ-NFA A, tale che $L(A) = L(R)$.

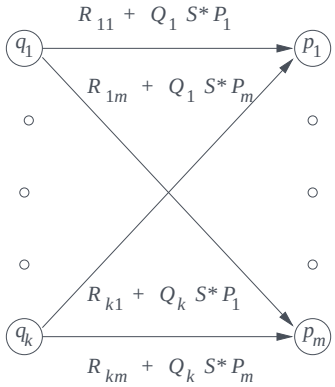
Da DFA a RE: tecnica per eliminazione di stati

1. Etichettiamo gli archi con espressioni regolari di simboli



La tecnica di eliminazione di stati - 2

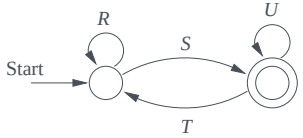
2. Ora eliminiamo lo stato s



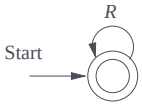
3. $\forall \star q$ eliminiamo da FA originale tutti gli stati eccetto q_0 e $\star q$.

La tecnica di eliminazione di stati - 3

- Per ogni $q \in F$ saremo rimasti con A_q in due forme possibili
  - Corrispondente all'espressione regolare $E_q = (R + SU^*T)^*SU^*$



  - Corrispondente all'espressione regolare $E_q = R^*$



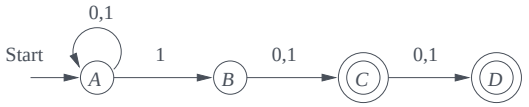
- L'espressione finale e'

$$\bigoplus_{q \in F} E_q$$

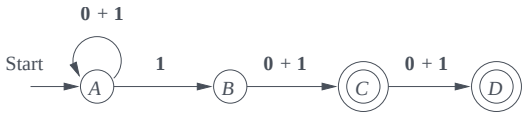
Esempio riduzione

- Ridurre l'automa NFA $\mathcal{A}$ che accetta il linguaggio delle *stringhe con 1 come penultimo o terzultimo elemento*

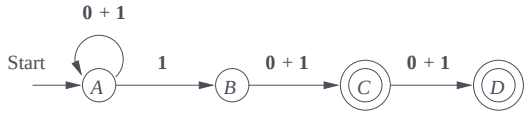
$$L(\mathcal{A}) = \{\mathcal{W} : \sqsupseteq = \S\infty\lfloor,\ \circ\ \sqsupseteq = \S\infty\lfloor\rfloor,\ \ \S \in \{\prime, \infty\}^*, \{\lfloor, \rfloor\} \subseteq \{\prime, \infty\}\}$$



1. La trasformiamo in un automa con espressioni regolari come etichette

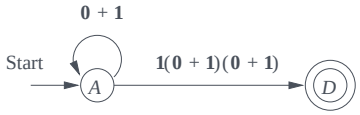


Esempio riduzione - 2



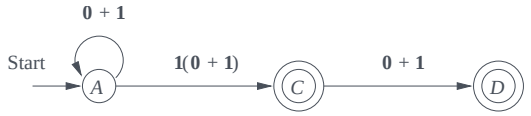
2 Eliminiamo lo stato B (non terminale)

3 Poi eliminiamo lo stato C e otteniamo $\mathcal{A}_D$

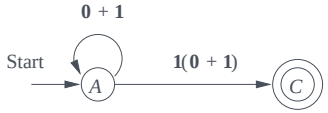


con espressione regolare $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1})$

Esempio riduzione - 3



4 Alternativamente possiamo eliminare D e ottenere $\mathcal{A}_C$



con espressione regolare $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$

5 L'espressione finale e' la *somma* delle due espressioni precedenti

$$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1}) + (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$$

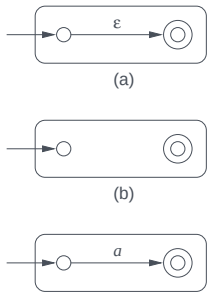
Da espressioni regolari a ϵ-NFA

Teorema 3.7 Per ogni espressione regolare R possiamo costruire un ϵ-NFA A, tale che $L(A) = L(R)$ con

