Automi e Linguaggi Formali

Proprieta' dei linguaggi regolari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

A.A. 2014-2015
Enrico Mezzetti
emezzett@math.unipd.it

Proprieta' dei linguaggi regolari

- **Pumping Lemma**
  - Ogni linguaggio regolare soddisfa il pumping lemma
  - Se L non e' regolare il pumping lemma mostrera' una contraddizione
- **Proprieta' di chiusura**
  - Costruire automi da componenti usando delle operazioni algebriche sui linguaggi
  - E.g., dati L e M possiamo costruire un automa per $L \cap M$
- **Proprieta' di decisione**
  - Analisi computazionale degli automi
  - Quanto costa controllare proprieta' sugli automi
- **Tecniche di minimizzazione**
  - Risparmiare costruendo automi piu piccoli
  - Processo di semplificazione

Proprieta' di chiusura dei linguaggi regolari

- Siano L e M due linguaggi regolari $\Rightarrow$ e' regolare anche:
  - Unione: $L \cup M$
  - Intersezione: $L \cap M$
  - Complemento: $\overline{N}$
  - Differenza: $L \setminus M$
  - Inversione: $L^R = \{w^R : wL\}$
  - Chiusura: L^*
  - Concatenazione: $L.M$
- **Chiusura** $\rightarrow$ classe dei LR e' chiusa
  - Rispetto ad un insieme di operazioni

Chiusura rispetto a unione e complemento

Th. 4.4 Per ogni coppia di linguaggi regolari L e M, $L \cup M$ e' regolare.

Prova Sia $L = L(\mathtt{E})$ e $M = L(\mathtt{F})$.
Allora $L \cup M = L(\mathtt{E} + \mathtt{F})$ per definizione di $+$ in $\mathtt{RE}$.

Th. 4.5 Se L e' un linguaggio regolare su Σ, allora anche $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ e' regolare.

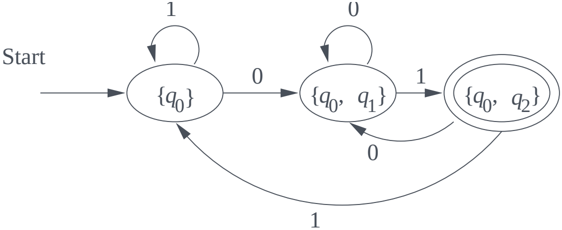
Prova Sia L riconosciuto da un DFA

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

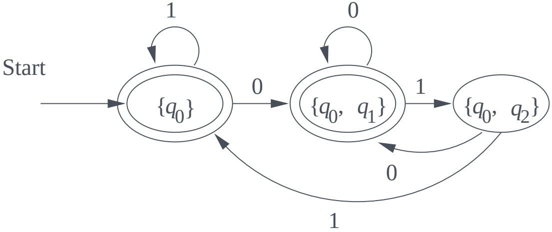
Allora $L(\mathcal{B}) = \overline{L}$ dove

$$\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

- Sia L riconosciuto dal DFA $\mathcal{A}$ – $L(\mathcal{A} = ((\mathbf{0} + \mathbf{1}) * \mathbf{01})$



- Allora $\overline{L}$ e' riconosciuto dal DFA $\overline{\mathcal{A}}$



Chiusura rispetto all'intersezione

Th. 4.8 Se L e M sono regolari, allora anche $L \cap M$ e' regolare.

Prova 1 Per la legge di De Morgan, $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$.
Sappiamo gia' (Th. 4.4-4.5) che i linguaggi regolari sono chiusi sotto il complemento e l'unione.

Leggi di De Morgan

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \longrightarrow \quad (A \cap B) = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Chiusura rispetto all'intersezione - 2

Th. 4.8 Se L e M sono regolari, allora anche $L \cap M$ e' regolare.

