

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di
Analisi Matematica I

Angela Albanese, Diego Pallara

a.a. 2006/07

PREFAZIONE

Nel presente fascicolo sono raccolte le nozioni di Analisi matematica presentate nel corso di Analisi Matematica I del primo anno di Ingegneria.

In un altro fascicolo sono raccolte le nozioni presentate nel corso di Analisi Matematica II.

Il pochissimo tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento della materia non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili.

Riteniamo però imprescindibile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obbiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi, e rifuggendo da espressioni vaghe o poco chiare. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni. Lo stile degli appunti è volutamente scarno ed avaro di commenti e divagazioni, che restano affidati all'esposizione orale in aula; suggeriamo agli studenti, pertanto, di limitarsi ad appuntare, durante le lezioni, solo le parti meno formali delle lezioni stesse, affidandosi a questa dispensa per gli enunciati che richiedono maggior rigore.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Infine, ringraziamo il collega Raffaele Vitolo per averci fornito il file di stile LATEX usato per la compilazione delle dispense, e dichiariamo in anticipo la nostra gratitudine a tutti i lettori che ci segnaleranno ogni osservazione utile a migliorare il testo.

INDICE

1	Numeri reali e complessi	5
1.1	L'insieme dei numeri reali	5
1.2	Funzioni elementari	11
1.2.a	Generalità sulle funzioni	12
1.2.b	Funzioni reali di una variabile	13
1.2.c	Funzioni elementari	14
1.3	Numeri complessi	20
2	Successioni	25
2.1	Limiti di successioni reali	25
2.2	Principio di induzione	34
2.3	Limiti notevoli	38
3	Serie numeriche	42
3.1	Serie, convergenza, convergenza assoluta	42
3.2	Serie a termini positivi	46
3.3	Serie a termini di segno variabile	54
4	Limiti e Continuità	58
4.1	Limiti di funzioni	58
4.2	Limite destro e limite sinistro	67
4.3	Limiti notevoli	69
4.4	Funzioni continue	70
4.5	Proprietà globali delle funzioni continue	73
5	Calcolo differenziale	78
5.1	Derivate di una funzione	78
5.2	Proprietà delle funzioni derivabili	87
5.3	Funzioni convesse e concave	95
5.4	Formula di Taylor	98
5.5	Grafici di funzioni	106

6	Calcolo integrale	108
6.1	Funzioni integrabili secondo Riemann	109
6.2	Teorema fondamentale del calcolo e integrali indefiniti	116
6.3	Metodi d'integrazione	120
6.4	Integrali impropri	123

CAPITOLO 1

NUMERI REALI E COMPLESSI

1.1 L'insieme dei numeri reali

L'ambiente in cui si svolgerà la nostra trattazione è quello dei numeri *reali*. Diamo per note le definizioni e le proprietà dei numeri *naturali*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, dei numeri *interi*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ e dei numeri *razionali*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{Q} = \{p/q : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, q \neq 0\}$. Una definizione costruttiva dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, pur possibile, non è altrettanto immediata, ed in effetti non la daremo in queste note, rinviando ai libri di testo. È essenziale però impadronirsi delle proprietà dell'insieme dei numeri reali, che esprimeremo in forma assiomatica. La costruzione di $\mathbf{R}$ ha il ruolo (fondamentale) di provare che un insieme che gode delle proprietà elencate esiste nell'ambito delle usuali teorie insiemistiche.

Assiomi dei numeri reali.

Assumiamo che esista un insieme $\mathbf{R}$ dotato di due *operazioni binarie*, dette *addizione* e *moltiplicazione* e denotate rispettivamente $+$ e $\cdot$, e della *relazione d'ordine* di “maggiore od uguale”, denotata $\geq$; chiamiamo gli elementi di tale insieme *numeri reali*, e assumiamo che valgano le seguenti proprietà, per ogni scelta di $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Assiomi di campo.

Assioma 1. (Proprietà associative) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Assioma 2. (Proprietà commutative) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Assioma 3. (Proprietà distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Assioma 4. (Elementi neutri) Esistono due numeri reali, denotati 0 e 1 , che agiscono come *elementi neutri* rispettivamente dell'addizione e della moltiplicazione, cioè che verificano le uguaglianze: $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Assioma 5. (Opposto) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $a + b = 0$; tale numero si dice *opposto* di a e si denota $-a$.

Assioma 6. (Inverso) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $a \cdot b = 1$; tale numero si dice *inverso* di a e si denota a^{-1} .

Assiomi dell'ordine.

Assioma 7. Per ogni coppia di numeri reali a, b , o vale $a \geq b$ oppure $b \geq a$.

Assioma 8. Se valgono contemporaneamente $a \geq b$ e $b \geq a$ allora $a = b$.

Assioma 9. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora $a + b \geq 0$ e $a \cdot b \geq 0$.

Gli assiomi elencati fin qui contengono, in forma rigorosa e concisa, delle proprietà dei numeri che sono già familiari; da esse si possono dedurre in modo sistematico tutte le proprietà note (per esempio, l'unicità degli elementi neutri) e le usuali regole algebriche e del calcolo letterale (semplificazioni, passaggio da un membro all'altro nelle uguaglianze e nelle disequaglianze, eccetera). Non procederemo in questo modo, ritenendo che queste regole siano già note. Osserviamo che i primi sei assiomi sono di contenuto puramente algebrico e riguardano le operazioni di somma e moltiplicazione, mentre il 7 e l'8 riguardano la relazione d'ordine e il 9 lega le operazioni algebriche alla relazione d'ordine. Notiamo anche che, ovviamente, i numeri 0 e 1 dell'assioma 4 sono gli stessi degli insiemi $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, che si possono considerare, come faremo sempre, sottoinsiemi di $\mathbf{R}$.

