Automi e Linguaggi Formali

Proprieta' dei linguaggi regolari
– Il Pumping lemma –

Università degli Studi di Padova

A.A. 2014-2015
Enrico Mezzetti
emezzett@math.unipd.it

Proprieta' dei linguaggi regolari

- **Pumping Lemma**
  - Ogni linguaggio regolare soddisfa il pumping lemma
  - Se L non e' regolare il pumping lemma mostrera' una contraddizione
- **Proprieta' di chiusura**
  - Costruire automi da componenti usando delle operazioni algebriche sui linguaggi
  - E.g., dati L e M possiamo costruire un automa per $L \cap M$
- **Proprieta' di decisione**
  - Analisi computazionale degli automi
  - Quanto costa controllare proprieta sugli automi
- **Tecniche di minimizzazione**
  - Risparmiare costruendo automi piu piccoli
  - Processo di semplificazione

Pumping lemma - Informale

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ sia **regolare**
  - 01, 0011, 000111, ...
- Se L_{01} e' regolare $\Rightarrow$ deve essere accettato da un DFA $\mathcal{A}$
  - $Q_{\mathcal{A}}$ e' un insieme *finito* di stati k
- Supponiamo che A legga 0^k attraverso le traniszioni

$$p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \cdots \xrightarrow{0} p_k$$

$$\epsilon \qquad 0 \qquad 00 \qquad\qquad 0^k$$

  - Utilizzando $k+1$ stati
  - *Pigeonhole principle* $\Rightarrow \exists i < j : p_i = p_j$
- Quindi $\exists q$ che accomoda due sottosequenze $0^i \neq 0^j$ per $i < j$

Pumping lemma - Informale - 2

- Quindi $\exists q$ che accomoda due sottosequenze $0^i \neq 0^j$ per $i < j$
- Supponiamo di essere in q
  - Abbiamo letto i o j occorrenze di 0

$$\begin{array}{cccc} p_0 \xrightarrow{0} & p_1 \xrightarrow{0} & p_2 \cdots \xrightarrow{0} & p_i \\ \epsilon & 0 & 00 & 0^i \vee 0^j \end{array}$$

- $\mathcal{A}$ puo' essere idnotto a prndere una decisione errata:
  - Se $\hat{\delta}(q, 1^i) \in F$ l'automa accetta $0^j 1^i \rightarrow$ Errore!
  - Se $\hat{\delta}(q, 1^i) \notin F$ l'automa non accetta $0^i 1^i \rightarrow$ Errore!
- L_{01} non puo' essere rappresnetato da un DFA $\mathcal{A}$

$\Rightarrow$ L_{01} **non e' regolare**

Pumping lemma per LR

Th. 4.1 **Pumping lemma**

Sia L un linguaggio regolare allora $\exists$ n constante (per L) tale che $\forall w \in L$ per cui $|w| \geq n$ possiamo scomporre in tre sotto-stringhe $w = xyz$ tale che:

1. $y \neq \epsilon$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0$, $xy^k z \in L$

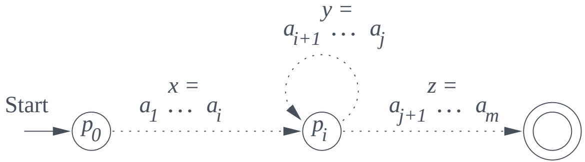
Possiamo trovare una sotto-stringa non vuota (non troppo lontano dall'inizio) che puo' essere replicata un numero indeifnito di volte senza uscire da L

Pumping lemma per LR (Prova)

- Supponiamo che L sia regolare
  - $L = L(\mathcal{A})$: L e' riconosciuto da un DFA $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}$ ha un numero finito di n stati
- Sia $w = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ $\qquad m \geq n$ e $a_i \in \Sigma_{\mathcal{A}}$
- Sia $p_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 a_2 \dots a_i)$
  - p_i per $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ non possono essere distiniti
  - *Pigeonhole principle* $\Rightarrow \exists i < j : p_i = p_j$

Pumping lemma per LR (Prova) - 2

- Scomponiamo $w = xyz$ come
  1. $x = a_1 a_2 \cdots a_i$
  2. $y = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$
  3. $z = a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_m$



- $\mathcal{A}$ riceve in input $xy^k z$ per $k \geq 0$
  - K=0 $\rightarrow$ $\mathcal{A}$ accetta xz poiche' $p_i = p_j$
  - K>0 $\rightarrow$ $\mathcal{A}$ accetta xz poiche' cicla su p_i k volte
- Quindi anche $xy^k z \in L$, per ogni $k \geq 0$

x,y potenzialmente ϵ per i=0 e j=n=m rispettivamente

Pumping lemma per LR - Esempio

- Sia L_{eq} il linguaggio delle stringhe con ugual numero di 0 e 1
  - Nessun vincolo su ordine
- Supponiamo che L_{eq} sia regolare
  - Scegliamo $w = 0^n 1^n \in L_{eq}$ ($|w| \geq n$)
- Per il pumping lemma $w = xyz$ e:
  - $|xy| \leq n$
  - $y \neq \epsilon$
  - $xy^k z \in L_{eq}$
- Quindi xy e' composta di soli 0

$$w = \underbrace{000\cdots}_{x}\underbrace{\cdots 0}_{y}\underbrace{0111\cdots 11}_{z}$$

- Scegliamo $k = 0$
- Per PL: se L_{eq} regolare allora anche $xz \in L_{eq}$
  - xz contiene almeno uno 0 in meno del dovuto! (mancano quelli di y)

$\Rightarrow$ L_{eq} **non e' regolare**

Pumping lemma per LR - Esempio 2

- Sia L_{pr} il linguaggio delle stringhe composte da un numero p di 1, dove p e' *primo*
  - $L_{pr} = \{1^p : p \text{ e' primo}\}$
- Supponiamo sia regolare:
  - Esiste n che soddisfa le condizioni del PL
  - Scegliamo $w = 1^p$ dove $p \geq n + 2$

$$w = \overbrace{\underbrace{111\cdots}_{x}\underbrace{\cdots 1}_{\substack{y \\ |y|=m}}\underbrace{1111\cdots 11}_{z}}^{p}$$

- Supponiamo $|y| = m \neq \epsilon \rightarrow |xz| = p - m$
- Ora scegliamo $k = p - m$
- Se L_{pr} e' regolare allora anche $xy^{p-m}z \in L_{pr}$

Pumping lemma per LR - Esempio 2

- Sia L_{pr} il linguaggio delle stringhe composte da un numero p di 1, dove p e' *primo*

$$w = \overbrace{\underbrace{111\cdots}_{x}\;\underbrace{\cdots 1}_{\substack{y\\|y|=m}}\;\underbrace{1111\cdots 11}_{z}}^{p}$$

- Abbiamo scelto $k = p - m$
  - $xy^{p-m}z \in L_{pr}$?
  - $$\begin{aligned}|xy^{p-m}z| &= |xz| + (p-m)|y| \\ &= p - m + (p-m)m \\ &= (1+m)(p-m)\end{aligned}$$

    (che non e' primo a meno che uno dei due fattori non sia 1)

    a) $y \neq \epsilon \Rightarrow 1 + m > 1$
    b) $m = |y| \leq |xy| \leq n, p \geq n+2 \Rightarrow p - m \geq n + 2 - n = 2$

$\Rightarrow$ L_{pr} **non e' regolare**