Prova 2 Sia L il linguaggio di

$$\mathcal{A}_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$$

e M il linguaggio di

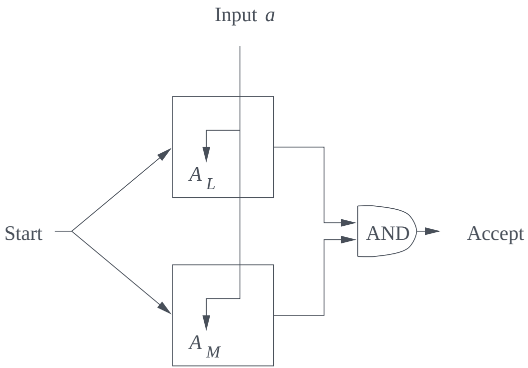
$$\mathcal{A}_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$$

- Assumiamo che $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M$ siano DFA
  (senza perdita di generalita')

Costruiamo un automa che *"simula"* $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M$ in parallelo
Accetta w se e solo se sia $\mathcal{A}_L$ sia $\mathcal{A}_M$ accettano w

Chiusura rispetto all'intersezione - 3

- Se $\mathcal{A}_L$ va dallo stato $p \to s$ leggendo a, e
  $\mathcal{A}_M$ va dallo stato $q \to t$ leggendo a allora
  $\mathcal{A}_{L \cap M}$ va dallo stato $(p, q) \to (s, t)$ leggendo a



Chiusura rispetto all'intersezione - 3

- Formalmente

$$\mathcal{A}_{L\cap M} = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta_{L\cap M}, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

dove

$$\delta_{L\cap M}((p,q),a) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$$

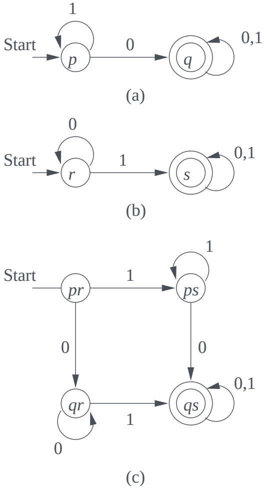
Si dimostra per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_{L\cap M}((q_L,q_M),w) = \left(\hat{\delta}_L(q_L,w), \hat{\delta}_M(q_M,w)\right)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{L\cap M}$ accetta $w \iff \mathcal{A}_L$ accetta $w \wedge \mathcal{A}_M$ accetta w

Esempio

- DFA (c)= DFA (a) $\times$ DFA (b) *(accetta Intersezione)*



Chiusura rispetto alla differenza

Th. 4.10 Se L e M sono linguaggi regolari, allora anche $L \setminus M$ e' regolare.

Prova Osserviamo che $L \setminus M = L \cap \overline{M}$ e abbiamo gia' visto che i linguaggi regolari sono chiusi sotto il complemento e l'intersezione

- $\overline{M}$ e' regolare per Th. 4.5
- $L \cap \overline{M}$ e' regolare per Th. 4.8

Chiusura rispetto al reverse

Th. 4.11 Se L e' un linguaggio regolare, allora anche L^R e' regolare.

Prova 1 Sia L riconosciuto da un FA $\mathcal{A}$. Modifichiamo $\mathcal{A}$ per renderlo un FA per L^R:

- Invertiamo tutti gli archi
- $q_0 \to q_F$ (unico)
- Nuovo stato iniziale p_0 con $\delta(p_0, \epsilon) = F$

Prova 2 Sia L descritto da un'espressione regolare $\mathtt{E}$.
Dimostriamo che esiste $\mathtt{E}^{\mathtt{R}}$, tale che $\mathtt{L}(\mathtt{E}^{\mathtt{R}}) = (\mathtt{L}(\mathtt{E}))^{\mathtt{R}}$
Procediamo per induzione strutturale su $\mathtt{E}$: (base banale)

- $\mathtt{E} = \mathtt{F} + \mathtt{G}$. Allora $\mathtt{E}^{\mathtt{R}} = \mathtt{F}^{\mathtt{R}} + \mathtt{G}^{\mathtt{R}}$
- $\mathtt{E} = \mathtt{F}.\mathtt{G}$. Allora $\mathtt{E}^{\mathtt{R}} = \mathtt{G}^{\mathtt{R}}.\mathtt{F}^{\mathtt{R}}$
- $\mathtt{E} = \mathtt{F}^*$. Allora $\mathtt{E}^{\mathtt{R}} = (\mathtt{F}^{\mathtt{R}})^*$

Stringhe in $\mathtt{E} \to w_1 w_2 \cdots w_n$ dove $w_i \in L(\mathtt{F})$
Stringhe in $\mathtt{E}^{\mathtt{R}} \to w_{n-1}^R w_{n-2}^R \cdots w_1^R$ dove $w_i^R \in L(\mathtt{F}^{\mathtt{R}})$
$\Rightarrow L(\mathtt{E}^{\mathtt{R}}) = L((\mathtt{F}^{\mathtt{R}})^*)$

Proprieta' di decisione

- Quanto costa rispondere alle domande sui linguaggi regolari?
  1. Convertire tra diverse rappresentazioni dei linguaggi regolari.
  2. E'$L = \emptyset$?
  3. E' $w \in L$?
  4. Due descrizioni definiscono lo stesso linguaggio?