Osservazione 1.1.1 Osserviamo che i nove assiomi elencati sopra *non definiscono ancora completamente* $\mathbf{R}$. Infatti, essi valgono (per esempio) in $\mathbf{Q}$. Per definire $\mathbf{R}$ occorre un altro assioma che enunceremo fra poco e richiede qualche ulteriore nozione preliminare.

Definizione 1.1.2 (Valore assoluto) Per ogni $x \in \mathbf{R}$, si definisce il valore assoluto di x , denotato con $|x|$, il numero

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposizione 1.1.3 (Proprietà del valore assoluto) Per ogni $r > 0$ vale la seguente equivalenza:

$$(1.1.1) \quad |x| \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad -r \leq x \leq r.$$

Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$:

$$(1.1.2) \quad |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(1.1.3) \quad |x| = |-x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$(1.1.4) \quad |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$(1.1.5) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

DIM. Proviamo prima (1.1.1). Supponiamo dapprima $|x| \leq r$. Se $x \geq 0$ allora $x \geq -r$ e $|x| = x \leq r$; se $x < 0$ allora $x \leq r$ e $|x| = -x \leq r$, da cui $x \geq -r$. Viceversa, supponiamo $-r \leq x \leq r$. Allora, se $x \geq 0$ si ha $|x| = x \leq r$, mentre se $x < 0$ si ha $x = -|x| \geq -r$, da cui $|x| \leq r$.

Le (1.1.2), (1.1.3) sono ovvie conseguenze della definizione di valore assoluto. La (1.1.4), detta *diseguaglianza triangolare*, si può dimostrare usando (1.1.1). Infatti, sommando le relazioni:

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

si deduce

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

da cui per la (1.1.1) segue $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Infine, da (1.1.4) si deduce facilmente (1.1.5); infatti, risulta

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

e da qui $|x| - |y| \leq |x - y|$; scambiando x con y si ottiene $|y| - |x| \leq |x - y|$ e quindi $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ e la tesi segue da (1.1.1). $\square$

Definiamo una classe di sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ che interverrà in numerose considerazioni.

Definizione 1.1.4 (Insiemi limitati) *Un sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbf{R}$ si dice:*

1. *limitato superiormente se esiste $M \in \mathbf{R}$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in X$;*
2. *limitato inferiormente se esiste $m \in \mathbf{R}$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in X$;*
3. *limitato se è limitato superiormente ed inferiormente.*

Introduciamo una notazione per gli intervalli di $\mathbf{R}$, che sono i sottoinsiemi con cui prevalentemente (ma non *esclusivamente!*) lavoreremo, e per gli intorno di un punto, che useremo per descrivere le proprietà di vicinanza tra numeri reali.

Definizione 1.1.5 (Intervalli e intorno) *Dati a e b in $\mathbf{R}$, con $a < b$, si dice intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\};$$

si dice intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a destra di estremi a e b l'insieme

$$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a sinistra di estremi a e b l'insieme

$$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

Dato $a \in \mathbf{R}$, si denota con $[a, +\infty[$ l'insieme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\},$$

e con $]a, +\infty[$ l'insieme

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a < x\};$$

analogamente:

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\},$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbf{R} : x < a\}.$$

Dati $x_0 \in \mathbf{R}$ e $r > 0$, si dice intorno aperto di x_0 di raggio r l'insieme

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} =]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Nella definizione di intervalli con un estremo infinito, non si è dato alcun significato ai simboli $\pm\infty$ fuori dal contesto dell'intera espressione che li contiene. Questo accadrà spesso anche nel seguito. Notiamo anche che talvolta si scrive $] - \infty, +\infty[$ per denotare $\mathbf{R}$.

Molto spesso, parleremo genericamente di *intervallo*; se non viene specificato nulla, s'intende che quanto detto vale per intervalli qualunque (aperti, chiusi, semiaperti limitati, illimitati, indifferentemente). Accanto all'intorno aperto di x_0 di raggio r possiamo considerare l'intorno chiuso

$$\bar{I}_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Notiamo inoltre che un insieme X è limitato se e solo se è contenuto in un intervallo limitato, cioè se e solo se esistono $m, M \in \mathbf{R}$ tali che $X \subset [m, M]$. Introduciamo due importanti concetti legati alla limitatezza.

Definizione 1.1.6 (Maggioranti, minoranti, massimo, minimo) Sia X un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

Si dice che $M \in \mathbf{R}$ è un maggiorante per X se $x \leq M$ per ogni $x \in X$. Si dice che M è il massimo di X , e si scrive $M = \max X$, se M è un maggiorante ed inoltre M appartiene ad X .

Si dice che $m \in \mathbf{R}$ è un minorante per X se $x \geq m$ per ogni $x \in X$. Si dice che m è il minimo di X , e si scrive $m = \min X$, se m è un minorante ed m appartiene ad X .

Le considerazioni che seguono sono tutte conseguenze dirette delle definizioni.

