

# Automati e Linguaggi Formali

## Proprieta' dei linguaggi regolari

A.A. 2014-2015  
Enrico Mezzetti  
emezzett@math.unipd.it



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

## Proprieta' dei linguaggi regolari

- **Pumping Lemma**
  - Ogni linguaggio regolare soddisfa il pumping lemma
  - Se  $L$  non e' regolare il pumping lemma mostrera' una contraddizione
- **Proprieta' di chiusura**
  - Costruire automi da componenti usando delle operazioni algebriche sui linguaggi
  - E.g., dati  $L$  e  $M$  possiamo costruire un automa per  $L \cap M$
- **Proprieta' di decisione**
  - Analisi computazionale degli automi
  - Quanto costa controllare proprieta' sugli automi
- **Tecniche di minimizzazione**
  - Risparmiare costruendo automi piu piccoli
  - Processo di semplificazione



Automati e Linguaggi Formali – A.A. 2014-2015  
Docente: Enrico Mezzetti

2 of 17

## Proprieta' di chiusura dei linguaggi regolari

- Siano  $L$  e  $M$  due linguaggi regolari  $\Rightarrow$  e' regolare anche:
  - Unione:  $L \cup M$
  - Intersezione:  $L \cap M$
  - Complemento:  $\overline{L}$
  - Differenza:  $L \setminus M$
  - Inversione:  $L^R = \{w^R : w \in L\}$
  - Chiusura:  $L^*$
  - Concatenazione:  $LM$
- **Chiusura**  $\rightarrow$  classe dei LR e' chiusa
  - Rispetto ad un insieme di operazioni



Automati e Linguaggi Formali – A.A. 2014-2015  
Docente: Enrico Mezzetti

3 of 17

## Chiusura rispetto a unione e complemento

Th. 4.4 Per ogni coppia di linguaggi regolari  $L$  e  $M$ ,  $L \cup M$  e' regolare.

**Prova** Sia  $L = L(E)$  e  $M = L(F)$ .

Allora  $L \cup M = L(E + F)$  per definizione di  $+$  in RE.

Th. 4.5 Se  $L$  e' un linguaggio regolare su  $\Sigma$ , allora anche  $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$  e' regolare.

**Prova** Sia  $L$  riconosciuto da un DFA

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Allora  $L(\mathcal{B}) = \overline{L}$  dove

$$\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

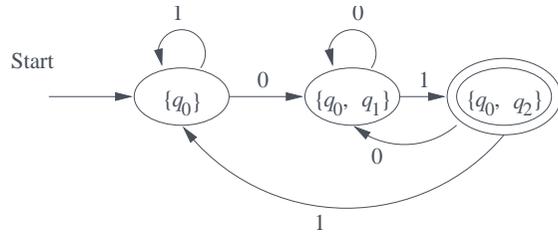


Automati e Linguaggi Formali – A.A. 2014-2015  
Docente: Enrico Mezzetti

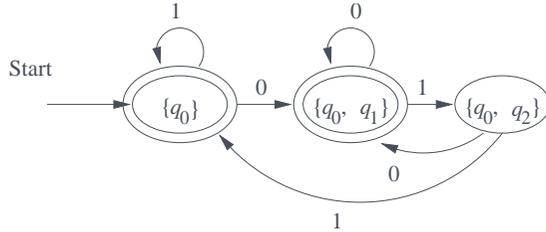
4 of 17

## Esempio

- Sia  $L$  riconosciuto dal DFA  $\mathcal{A} - L(\mathcal{A} = ((0 + 1) * 01)$



- Allora  $\bar{L}$  e' riconosciuto dal DFA  $\bar{\mathcal{A}}$



## Chiusura rispetto all'intersezione

**Th. 4.8** Se  $L$  e  $M$  sono regolari, allora anche  $L \cap M$  e' regolare.

**Prova 1** Per la legge di De Morgan,  $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$ .

Sappiamo gia' (Th. 4.4-4.5) che i linguaggi regolari sono chiusi sotto il complemento e l'unione.