Conversioni

- **NFA $\rightarrow$ DFA**
- Supponiamo che un ϵ-NFA abbia n stati
  - Per calcolare ECLOSE(p) seguiamo al piu' n^2 archi e lo facciamo per n stati
    $\rightarrow$ quindi in totale sono n^3 passi
  - Il DFA ha 2^n stati, per ogni stato S e ogni $a \in \Sigma$ calcoliamo $\delta_D(S, a)$ in n^3 passi
    $\rightarrow$ in totale abbiamo $O(n^3 2^n)$ passi
  - Se calcoliamo δ solo per gli stati raggiungibili, dobbiamo calcolare $\delta_D(S, a)$ solo s volte, dove s e il numero di stati raggiungibili
    $\rightarrow$ in totale $O(n^3 s)$ passi

Conversioni - 2

- **DFA $\rightarrow$ NFA**
  - Dobbiamo solo mettere le parentesi graffe attorno agli stati $\rightarrow$ totale di $O(n)$ passi
- **FA $\rightarrow$ RE**
  - Per ogni stato e possibile percorso tra stati calcolare (n^3) calcoliamo fino a 4^n elementi (costruzione per cammini) $\rightarrow$ totale di $O(n^3 4^n)$
  - LFA puo essere un NFA: se vogliamo convertilo in DFA, il tempo totale sara' doppiamente esponenziale.
- **RE $\rightarrow$ FA**
  - Possiamo costruire un albero per l'espressione in n passi
  - Possiamo costruire l'automa in n passi.
  - Se si vuole ottenere un DFA, eliminare le ϵ-transizioni necessita $O(n^3)$ passi

Controllare se $L = \emptyset$

- $L(A) \neq \emptyset$ per FA $\mathcal{A}$ se e solo se uno stato finale e raggiungibile dallo stato iniziale in $\mathcal{A}$
  $\rightarrow$ in totale $O(n^2)$ passi
- Oppure, possiamo guardare un'espressione regolare $\mathtt{E}$ e vedere se $L(\mathtt{E}) = \emptyset$, considerando tutti i casi:
  - $\mathtt{E = F + G}$. Allora $L(\mathtt{E}) = \emptyset$ e vuoto se e solo se $L(\mathtt{F}) = \emptyset$ e $L(\mathtt{G}) = \emptyset$
  - $\mathtt{E = F.G}$. Allora $L(\mathtt{E}) = \emptyset$ e vuoto se e solo se $L(\mathtt{F}) = \emptyset$ o $L(\mathtt{G}) = \emptyset$
  - $\mathtt{E} = \mathtt{F}^*$. Allora $L(\mathtt{E}) \neq \emptyset$ perche' $\epsilon \in L(\mathtt{E})$
  - $\mathtt{E} = \epsilon$. Allora $L(\mathtt{E}) \neq \emptyset$
  - $\mathtt{E} = \mathbf{a}$ Allora $L(\mathtt{E}) \neq \emptyset$
  - $\mathtt{E} = \emptyset$. Allora $L(\mathtt{E}) = \emptyset$

Controllare $w \in L$

- Per controllare se $w \in L(\mathcal{A})$ per DFA $\mathcal{A}$, simuliamo $\mathcal{A}$ su w,
  - Se $|w| = n$ richiede $O(n)$ passi
- Se $\mathcal{A}$ e un NFA
  - Se ha s stati, simulare $\mathcal{A}$ su w richiede $O(ns^2)$ passi
- Se $\mathcal{A}$ e un ϵ-NFA
  - Se ha s stati, simulare $\mathcal{A}$ su w richiede $O(ns^3)$ passi
- Se $L = L(\mathtt{E})$, per lespressione regolare $\mathtt{E}$ di lunghezza s
  - Convertiamo $\mathtt{E}$ in un ϵ-NFA $\mathcal{A}$ con $2s$ stati
  - Poi simuliamo $\mathcal{A}$ su w in $O(ns^3)$ passi