Osservazioni 1.1.7

1. Un insieme ammette maggioranti se e solo se è limitato superiormente, ed ammette minoranti se e solo se è limitato inferiormente.
2. Se un insieme ammette un maggiorante M allora ne ammette infiniti, poiché ogni numero maggiore di M è ancora un maggiorante. Naturalmente, una considerazione analoga vale per i minoranti.

3. A differenza dei maggioranti, il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se M_1 ed M_2 sono entrambi massimi di X allora M_1, M_2 appartengono entrambi ad X ed applicando la definizione di massimo prima con $M = M_1$ ed $x = M_2$ e poi con $M = M_2$ e $x = M_1$ si trova $M_2 \leq M_1$ e poi $M_1 \leq M_2$, da cui $M_1 = M_2$ e l'unicità del massimo. Ovviamente un ragionamento analogo porta all'unicità del minimo.
4. Un insieme limitato può non avere massimo o minimo. Per esempio, l'intervallo $]a, b]$ ha massimo b ma non ha minimo, perché i suoi minoranti sono gli elementi dell'intervallo $] - \infty, a]$, e nessuno di essi appartiene ad $]a, b]$.
5. Ogni insieme costituito da un numero *finito* di numeri reali ha sempre massimo e minimo.

Tenendo conto delle osservazioni precedenti, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.8 (Estremo superiore ed inferiore) *Dato $X \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente, e detto M_X l'insieme dei suoi maggioranti, diciamo estremo superiore di X il più piccolo dei maggioranti, cioè il numero*

$$\sup X = \min M_X.$$

Dato $X \subset \mathbf{R}$ limitato inferiormente, e detto M'_X l'insieme dei suoi minoranti, diciamo estremo inferiore di X il più grande dei minoranti, cioè il numero

$$\inf X = \max M'_X.$$

Come osservato, in generale, un insieme, anche limitato, può non avere massimo o minimo, ed infatti aver definito $\sup$ e $\inf$ permette di parlarne, ma non ne assicura l'esistenza. Il fatto che (in $\mathbf{R}$) l'insieme dei maggioranti (rispettivamente, dei minoranti) di un insieme dato abbia *sempre* minimo (risp. massimo) in $\mathbf{R}$ distingue in modo essenziale $\mathbf{R}$ da $\mathbf{Q}$. L'esistenza dell'estremo superiore (inferiore) per un insieme limitato superiormente (inferiormente) completa la nostra descrizione assiomatica dell'insieme dei numeri reali. Notiamo che in tutta la trattazione precedente sono stati usati solo gli assiomi già enunciati, e quindi essa è logicamente coerente, anche se la descrizione di $\mathbf{R}$ non era ancora completa.

Assioma 10. (Completezza) Ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore $\sup X$ in $\mathbf{R}$.

Osservazioni 1.1.9

1. Dall'assioma 10 segue subito che ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ammette estremo inferiore in $\mathbf{R}$.

2. Abbiamo già osservato che il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Segue subito quindi dalla definizione l'unicità dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.
3. Conveniamo di porre $\sup X = +\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ e X non è limitato superiormente, e $\inf X = -\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ e X non è limitato inferiormente. Come prima, non diamo un significato ai simboli $\pm\infty$ isolati dal contesto, ma solo all'intera espressione che li contiene.
4. È evidente che se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbf{R}$ allora $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$.

Discutiamo separatamente altre due importanti conseguenze dell'assioma di completezza, la cui dimostrazione è meno immediata.

Osservazione 1.1.10

1. **(Proprietà archimedeo)**: per ogni coppia di numeri reali a e b , con $0 < a < b$, esiste un numero naturale n tale che $na > b$. Segnaliamo anche la seguente conseguenza: se un numero $c \geq 0$ è minore di ε per ogni $\varepsilon > 0$ allora $c = 0$. Infatti, se fosse $c > 0$, dato $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n \in \mathbf{N}$ tale che $nc > \varepsilon$, ossia $c > \varepsilon/n$, che contraddice l'ipotesi che c sia minore di ogni numero strettamente positivo prefissato. Tale risultato è talvolta utile per provare che due numeri reali a e b sono uguali, applicandolo a $c = |a - b|$. Se infatti si riesce a provare che $|a - b| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora segue $a = b$.
2. **(Densità dei razionali nei reali)**: per ogni coppia di numeri reali a, b , con $a < b$, esiste un numero *razionale* r tale che $a < r < b$. prendiamo prima $a > 0$. Allora per n maggiore del più grande fra i numeri $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b-a}$ risulta $0 < \frac{1}{n} < a$ e per la proprietà archimedeo esiste m tale che $\frac{m}{n} > a$. Se si sceglie m in modo che $\frac{m-1}{n} \leq a$, essendo $\frac{1}{n} < b - a$, si ha anche $\frac{m}{n} < b$. Se $b < a < 0$ si ragiona come prima con $-a$ e $-b$ e poi si cambia di segno il numero trovato. se $a \leq 0$ e $b > 0$ si trova come prima r tra 0 e b , se $a < 0$ e $b = 0$ si trova r tra a e 0 .

Si può dare una utile caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme.