### Leggi di De Morgan

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \rightarrow \quad (A \cap B) = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



## Chiusura rispetto all'intersezione - 2

**Th. 4.8** Se  $L$  e  $M$  sono regolari, allora anche  $L \cap M$  e' regolare.

**Prova 2** Sia  $L$  il linguaggio di

$$\mathcal{A}_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$$

e  $M$  il linguaggio di

$$\mathcal{A}_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$$

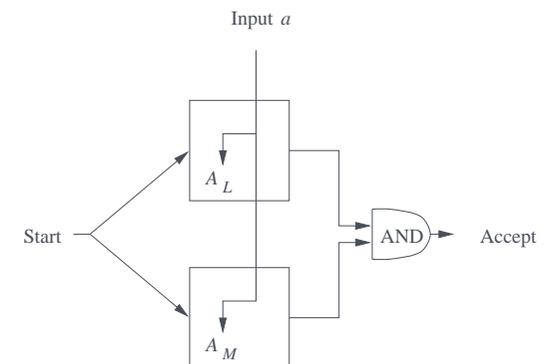
- Assumiamo che  $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M$  siano DFA (senza perdita di generalita')

- 👁️ Costruiamo un automa che "simula"  $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M$  in parallelo. Accetta  $w$  se e solo se sia  $\mathcal{A}_L$  sia  $\mathcal{A}_M$  accettano  $w$



## Chiusura rispetto all'intersezione - 3

- Se  $\mathcal{A}_L$  va dallo stato  $p \rightarrow s$  leggendo  $a$ , e  $\mathcal{A}_M$  va dallo stato  $q \rightarrow t$  leggendo  $a$  allora  $\mathcal{A}_{L \cap M}$  va dallo stato  $(p, q) \rightarrow (s, t)$  leggendo  $a$



# Chiusura rispetto all'intersezione - 3

Formalmente

$$\mathcal{A}_{L \cap M} = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta_{L \cap M}, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

dove

$$\delta_{L \cap M}((p, q), a) = (\delta_L(p, a), \delta_M(q, a))$$

Si dimostra per induzione su  $|w|$  che

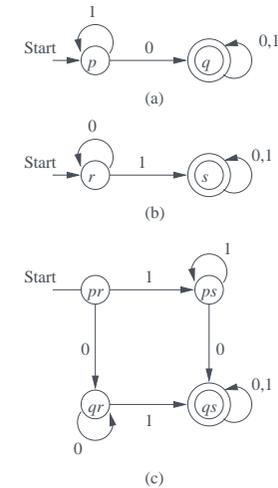
$$\hat{\delta}_{L \cap M}((q_L, q_M), w) = (\hat{\delta}_L(q_L, w), \hat{\delta}_M(q_M, w))$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{L \cap M} \text{ accetta } w \iff \mathcal{A}_L \text{ accetta } w \wedge \mathcal{A}_M \text{ accetta } w$$



# Esempio

DFA (c) = DFA (a) × DFA (b) (accetta Intersezione)



# Chiusura rispetto alla differenza

**Th. 4.10** Se  $L$  e  $M$  sono linguaggi regolari, allora anche  $L \setminus M$  e' regolare.

**Prova** Osserviamo che  $L \setminus M = L \cap \overline{M}$  e abbiamo gia' visto che i linguaggi regolari sono chiusi sotto il complemento e l'intersezione

- $\overline{M}$  e' regolare per Th. 4.5
- $L \cap \overline{M}$  e' regolare per Th. 4.8



# Chiusura rispetto al reverse

**Th. 4.11** Se  $L$  e' un linguaggio regolare, allora anche  $L^R$  e' regolare.

**Prova 1** Sia  $L$  riconosciuto da un FA  $\mathcal{A}$ . Modifichiamo  $\mathcal{A}$  per renderlo un FA per  $L^R$ :

- Invertiamo tutti gli archi
- $q_0 \rightarrow q_F$  (unico)
- Nuovo stato iniziale  $p_0$  con  $\delta(p_0, \epsilon) = F$

**Prova 2** Sia  $L$  descritto da un'espressione regolare  $E$ .

Dimostriamo che esiste  $E^R$ , tale che  $L(E^R) = (L(E))^R$

Procediamo per induzione strutturale su  $E$ : (base banale)

- $E = F + G$ . Allora  $E^R = F^R + G^R$
- $E = F.G$ . Allora  $E^R = G^R.F^R$
- $E = F^*$ . Allora  $E^R = (F^R)^*$
- 👁 Stringhe in  $E \rightarrow w_1 w_2 \dots w_n$  dove  $w_i \in L(F)$   
Stringhe in  $E^R \rightarrow w_{n-1}^R w_{n-2}^R \dots w_1^R$  dove  $w_i^R \in L(F^R)$   
 $\Rightarrow L(E^R) = L((F^R)^*)$



- Quanto **costa** rispondere alle domande sui linguaggi regolari?
  - 1 Convertire tra diverse rappresentazioni dei linguaggi regolari.
  - 2  $E'L = \emptyset$ ?
  - 3  $E' w \in L$ ?
  - 4 Due descrizioni definiscono lo stesso linguaggio?

