

(1) Data una successione $(x_n)_n$ di numeri reali si supponga che valga

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

È possibile concludere che x_n converge?

Si supponga ora che anziché (A) valga

- (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (ax_n^2 + bx_n + c) = l \in \mathbb{R}$.

È possibile concludere che x_n converge?

E se valgono entrambe?

Soluzioni

(1) Ad esempio $x_n = \sqrt{n}$ soddisfa (A), ma non converge.

Nel secondo caso se $a = 1, b = 2, c = 1$, ad esempio, si ha che

$$ax_n^2 + bx_n + c = (x_n + 1)^2.$$

Per cui se $(x_n + 1)^2$ converge ad $l > 0$ si potrebbe avere che

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{l} - 1 & n \text{ pari} \\ -\sqrt{l} - 1 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

e quindi nemmeno la seconda condizione assicura la convergenza.

Se supponiamo vere sia (A) che (B) si ha:

$$ax_n^2 + bx_n + c = a\left(x_n + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \rightarrow_n l.$$

Per cui

$$\left|x_n + \frac{b}{2a}\right| \rightarrow \sqrt{\frac{1}{a}\left[l + \frac{b^2}{4a} - c\right]}.$$

Usando (A) si conclude.