Proposizione 1.1.11 (Caratterizzazione del sup e dell'inf) *Sia $X \subset \mathbf{R}$ limitato. Allora valgono le seguenti equivalenze:*

$$(1.1.6) \quad L = \sup X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq L \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon > L - \varepsilon \end{cases}$$

$$(1.1.7) \quad \ell = \inf X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \ell \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

DIM. Sia dapprima $L = \sup X$. Allora, $x \leq L$ per ogni $x \in X$ perché L è un maggiorante di X . Inoltre, nessun numero più piccolo di L è un maggiorante di X ; poiché ogni numero minore di L si può scrivere nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, negare che $L - \varepsilon$ sia un maggiorante di X equivale a dire che esiste un $x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon > L - \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che valgano le due condizioni a destra in (1.1.6); allora, la prima dice che L è un maggiorante di X . La seconda afferma che nessun numero più piccolo di L , espresso nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, è un maggiorante di X . Segue $L = \sup X$.

La dimostrazione di (1.1.7) è analoga. $\square$

L'assioma di completezza *non vale* nell'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$, e quindi $\mathbf{Q}$ è contenuto *propriamente* in $\mathbf{R}$. I numeri reali non razionali si dicono *irrazionali*.

Esempio 1.1.12 Sia $X = \{r \in \mathbf{Q} : r^2 < 2\}$; allora, X è limitato superiormente, ma $\sup X \notin \mathbf{Q}$; segue che l'assioma di completezza non vale in $\mathbf{Q}$. Per giustificare la nostra affermazione, procediamo in due passi: mostriamo prima che se $L = \sup X$ allora $L^2 = 2$, e poi che se $L^2 = 2$ allora $L \notin \mathbf{Q}$. Per la prima parte, si può ragionare così: supposto $L^2 < 2$, e posto $m = 2 - L^2$, si ha $m > 0$ e si vede che esistono soluzioni positive della seguente disequazione nella variabile ε :

$$\varepsilon^2 + 2L\varepsilon - m < 0;$$

per tali valori di ε risulta che $(L + \varepsilon)^2 < 2$ e quindi per la densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ ci sono elementi di X compresi tra L ed $L + \varepsilon$, sicché, supposto $L^2 < 2$, L non può essere il sup di X . Analogamente, supposto $L^2 > 2$, e posto $m = L^2 - 2$, si ha ancora $m > 0$ e si vede che esistono soluzioni positive della seguente disequazione nella variabile ε :

$$\varepsilon^2 - 2L\varepsilon - m > 0;$$

per tali valori di ε risulta che $(L - \varepsilon)^2 > 2$ e quindi esistono maggioranti di X compresi tra $L - \varepsilon$ ed L , in particolare più piccoli di L . Questo prova che, supposto $L^2 > 2$, L non può essere il sup di X . In definitiva, $(\sup X)^2 = 2$. Proviamo ora che $\sup X \notin \mathbf{Q}$. Supposto vero il contrario, sia $\sup X = p/q$ con la frazione p/q ridotta ai minimi termini. Si vede facilmente che questo porta ad una contraddizione. Infatti:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ implica } p^2 = 2q^2, \text{ da cui } p^2 \text{ pari, e quindi } p \text{ pari, diciamo } p = 2r \\ \text{allora } q^2 = 2r^2 \text{ pari, e } q \text{ pari.}$$

La precedente conclusione è impossibile perché la frazione era supposta ridotta ai minimi termini.

1.2 Funzioni elementari

Prima di affrontare lo studio delle funzioni reali di variabile reale, che sarà l'argomento centrale del corso, richiamiamo alcune nozioni generali sulle funzioni tra insiemi generici.

1.2.a Generalità sulle funzioni

Definizione 1.2.1 Sia U un qualunque insieme (non vuoto), che consideriamo come l'universo del nostro discorso.

1. Una funzione è una terna costituita da due sottoinsiemi di U , il primo, che denotiamo con A , detto dominio, il secondo, denotato con B , detto codominio, ed una legge di corrispondenza che fa corrispondere ad ogni elemento x di A uno (ed un solo) elemento di B , denotato con $f(x)$. Simbolicamente, scriviamo $f : A \rightarrow B$.
2. Si dice insieme immagine di f l'insieme

$$f(A) = \{y \in B : \text{esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} \subset B.$$

3. Si dice grafico di f l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B.$$

4. Data $f : A \rightarrow B$, e dato un sottoinsieme $C \subset A$, si dice restrizione di f la funzione $f|_C : C \rightarrow B$ che ha per dominio C , per codominio B e come legge di corrispondenza la stessa della f iniziale.
5. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.
6. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice surgettiva se $f(A) = B$, cioè se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.
7. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice bigettiva se è iniettiva e surgettiva.
8. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ per ogni $x \in A$, $y \in B$. Se f è invertibile, la funzione g suddetta si dice inversa di f e si denota con f^{-1} .
9. Per ogni insieme $A \subset U$, si definisce la funzione identità $id_A : A \rightarrow A$ ponendo $id_A(x) = x$ per ogni $x \in A$.
10. Date le funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, si definisce la funzione composta $g \circ f : A \rightarrow C$ ponendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in A$.

Osservazioni 1.2.2 1. Una funzione è invertibile se e solo se è bigettiva.

2. Data $f : A \rightarrow B$, la funzione $g : B \rightarrow A$ è l'inversa di f se e solo se $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, cioè se $(g \circ f)(x) = x$ per ogni $x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y$ per ogni $y \in B$.
3. Una funzione è sempre surgettiva prendendo come codominio l'insieme immagine $f(A)$, quindi ogni funzione iniettiva è sempre bigettiva da A in $f(A)$.

