Automi e Linguaggi Formali

Proprieta' dei linguaggi liberi da contesto

A.A. 2014-2015
Enrico Mezzetti
emezzett@math.unipd.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Proprieta' dei linguaggi liberi da contesto

- **Semplificazione**
  - CFG possono essere semplificate
  - Se L e' CFL allora la sua grammatica ha una forma speciale
- **Pumping Lemma per i CFL**
  - Simile al lemma per i LR
  - Se L non e' CFL il pumping lemma mostrera' una contraddizione
- **Proprieta' di chiusura**
  - Alcune proprieta' di chiusura di LR valgono anche per CFL
- **Proprieta' di decisione**
  - Controllare alcune proprieta': e.g., $w \in L$ e $L = \emptyset$
  - Equivalenza *non e' decidibile*

Semplificazione e forme normali

- Ogni CFL (senza ε) e' generato da una CFG dove tutte le produzioni sono della forma

$$A \rightarrow BC \text{ oppure } A \rightarrow a$$

dove A, B, e C sono variabili, e a e un simbolo terminale

- **Forma normale di Chomsky** (CNF)
- Semplificazionni preliminari per ottenerla
  - Eliminare i *simboli inutili*, che non appaiono in nessuna derivazione $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
  - Eliminare le *ε-produzioni*, della forma $A \rightarrow \varepsilon$
  - Eliminare le *produzioni unitarie*, della forma $A \rightarrow B$, dove A e B sono variabili
  - Eliminare le produzioni con piu di due non-terminali come corpo

Esempi di semplificazione preliminare

- **Simboli inutili**

$$\begin{array}{l} S \to AB|a \\ A \to b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} S \to \cancel{AB}|a \\ \cancel{A \to b} \end{array} \Rightarrow S \to a$$

- **ε-produzioni** $[L(G) \to L(G) - \{\varepsilon\}]$

$$\begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aAA|\varepsilon \\ B \to bBB|\varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aAA|\cancel{\varepsilon} \\ B \to bBB|\cancel{\varepsilon} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} S \to AB|A|B \\ A \to aAA|aA|a \\ B \to bBB|bB|b \end{array}$$

- **Produzioni unitarie**

$$\begin{array}{l} I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ F \to I|(E) \\ T \to F|T \times F \\ E \to T|E + T \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ F \to \cancel{I}|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ T \to \cancel{F}|T \times F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \\ E \to \cancel{T}|E + T|T \times F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1 \end{array}$$

Esempio di CNF

- Produzioni della forma $A \to BC$ oppure $A \to a$
- Consideriamo la CFG delle espressioni "*semplificata*"

$$
\begin{aligned}
E &\to E + T | T \times F | (E) | a | b | Ia | Ib | I0 | I1 \\
T &\to T \times F | (E) | a | b | Ia | Ib | I0 | I1 \\
F &\to (E) | a | b | Ia | Ib | I0 | I1 \\
I &\to a | b | Ia | Ib | I0 | I1
\end{aligned}
$$

- Aggiungiamo le produzioni sui terminali

$$
\begin{gathered}
A \to a, B \to b, Z \to 0, U \to 1 \\
P \to +, M \to \times, S \to (, D \to)
\end{gathered}
$$

- Otteniamo la grammatica

$$
\begin{aligned}
E &\to EPT | TMF | SED | A | B | IA | IB | IZ | IU \\
T &\to TMF | SED | A | B | IA | IB | IZ | IU \\
F &\to SED | A | B | IA | IB | IZ | IU \\
I &\to A | B | IA | IB | IZ | IU \\
&A \to a, B \to b, Z \to 0, U \to 1 \\
&P \to +, M \to \times, S \to (, D \to)
\end{aligned}
$$

Esempio di CNF - 2

- Produzioni della forma $A \to BC$ oppure $A \to a$
- Eliminazione corpi con piu' di due non-terminali
  - $E \to \; EPT \Rightarrow E \to EC_1, \; C_1 \to PT$
  - $E \vee T \to \; TMF \Rightarrow E \vee T \to \; TC_2, C_2 \to MF$
  - $E \vee T \vee F \to \; SED \Rightarrow E \vee T \vee F \to \; LC_3, C_3 \to ER$
- Otteniamo la grammatica

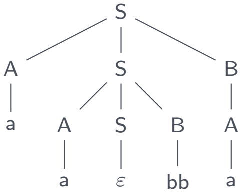
$$
\begin{aligned}
E &\to \; EC_1|TC_2|SC_3|A|B|IA|IB|IZ|IU \\
T &\to \; TC_2|SC_3|A|B|IA|IB|IZ|IU \\
F &\to \; SC_3|A|B|IA|IB|IZ|IU \\
I &\to \; A|B|IA|IB|IZ|IU \\
A &\to a, b \to b, Z \to 0, U \to 1 \\
P &\to +, M \to \times, S \to (, D \to) \\
C_1 &\to PT, C_2 \to MF, C_3 \to ED
\end{aligned}
$$

