Automi e Linguaggi Formali

Equivalenza e minimizzazione di automi

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

A.A. 2014-2015

Enrico Mezzetti
emezzett@math.unipd.it

Proprieta' dei linguaggi regolari

- **Pumping Lemma**
  - Ogni linguaggio regolare soddisfa il pumping lemma
  - Se L non e' regolare il pumping lemma mostrera' una contraddizione
- **Proprieta' di chiusura**
  - Costruire automi da componenti usando delle operazioni algebriche sui linguaggi
  - E.g., dati L e M possiamo costruire un automa per $L \cap M$
- **Proprieta' di decisione**
  - Analisi computazionale degli automi
  - Quanto costa controllare proprieta' sugli automi
- **Tecniche di minimizzazione**
  - Risparmiare costruendo automi piu piccoli
  - Processo di semplificazione

Equivalenza tra stati

- Sia $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_F)$ un DFA con $\{p, q\} \subseteq Q$

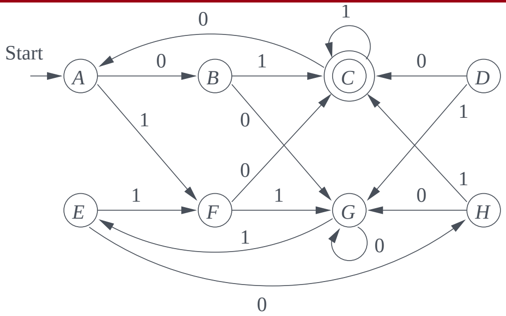
$$p \equiv q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(p, w) \in Q_F \iff \hat{\delta}(q, w) \in Q_F$$

  - Se $p \equiv q$ diciamo che p e q sono *equivalenti*
  - Se $p \not\equiv q$ diciamo che p e q sono *distinguibili*

- **Distingubilita**' $\rightarrow$ p e q sono distinguibili se e solo se

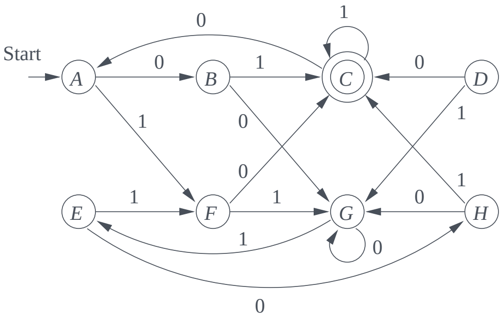
$$\exists\, w : \hat{\delta}(p, w) \in Q_F \text{ e } \hat{\delta}(q, w) \notin Q_F \text{ (o viceversa)}$$

Esempio di equivalenza



- Alcuni stati ovviamente *distinguibili*
  - $\hat{\delta}(C, \epsilon) \in Q_F,\ \hat{\delta}(G, \epsilon) \notin Q_F \Longrightarrow C \not\equiv G$
- Altri meno...
  - $A \stackrel{?}{\equiv} G\ \rightarrow$ per $\epsilon, 0, 1$?
  - $\hat{\delta}(A, 01) = C \in Q_F,\ \hat{\delta}(G, 01) = E \notin Q_F \Longrightarrow A \not\equiv G$

Esempio di equivalenza - 2



- $\hat{\delta}(A, \epsilon) = A \notin Q_F$, $\hat{\delta}(E, \epsilon) = E \notin Q_F$
- $\hat{\delta}(A, 1) = F = \hat{\delta}(E, 1)$
  - $\hat{\delta}(A, 1x) = \hat{\delta}(E, 1x) = \hat{\delta}(F, x)$
- $\hat{\delta}(A, 00) = G = \hat{\delta}(E, 00)$
- $\hat{\delta}(A, 01) = C = \hat{\delta}(E, 01)$

Algoritmo induttivo

- Algoritmo di riempimento di una tabella (*TF algorithm*)
  - Trovare coppie di stati *distinguibili*
    - ► Coppie residue → equivalenti

Base Se $p \in Q_F$ e $q \notin Q_F$ allora $p \not\equiv q$

Induzione Se $\exists\, a \in \Sigma : \delta(p, a) = r \not\equiv s = \delta(q, a)$ allora anche $p \not\equiv q$

✎ Applichiamo a DFA A

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

Correttezza dell'algoritmo

Th. 4.20 Se p e q non sono distinguibili dall'algoritmo allora anche $p \equiv q$.

Prova Supponiamo per assurdo che esista $\{p, q\}$ *sbagliata* tale che:

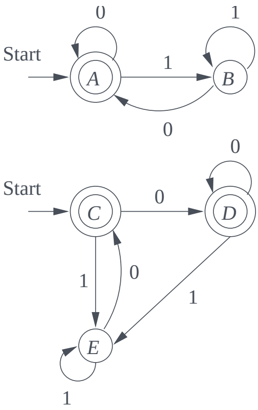
- $\exists\, w : \ \hat{\delta}(p, w) \in Q_F,\ \hat{\delta}(q, w) \notin Q_F$ o viceversa
- l'algoritmo TF non distingue tra p e q

- Per induzione su $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ la stringa *piu' corta* che identifica $\{p, q\}$ come distinguibili (non colta da TF)
  - $(n = 0)$ $w = \epsilon$: TF non puo' non distinguere p e q
  - $(n \geq 1)$: allora $\exists\, r = \delta(p, a_1)$ e $s = \delta(q, a_1)$
    - $p \not\equiv q \Rightarrow r \not\equiv s$ per la stringa $a_2 \cdots a_n$ che e' piu' corta della stringa minima che riconosce una coppia *sbagliata*
    - $\{r, s\}$ non e' una coppia *sbagliata* e TF deve aver scoperto $r \not\equiv s$
    - per la sua parte induttiva TF deve aver scoperto anche $p \not\equiv q$