4. Se $f : A \rightarrow B$ è invertibile e $G(f)$ è il suo grafico, allora il grafico della funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ è l'insieme

$$G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in G(f)\}.$$

1.2.b Funzioni reali di una variabile

D'ora in poi l'universo del nostro discorso, salvo avviso contrario, sarà l'insieme dei numeri reali, o qualche suo sottoinsieme. Considereremo perciò *funzioni reali di una variabile reale*, cioè funzioni definite in $X \subset \mathbf{R}$ ed a valori in $\mathbf{R}$, simbolicamente $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. Useremo ovviamente la terminologia introdotta nella Definizione 1.2.1, ma, in questo caso particolare, accanto alle proprietà generali delle funzioni già viste possiamo segnalarne altre, peculiari delle funzioni reali. Iniziamo dall'importante nozione di monotonia.

Definizione 1.2.3 Sia $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è crescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

si dice che f è strettamente crescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

si dice che f è decrescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$

si dice che f è strettamente decrescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

si dice che f è monotona se è crescente o decrescente, che è strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Osservazione 1.2.4 È chiaro che ogni funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strettamente monotona è iniettiva, e perciò è invertibile da X su $f(X)$. Useremo sistematicamente questo fatto per studiare l'invertibilità delle funzioni. Inoltre, segue subito dalle definizioni che l'inversa di una funzione crescente è crescente, e l'inversa di una funzione decrescente è decrescente.

Altre proprietà delle funzioni reali corrispondono alle proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ visti nella sezione precedente.

Definizione 1.2.5 (Funzioni limitate) Sia $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Si dice che f è limitata se $f(X)$ è limitato, cioè se esistono $m, M \in \mathbf{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.

Come per la limitatezza, per definire massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione si fa riferimento all'insieme immagine $f(X)$.

Definizione 1.2.6 (max, min, sup ed inf di una funzione) *Si definiscono il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su X ponendo:*

$$\begin{aligned}\max_X f &= \max f(X) = \max\{f(x) : x \in X\}, \\ \min_X f &= \min f(X) = \min\{f(x) : x \in X\}, \\ \sup_X f &= \sup f(X) = \sup\{f(x) : x \in X\}, \\ \inf_X f &= \inf f(X) = \inf\{f(x) : x \in X\}.\end{aligned}$$

Osservazione 1.2.7 Come per gli insiemi, una funzione $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, anche limitata, può non avere minimo o massimo. La funzione f ha minimo se e solo se esiste $x_1 \in X$ tale che $f(x) \geq f(x_1)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_1 si dice *punto di minimo assoluto per f in X* . Analogamente, la funzione f ha massimo se e solo se esiste $x_2 \in X$ tale che $f(x) \leq f(x_2)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_2 si dice *punto di massimo assoluto per f in X* .

Naturalmente, il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è sempre un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, prodotto cartesiano della retta reale per sé stessa, in cui supponiamo fissato un riferimento cartesiano ortogonale di assi x (asse delle ascisse) ed y (asse delle ordinate). Conveniamo di rappresentare sull'asse delle ascisse la variabile indipendente e sull'asse delle ordinate la variabile dipendente, sicché il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sarà l'insieme dei punti del piano che verificano le condizioni $x \in X$ e $y = f(x)$. Dal punto di vista geometrico, i grafici delle funzioni nel piano sono caratterizzati dalla seguente condizione:

Sia $G \subset \mathbf{R}^2$. Allora, esistono $X \subset \mathbf{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $G = G(f)$ se e solo se l'intersezione di G con ogni retta verticale, cioè del tipo $x = \text{costante}$, contiene al più un punto.

In tal caso, X è l'insieme dei punti x tali che l'intersezione di G con la retta verticale passante per $(x, 0)$ contiene esattamente un punto. Tale punto, sia (x, y) , permette di definire la funzione f ponendo $f(x) = y$ per ogni $x \in X$.

Una condizione geometrica analoga caratterizza l'*iniettività* di una funzione; infatti,

Sia $f : X \rightarrow \mathbf{R}$; allora, f è iniettiva se e solo se l'intersezione di $G(f)$ con ogni retta orizzontale, cioè del tipo $y = \text{costante}$, contiene al più un punto.

L'insieme delle y tali che l'intersezione di G con la retta orizzontale passante per $(0, y)$ non è vuota costituisce $f(X)$.

1.2.c Funzioni elementari

In questo paragrafo definiamo le più usuali funzioni di una variabile, a partire dalle quali, con le operazioni algebriche e la composizione di funzioni, si otterranno la maggior

parte degli esempi che incontreremo. Le funzioni che andiamo a considerare saranno definite attraverso *espressioni analitiche*, cioè algoritmi di calcolo che comprendono operazioni algebriche oppure calcolo di estremi superiore od inferiore. Tali algoritmi consistono in una procedura che, dato il numero reale x in un opportuno insieme, prescrive come si debba calcolare il numero $f(x)$, cioè il valore che la funzione f assume in corrispondenza del valore assegnato alla variabile indipendente. Non bisogna per altro confondere la *funzione* f con la procedura per il calcolo di $f(x)$, che chiamiamo *espressione analitica*. Infatti, per dare la funzione f , pur dando per scontato che il suo codominio sia $\mathbf{R}$, bisogna dichiarare quale sia il *dominio* scelto, oltre ad assegnare l'espressione analitica che contiene la legge di corrispondenza richiesta per completare la definizione. Ciò non ostante, talvolta il dominio corrispondente ad una certa espressione analitica è taciuto: in tal caso, si assume come dominio il così detto *dominio naturale dell'espressione analitica*, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbf{R}$ in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$ si possono eseguire.