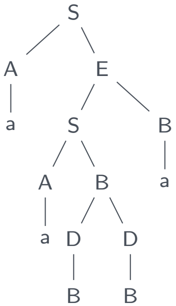
Proprieta' CNF

- Grammatiche CNF producono solo *alberi binari*
- Esempio

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASB \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow aAS \mid a \\ B &\rightarrow SbS \mid A \mid bb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AE \mid AB \\ A &\rightarrow CF \mid CA \mid a \\ B &\rightarrow SG \mid DS \mid SD \mid b \mid CF \mid CA \mid a \mid DD \\ C &\rightarrow a \quad D \rightarrow b \\ E &\rightarrow SB \quad F \rightarrow AS \quad G \rightarrow DS \end{aligned}$$





Proprieta' CNF - 2

Th.7.17: Dato un albero sintattico con prodotto w conforme ad una grammatica CFG G in CNF, se l'altezza dell'albero e' n, allora $|w| \leq 2^{n-1}$.

Prova: Per induzione sull'altezza n dell'albero.

n=1 Albero costituito da un'unica produzione del tipo $A \rightarrow a$
- $|w| = 1 \leq 2^0 = 1$

n>1 $n > 1 \Rightarrow$ la radice usa un produzione del tipo $A \rightarrow BC$
- Nessun cammino nei sottoalberi B, C puo' avere altezza maggiore di $n-1$
- Per ipotesi induttiva i prodotti dei sotto-alberi w_B e w_C hanno lunghezza $\leq 2^{(n-1)-1} = 2^{n-2}$
- $|w| = |w_B + w_C \leq 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$

Pumping lemma per CFL

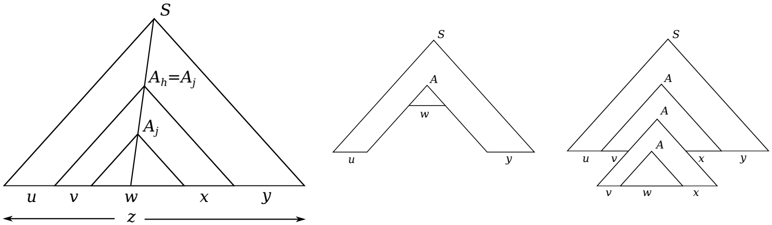
- **Informalmente** In ogni stringa sufficientemente lunga di un CFL si possono trovare due sottostringhe vicine che e possibile eliminare o ripetere (insieme), ottenendo sempre stringhe del linguaggio
- **Formalmente** Sia L un CFL. Esiste una costante n tale che, se $z \in L$ e $|z| \geq n$, possiamo scrivere $z = uvwxy$ con le seguenti condizioni
  1. $|vwx| \leq n$
  2. $vx \neq \varepsilon$
  3. $\forall i \geq 0, \quad uv^i wx^i y \in L$

Informalmente

- Se la stringa w e'sufficientemente lunga, l'albero sintattico che produce $w = uvwxy$ ha un simbolo non terminale che si ripete in un cammino dalla radice ad una foglia. Supponiamo $A_i = A_j$
- Individuiamo il sottoalbero con radice A_j e chiamiamo w il suo prodotto
- Individuiamo il sottoalbero con radice A_i e chiamiamo vwx il suo prodotto
- Poiche' $A_i = A_j$ possiamo rimpiazzare il sottoalbero di A_i con quello di A_j, ottenendo quindi uwy , che deve ancora appartenere a L.
- Oppure possiamo rimpiazzare il sottoalbero di A_j con quello di A_i, ottenendo $uvvwxxy$, ancora generata da L.

Prova sketch

- Consideriamo una grammatica in CNF G per L
  - Supponiamo che G abbia m variabili e scelgiamo $n = 2m$
  - Per proprieta' CNF: albero con cammino lungo m (una occorrenza per variabile) ha prodotto di lunghezza 2^{m-1}
  - Ma $|z| = 2^m \Rightarrow$ cammino di lunghezza $\geq m + 1$
  - Esistono almeno due derivazioni di una stessa variabile (sottoalbero)



Esempio

- Consideriamo $L = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\}$
- Dato un n generico, scegliamo $z = 0^n 1^n 2^n$
- Per qualunque scomposizione di z in $uvwxy$, con $|vwx| \leq n$ e $vx \neq \varepsilon$, vwx non puo contenere sia 0 che 2
  - Ultimo 0 e primo 2 sono lontani $n + 1$ posti
- Per casi:
  - vwx non contiene 2 $\Rightarrow$ vx ha solo 0 e 1
    $uwy \notin L$ dato che ha n 2, ma meno di n 0 o 1
  - vwx non contiene 0 $\Rightarrow$ Analogo

Altri esempi

- I CFL non sanno abbinare coppie con lo stesso numero di simboli, se le coppie sono intrecciate
  - E.g., $L = \{0^i 1^j 2^i 3^j | i, j \geq 1\}$
  - Dato n, scegliamo $z = 0^n 1^n 2^n 3^n$ Quindi vwx contiene un solo simbolo o due simboli. In ogni caso, le stringhe generate non sono in L.