Testare l'equivalenza tra LR

- Siano L e M linguaggi regolari (descritti in qualche forma)
- Per testare se $L \equiv M$
  1. Convertiamo sia L che M in DFA
  2. Immaginiamo il DFA che e' l'unione dei due DFA (non importa se ha due stati iniziali)
  3. Se l'algoritmo TF dice che i due stati iniziali sono distinguibili, allora $L \not\equiv M$, altrimenti $L \equiv M$

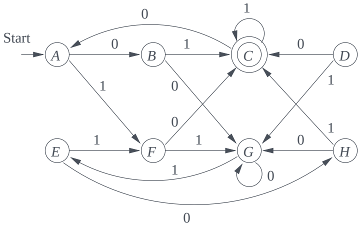
Esempio test equivalenza LR



- Entrambi accettano $L(\epsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{0})$
- Applichiamo TF ✎
- Complessita'?

Minimizzazione di DFA

- Equivalenza → **minimizzazione**
- Per ogni DFA che accetta L possiamo trovare un DFA
  - *Equivalente*
  - *Min* numero di stati rispetto a tutti i DFA che accettano L
  - Tale DFA e' *unico* per L
- Algoritmo TF per clusterizzare stati equivalenti
  - Rimpiazzare p con $p/_{\equiv}$ (*classe di equivalenza*)
    - *Riflessiva, simmetrica e transitiva*
- Esempio



- $\{\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{D, F\}, \{G\}\}$

Transitivita'

Th 4.23 Se $p \equiv q$ e $q \equiv r$, allora $p \equiv r$.

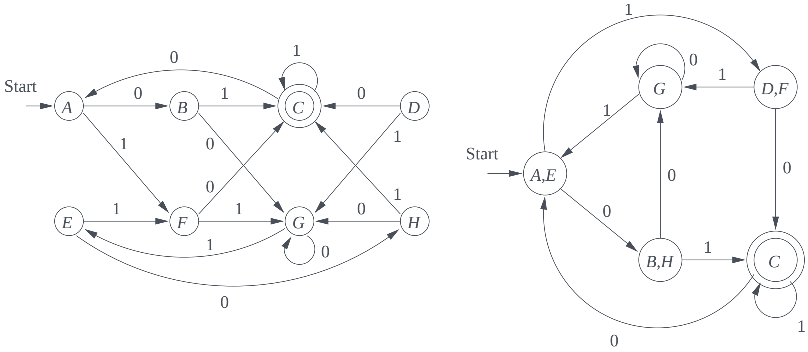
Prova Supponiamo *per assurdo* che $p \not\equiv r$

- $\exists w$ tale che $\hat{\delta}(p, w) \in Q_F$ e $\hat{\delta}(r, w) \notin Q_F$
- $\hat{\delta}(q, w)$ puo' essere o non essere in Q_F
  - $\hat{\delta}(q, w) \in Q_F \rightarrow q \not\equiv r$
  - $\hat{\delta}(q, w) \notin Q_F \rightarrow p \not\equiv q$
- Simmetricamente nell'altra ipotesi
- Concludiamo che $p \equiv r$

Algoritmo di minimizzazione

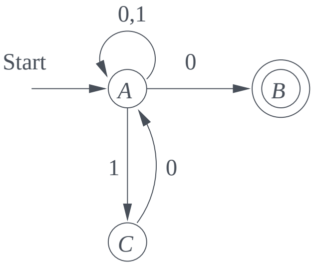
- Per minimizzare un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ costruiamo un
$$DFA\ B = (Q/_{\equiv}, \Sigma, \gamma, q_0/_{\equiv}, F/_{\equiv})$$
dove
$$\gamma(p/_{\equiv}, a) = \delta(p, a)/_{\equiv}$$
- B *ben definito* se
$$p \equiv q \Rightarrow \delta(p, a) \equiv \delta(q, a)$$
  - In effetti: se $\delta(p, a) \not\equiv \delta(q, a)$ TF concluderebbe $p \not\equiv q$
  - Notare anche che $F/_{\equiv}$ contiene tutti e soli stati accettanti di A

Esempio di minimizzazione



Minimizzazione di NFA

- Possiamo applicare l'agoritmo di minimizzazione a NFA? **NO**
  - Possiamo trovare NFA minimo per L (per enumerazione esaustiva)
  - Non possiamo "raggruppare" gli stati di un NFA (non riduce il numero di stati)
- Esempio



DFA Minimo

- Sia B il DFA minimizzato ottenuto su DFA A
  - $L(A) = L(B)$
  - Puo' esistere DFA C con $L(C) = L(B)$ ma meno stati di B?
- La risposta e' **NO**

Prova Applichiamo TF a $\underline{B \text{ e } C}$

- Stati inizali sono indistinguibili poiche' $L(B) \equiv L(C)$
- Se $\{p, q\}$ sono indistinguibili, lo sono anche i rispettivi successori per ogni $a \in \Sigma$
- Non esistono stati irraggiungibili (altrimenti non DFA minimo)
- $\forall\ p$ in B, $\exists\ q$ in C tale che $p \equiv q$
- Se per assurdo C avesse meno stati, allora ci sarebbero almeno due stati in B non distiguibili dallo stesso stato in C e quindi non distinguibile con un'altro degli stati in B (impossibile)