Funzioni razionali

Le funzioni definite da espressioni analitiche che contengono solo operazioni algebriche sono i *polinomi* e le *funzioni razionali*. Chiameremo *polinomio di grado n* nella variabile x l'espressione

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

definita per ogni x reale, dove gli $a_0, \dots, a_n$ sono numeri reali dati, con $a_n \neq 0$, detti *coefficienti del polinomio*. Il grado del polinomio è quindi il massimo esponente della potenza di x con coefficiente non nullo. Tra i polinomi hanno un ruolo particolare le *potenze intere*, cioè del tipo $f(x) = x^n$, in cui uno solo dei coefficienti è non nullo. I polinomi di primo grado sono le funzioni *affini*, $f(x) = ax + b$ e in particolare quelle *lineari*, $f(x) = ax$. Notiamo che le funzioni affini e lineari, con $a \neq 0$, sono strettamente monotone, e perciò invertibili (crescenti per $a > 0$ e decrescenti per $a < 0$). Per quanto riguarda le funzioni potenza, per n dispari esse sono strettamente crescenti su $\mathbf{R}$ (e quindi invertibili), mentre per n pari sono strettamente crescenti le loro restrizioni all'insieme dei numeri positivi $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$.

Le altre funzioni razionali sono quelle espresse come rapporto di polinomi. Fra queste, le più semplici sono le funzioni *potenze negative* x^{-n} , con $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, definite per $x \neq 0$ come $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. La generica funzione razionale sarà del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove P e Q sono polinomi di grado qualunque. Il dominio naturale di f è in questo caso l'insieme $X = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$, dal momento che, delle operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$, l'unica che non si possa eseguire per ogni numero reale è la divisione, per la quale è escluso che il denominatore possa essere 0.

Radici aritmetiche e potenze razionali

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 2$, e per ogni $x \geq 0$, poniamo

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbf{R} : y^n < x\},$$

funzione detta *radice n -esima aritmetica di x* . Notiamo che per ogni $x \geq 0$ risulta $\sqrt[n]{x} \geq 0$. L'esistenza della radice è assicurata dall'assioma di completezza. Inoltre, ragionando come nell'Esempio 1.1.12, si può dedurre dalle proprietà dell'estremo superiore che $(\sqrt[n]{x})^n = x$, cioè che la funzione radice n -esima è l'*inversa della restrizione della funzione potenza n -esima all'insieme $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$* , che, come già osservato, è strettamente crescente. Poiché le funzioni potenza n -esima per n dispari sono strettamente crescenti su $\mathbf{R}$ e non solo su $\{x \geq 0\}$, si possono estendere le funzioni radice n -esima, per n dispari, ad $\mathbf{R}$, ponendo $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per ogni $x < 0$.

Per $r \in \mathbf{Q}$, posto per fissare le idee $r = p/q$ con $p \in \mathbf{Z}$ e $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$, poniamo $x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ per ogni $x \geq 0$ ($x > 0$ se $p < 0$).

Esponenziali e logaritmi

Avendo definito l'espressione x^r , con $x > 0$ ed $r \in \mathbf{Q}$, possiamo pensarla con x fissato ed r variabile, passando così dalla *funzione potenza* già considerata alla *funzione esponenziale*, per ora con esponente razionale. Siccome $1^r = 1$ per ogni r , considereremo in questo paragrafo una base strettamente positiva e diversa da 1. Per sottolineare che la base della potenza è costante, scriveremo a^r , supponendo fissato il numero reale $a > 0$, $a \neq 1$. Vale il seguente importante risultato.

Proposizione 1.2.8 *La funzione esponenziale a^r , $r \in \mathbf{Q}$, gode delle seguenti proprietà:*

1. $a^r > 0$ per ogni $a > 0$ e per ogni $r \in \mathbf{Q}$;
2. per $a \in]0, 1[$ la funzione a^r è strettamente decrescente;
3. per $a > 1$ la funzione a^r è strettamente crescente;
4. vale l'uguaglianza $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ per ogni $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$.

Dalla Proposizione 1.2.8 segue che la definizione di esponenziale si può estendere al caso di esponenti *reali* qualsiasi. Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Poniamo

$$(1.2.8) \quad a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\} \quad \text{se } a \in]0, 1[;$$

$$(1.2.9) \quad a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\} \quad \text{se } a > 1.$$

È molto importante notare che la funzione esponenziale *con esponente reale* appena definita gode ancora delle proprietà elencate nella Proposizione 1.2.8 ed è surgettiva su $]0, +\infty[$. Segue allora dall'Osservazione 1.2.4 che è possibile definire la funzione inversa dell'esponenziale.

Per $a > 0$, $a \neq 1$, si dice *logaritmo in base a* , e si denota $\log_a : \{x > 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, la funzione inversa di a^x ; risulta allora

$$\log_a x = y \iff a^y = x \quad \forall x > 0, y \in \mathbf{R}.$$

Sempre per l'Osservazione 1.2.4 si ha che $\log_a$ è strettamente crescente per $a > 1$ e strettamente decrescente per $a \in]0, 1[$.