- I CFL non sanno abbinare due stringhe di lunghezza arbitraria, se sono su un alfabeto di piu di un simbolo
  - E.g., $L = \{ww | w \in \{0, 1\}^*\}$
  - Dato n, scegliamo $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$.
    Comunque la scomponiamo, non otteniamo stringhe in L.

✎ Altri esempi...

Proprieta' di chiusura dei CFL

Th.7.24: I CFL sono chiusi sotto *unione*, *concatenazione*, *chiusura di Kleene* e *chiusura positiva* $(+)$

Prova: E' sufficiente operare sulle grammatiche:

- per lunione: $S \rightarrow A|B$
- per la concatenazione: $S \rightarrow AB$
- per la chiusura di Kleene: $S \rightarrow SA|\varepsilon$
- per la chiusura positiva: $S \rightarrow SA|A$

Chiusura rispetto all'inversione

Th.: Se L e CF, allora lo e anche anche L^R

Prova: Poiche' L CF, allora sara' generato da $G = (V, T, P, S)$.

- Costruiamo $G^R = (V, T, P^R, S)$ dove

$$P^R = \{A \to \alpha^R : A \to \alpha \in P\}$$

- Si puo' dimostrare per induzione sulla lunghezza delle derivazioni in G e in G^R che $(L(G))^R = L(G^R)$

Chiusura rispetto all'intersezione

- I CFL <u>non sono chiusi</u> sotto l'intersezione
- Sia $L_1 = \{0^n 1^n 2^i : n \geq 1, i \geq 1\}$ CFL con grammatica

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow 0A1|01$$
$$B \rightarrow 2B|2$$

- Sia $L_2 = \{0^i 1^n 2^n : n \geq 1, i \geq 1\}$ CFL con grammatica

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow 0A|0$$
$$B \rightarrow 12B|12$$

- $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 1\}$ non e' CF.

Intersezione tra CFL e linguaggi regolari

Th.7.27: Se L e' CF, e R e' regolare, allora $L \cap R$ e' CF

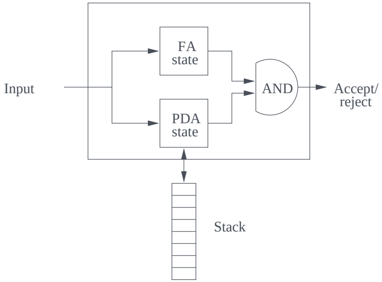
Prova: Sia L accettato dal PDA

$$P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_P, Z_0, F_P)$$

per stato finale e R sia accettato dal FA

$$A = (Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_A, q_A, F_A)$$

- Costruiamo un PDA per $L \cap R$



Intersezione tra CFL e linguaggi regolari - 2

- Formalmente

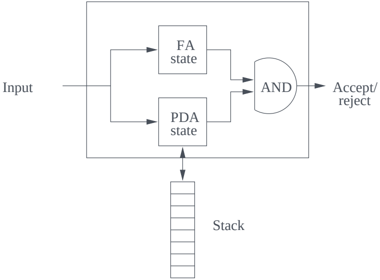
$$P' = (Q_P \times Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta_P, (q_P, q_A), Z_0, (F_P \times F_A))$$

dove

$$\delta((q,p),a,X) = \{((r, \hat{\delta}_A(p,a)), \gamma) : (r,\gamma) \in \delta_P(q,a,X)\}$$

- Per induzione su $\overset{*}{\vdash}$ si prova che

In P $(q_P, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \gamma) \iff ((q_P, q_A), w, Z_0) \overset{*}{\vdash} ((q, \hat{\delta}(p_A, w)), \varepsilon, \gamma)$ In P'



Differenza e complemento tra CFL e LR

Th.7.29: Siano L, L_1, L_2 CFL e R regolare

1. $L \setminus R$ e' CF
2. $\overline{L}$ non e' necessariamente CF
3. $L_1 \setminus L_2$ non e' necessariamente CF

Prova:

(1) $L \setminus R = L \cap \overline{R}$ e sappiamo che $\overline{R}$ e' regolare e che $L \cap \overline{R}$ e' regolare per Th.7.27

(2) Se L fosse CF allora

- $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ sarebbe CF
- ma $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ che non e' CF (vedi esempio)

(3) Σ^* e' CFL per ogni alfabeto Σ e quindi anche $\Sigma^* \setminus L = \overline{L}$ sarebbe CFL, in contraddizione con punto 2

Problemi indecidibili per CFL

- Non esiste un algoritmo in grado di decidere i seguenti problemi
  - Verificare che una CFG e' ambigua
  - Verificare che un CFL e' inerentemente ambiguo
  - Verificare che l'intersezione di due CFL e' vuota
  - Verificare che due CFL sono uguali
  - Verificare che un CFL e' uguale a Σ^*