- **NFA** → **DFA**
- Supponiamo che un  $\epsilon$ -NFA abbia  $n$  stati
  - Per calcolare  $\text{ECLOSE}(p)$  seguiamo al piu'  $n^2$  archi e lo facciamo per  $n$  stati  
→ quindi in totale sono  $n^3$  passi
  - Il DFA ha  $2^n$  stati, per ogni stato  $S$  e ogni  $a \in \Sigma$  calcoliamo  $\delta_D(S, a)$  in  $n^3$  passi  
→ in totale abbiamo  $O(n^3 2^n)$  passi
  - Se calcoliamo  $\delta$  solo per gli stati raggiungibili, dobbiamo calcolare  $\delta_D(S, a)$  solo  $s$  volte, dove  $s$  è il numero di stati raggiungibili  
→ in totale  $O(n^3 s)$  passi

- **DFA** → **NFA**
  - Dobbiamo solo mettere le parentesi graffe attorno agli stati  
→ totale di  $O(n)$  passi
- **FA** → **RE**
  - Per ogni stato e possibile percorso tra stati calcolare ( $n^3$ ) calcoliamo fino a  $4^n$  elementi (costruzione per cammini)  
→ totale di  $O(n^3 4^n)$
  - LFA puo essere un NFA: se vogliamo convertirlo in DFA, il tempo totale sara' doppiamente esponenziale.
- **RE** → **FA**
  - Possiamo costruire un albero per l'espressione in  $n$  passi
  - Possiamo costruire l'automa in  $n$  passi.
  - Se si vuole ottenere un DFA, eliminare le  $\epsilon$ -transizioni necessita  $O(n^3)$  passi

- $L(A) \neq \emptyset$  per FA  $\mathcal{A}$  se e solo se uno stato finale è raggiungibile dallo stato iniziale in  $\mathcal{A}$   
→ in totale  $O(n^2)$  passi
- Oppure, possiamo guardare un'espressione regolare  $E$  e vedere se  $L(E) = \emptyset$ , considerando tutti i casi:
  - $E = F + G$ . Allora  $L(E) = \emptyset$  e vuoto se e solo se  $L(F) = \emptyset$  e  $L(G) = \emptyset$
  - $E = F.G$ . Allora  $L(E) = \emptyset$  e vuoto se e solo se  $L(F) = \emptyset$  o  $L(G) = \emptyset$
  - $E = F^*$ . Allora  $L(E) \neq \emptyset$  perche'  $\epsilon \in L(E)$
  - $E = \epsilon$ . Allora  $L(E) \neq \emptyset$
  - $E = a$  Allora  $L(E) \neq \emptyset$
  - $E = \emptyset$ . Allora  $L(E) = \emptyset$

- Per controllare se  $w \in L(\mathcal{A})$  per DFA  $\mathcal{A}$ , simuliamo  $\mathcal{A}$  su  $w$ ,
  - Se  $|w| = n$  richiede  $O(n)$  passi
- Se  $\mathcal{A}$  è un NFA
  - Se ha  $s$  stati, simulare  $\mathcal{A}$  su  $w$  richiede  $O(ns^2)$  passi
- Se  $\mathcal{A}$  è un  $\epsilon$ -NFA
  - Se ha  $s$  stati, simulare  $\mathcal{A}$  su  $w$  richiede  $O(ns^3)$  passi
- Se  $L = L(E)$ , per l'espressione regolare  $E$  di lunghezza  $s$ 
  - Convertiamo  $E$  in un  $\epsilon$ -NFA  $\mathcal{A}$  con  $2s$  stati
  - Poi simuliamo  $\mathcal{A}$  su  $w$  in  $O(ns^3)$  passi