Tra le funzioni esponenziali e i logaritmi, per motivi che saranno chiari più avanti nel corso, ha un ruolo importantissimo quella la cui base è il numero

$$(1.2.10) \quad e = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Risulta che e è un numero *irrazionale* e in particolare un suo valore approssimato è $e = 2,71828$. Torneremo sulla definizione del numero e nell'Esempio 2.3.3.

Definizione 1.2.9 (Funzione esponenziale e logaritmo naturale) *Si dice funzione esponenziale la funzione e^x , e logaritmo naturale il logaritmo in base e , denotato semplicemente $\log$.*

Notiamo che $e > 1$, quindi sia l'esponenziale e^x che il logaritmo naturale $\log x$ sono funzioni strettamente crescenti.

Infine, il procedimento esposto permette di definire anche le *funzioni potenza con esponente reale*. In altri termini, fissato $\alpha \in \mathbf{R}$, possiamo definire la *funzione potenza di esponente α* ponendo, per ogni $x > 0$, x^α come il valore dato dalle (1.2.8), (1.2.9), secondo i casi. Notiamo che $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.

Funzioni trigonometriche

Non ci soffermeremo sulle (tante) proprietà delle funzioni trigonometriche, che supponiamo note. Ci limitiamo a darne brevissimi cenni, limitati agli aspetti più legati alle applicazioni che seguono. Fissiamo anzitutto un riferimento ortogonale nel piano e consideriamo la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$. I suoi punti P possono essere identificati tramite l'angolo che il raggio OP forma col semiasse positivo dell'asse x . Definiamo ora l'unità di misura degli angoli.

Definizione 1.2.10 *Si dice misura in radianti di un angolo la lunghezza dell'arco individuato dalle semirette che determinano l'angolo sulla circonferenza unitaria di centro il punto d'incontro delle semirette stesse.*

Sottolineiamo che la precedente definizione, sebbene intuitiva, non può considerarsi rigorosa, dal momento che non abbiamo precisato come si possa definire e calcolare la lunghezza di un arco di circonferenza. Questo si può fare, sfruttando le proprietà della circonferenza, in modo elementare (cioè seguendo gli *Elementi* di Euclide, dove l'argomento è trattato in modo esauriente), oppure come caso particolare di una trattazione

generale del problema della lunghezza delle curve, che viene studiata nel corso di Analisi matematica II e, in particolare, è presentata nel Capitolo 4 delle relative dispense.

Vogliamo ora passare ad una misura *orientata* degli angoli, così come si fa per le misure lineari quando si introduce la nozione di ascissa. Per prima cosa, scegliamo di considerare positivo il verso antiorario di percorrenza della circonferenza, e misuriamo gli angoli a partire dal semiasse positivo delle x .

Ricordiamo che il numero π è definito come rapporto tra la circonferenza unitaria e il suo diametro, sicché la lunghezza della circonferenza unitaria ha il valore 2π . Notiamo inoltre che allo stesso punto sulla circonferenza sono associati infiniti valori dell'angolo (positivi e negativi). Fissato un intervallo semiaperto di lunghezza 2π (cioè pari alla lunghezza della circonferenza unitaria), per esempio $] - \pi, \pi]$, uno e uno solo di questi valori appartiene a tale intervallo, e tutti gli altri si ottengono da questo sommando multipli interi di 2π .

Queste proprietà si riflettono nella proprietà delle funzioni trigonometriche di essere *periodiche*, secondo la seguente definizione.

Definizione 1.2.11 (Funzioni periodiche) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; diciamo che f è periodica di periodo T (o T -periodica) se $T > 0$ è il più piccolo numero reale tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se f è T -periodica, T si dice periodo della funzione f .

Osserviamo che se f è T -periodica allora $f(x + kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Passiamo a definire le funzioni trigonometriche.

Definizione 1.2.12 Si dicono rispettivamente seno e coseno del numero $\alpha \in \mathbf{R}$ l'ordinata e l'ascissa del punto della circonferenza unitaria con centro l'origine determinato dalla semiretta per l'origine che forma un angolo di α radianti col semiasse positivo dell'asse x .

Osservazioni 1.2.13

1. Nella definizione di seno e coseno abbiamo sottolineato che si deve parlare di seno e coseno di un *numero* e non di un angolo: la costruzione geometrica basata sull'angolo è strumentale (e per altro non è l'unica possibile), ma ciò che viene definito sono il seno e il coseno del numero che esprime la misura in radianti di un angolo, e non dell'angolo stesso. Quest'osservazione è importante al fine di evitare confusioni quando si usino unità diverse dal radiante per misurare gli angoli. Anche per questo, è bene usare solo i radianti per misurare gli angoli. Come per la funzione esponenziale, forse questa scelta può apparire ora innaturale, mentre al contrario, come vedremo, risulterà essere la più naturale possibile.
2. Come abbiamo già osservato, lo stesso punto della circonferenza unitaria è determinato da infiniti valori della misura in radianti dell'angolo: due valori che differiscono per un multiplo intero di 2π , infatti, determinano lo stesso punto.

3. In base alle osservazioni precedenti, la definizione 1.2.12 definisce le due funzioni seno e coseno, aventi dominio $\mathbf{R}$. Come al solito, useremo d'ora in poi la lettera x per denotare la variabile. Inoltre, sono funzioni periodiche di periodo 2π .
4. È chiaro dalla definizione che vale la relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Accanto alle funzioni seno e coseno si definisce la funzione *tangente* ponendo

$$\tan : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Geometricamente, detto P il punto sulla circonferenza unitaria determinato dal numero x come al solito, per ogni x nel dominio di $\tan$ la tangente rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta $x = 1$ con la retta di origine O passante per P .