1. Un solo stato accettante
2. Nessun arco entrante nello stato iniziale
3. Nessun arco uscente dallo stato finale

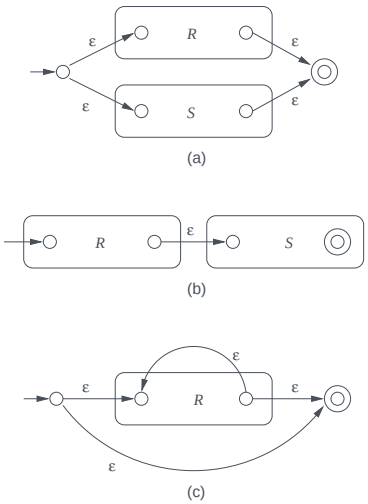
Prova Per induzione strutturale su R

Base ϵ-NFA per ϵ, $\emptyset$, e $\mathbf{a}$



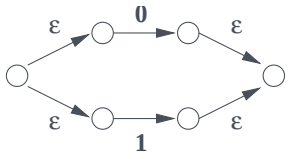
Da espressioni regolari a ϵ-NFA - 2

Induzione ϵ-NFA per $R + S$, RS, e R^* *(caso parentesi non rilevante)*

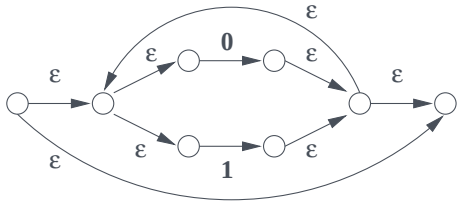


Esempio trasformazione - 1

- R=$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$



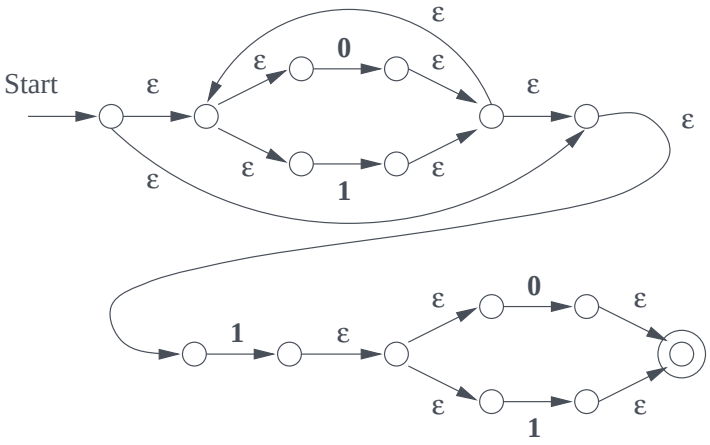
(a)



(b)

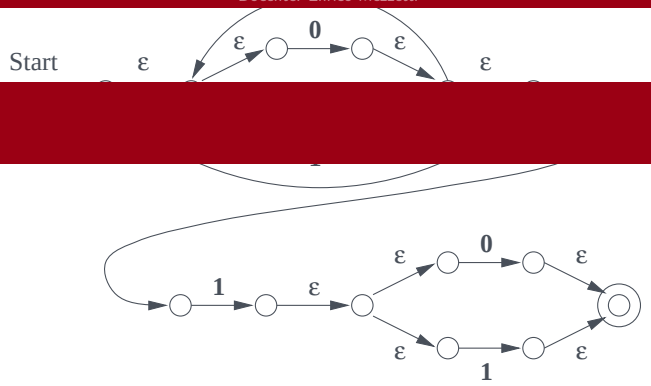
Esempio trasformazione - 2

(b)



(c)

Esempi



(c)

Proprieta' algebriche per le espressioni regolari

- `regexp` presentano proprieta' algebriche
  - Similitudine con espressioni aritmetiche
- **Associativita'** e **commutativita'**

Commutativita' L'unione e' *commutativa*
$L \cup M = M \cup L$

Associativita' L'unione e' *associativa*
$(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$

La concatenazione e' *associativa*
$(LM)N = L(MN)$

Nota: concatenazione non e' commutativa cioe' $\exists\, L, M$ tali che $LM \neq ML$.

Proprieta' algebriche per le espressioni regolari - 2

- **Identita'** e **annichilatori**

Identita' $\emptyset$ e' *l'identita'* per l'unione
$\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$

$\{\epsilon\}$ e' l'identita' *sinistra* e *destra* per la concatenazione
$\{\epsilon\}L = L\{\epsilon\} = L$

Annichilatore $\emptyset$ e' l'annichilatore *sinistro* e *destro* per la concatenazione
$\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

- **Distributivita' Idempotenza**

Distributivita' La concatenazione e' *distributiva a sinistra* sull'unione
$L(M \cup N) = LM \cup LN$

La concatenazione e' *distributiva a destra* sull'unione
$(M \cup N)L = ML \cup NL$

Idempotenza L'unione e' *idempotente*
$L \cup L = L$

Proprieta' algebriche per le espressioni regolari - 3

- **Proprieta' relative alla chiusura**

Idempotenza La chiusura e' idempotente
$(L^*)^* = L^*$

Valori notevoli $\emptyset^* = \{\epsilon\}$

$\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$

$L^+ = LL^* = L^*L$

$L^* = L^+ \cup \{\epsilon\}$

Dimostrazione

- La chiusura e' *idempotente* $(L^*)^* = L^*$
- Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
w \in (L^*)^* &\iff w \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} L^j \right)^i \\
&\iff \exists k, m \in \mathbb{N} : w \in (L^m)^k \\
&\iff \exists p \in \mathbb{N} : w \in L^p \\
&\iff w \in \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \\
&\iff w \in L^*
\end{aligned}
$$

Esempi