È evidente che la funzione tangente è definita per tutti i valori di x in cui il coseno è diverso da zero. Dal punto di vista geometrico, questi valori corrispondono ai punti P della circonferenza unitaria tali che la retta OP sia parallela alla retta $x = 1$.

Osserviamo anche che la funzione tangente è periodica di periodo minimo π e non 2π , malgrado sia rapporto di funzioni 2π -periodiche.

Ricordiamo infine alcuni valori fondamentali delle funzioni seno, coseno e tangente:

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$\tan 0 = 0$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\nexists \tan \frac{\pi}{2}$
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \frac{\pi}{4} = 1$
$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Le proprietà delle funzioni trigonometriche sono numerose ed importanti, ma non ne discutiamo ulteriormente qui perché esse si suppongono note dalla scuola superiore. Ci limitiamo a presentare le funzioni arcsin, arccos e arctan e a mostrare in che relazione sono con seno, coseno e tangente.

Proposizione 1.2.14 *La restrizione di $\sin$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ è strettamente crescente, la restrizione di $\cos$ all'intervallo $[0, \pi]$ è strettamente decrescente, e la restrizione di $\tan$ all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ è strettamente crescente.*

Non presentiamo la dimostrazione analitica della proposizione precedente, ma osserviamo che essa è chiara dalla costruzione geometrica delle funzioni trigonometriche. Dalla proposizione precedente e dall'Osservazione 1.2.4 segue subito che le restrizioni considerate sono invertibili. Diamo pertanto la seguente definizione.

Definizione 1.2.15 *Si dicono funzioni trigonometriche inverse le funzioni:*

- la funzione arcoseno, $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, inversa della restrizione di $\sin$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, definita da

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \forall y \in [-1, 1];$$

- la funzione arcocoseno, $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, inversa della restrizione di $\cos$ all'intervallo $[0, \pi]$, definita da

$$x = \arccos y \iff y = \cos x \quad \forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1];$$

- la funzione arcotangente, $\arctan : \mathbf{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$, inversa della restrizione di $\tan$ all'intervallo $] -\pi/2, \pi/2[$, definita da

$$x = \arctan y \iff y = \tan x \quad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Dalla Proposizione 1.2.14 e dall'Osservazione 1.2.4 segue che $\arcsin$ e $\arctan$ sono strettamente crescenti e che $\arccos$ è strettamente decrescente.

1.3 Numeri complessi

L'introduzione di un altro insieme numerico, oltre ai numeri reali, è giustificata dall'esigenza di trovare un insieme numerico in cui tutte le equazioni algebriche, cioè le equazioni del tipo $P(x) = 0$, con P polinomio di grado arbitrario, abbiano soluzioni. Questo non accade in $\mathbf{R}$; il più semplice esempio di equazione algebrica priva di soluzioni reali è certamente $x^2 + 1 = 0$. È forse sorprendente che, come vedremo, sarà in un certo senso sufficiente “aggiungere” ad $\mathbf{R}$ le soluzioni di quest'equazione per ottenere lo scopo indicato di risolvere *tutte* le equazioni algebriche (vedi il successivo Teorema fondamentale dell'algebra 1.3.10).

Definizione 1.3.1 (Campo complesso) Si dice campo complesso l'insieme $\mathbf{R}^2$ in cui sono definite le due operazioni di addizione e moltiplicazione seguenti:

$$(1.3.11) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(1.3.12) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Il campo complesso si denota con $\mathbf{C}$.

Osservazioni 1.3.2

1. Le operazioni definite in (1.3.11), (1.3.12) godono delle stesse proprietà algebriche indicate negli Assiomi da 1 a 6 per le analoghe operazioni in $\mathbf{R}$.

2. Gli elementi neutri per le operazioni di addizione e moltiplicazione sono rispettivamente $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$, mentre l'opposto e l'inverso, quest'ultimo solo per $(a, b) \neq (0, 0)$, sono rispettivamente

$$-(a, b) = (-a, -b), \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

3. Alla luce delle considerazioni precedenti, si ha che si possono identificare i numeri reali col sottoinsieme di $\mathbf{C}$ dato da $\{(a, 0) : a \in \mathbf{R}\}$. Ne segue che per $a \in \mathbf{R}$ si ha $a \cdot (b, c) = (ab, ac)$ per ogni $(b, c) \in \mathbf{C}$.
4. A differenza di $\mathbf{R}$, è possibile trovare numeri complessi (a, b) tali che $(a, b)^2 = -1 = (-1, 0)$; per esempio, $(0, 1)^2 = -1$.
5. In $\mathbf{C}$ non si può definire alcuna relazione d'ordine $\geq$ tale che valgano gli Assiomi 7, 8 e 9 stabiliti per i numeri reali.
6. Avendo definito la somma e la moltiplicazione tra numeri complessi, si possono considerare i *polinomi complessi* nella variabile complessa z nella forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad \text{con } a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}.$$

A proposito dei polinomi e delle equazioni algebriche in campo complesso, dal momento che, come vedremo, essi hanno un ruolo importante nella teoria, ricordiamo le nozioni di *radice* e *molteplicità*.

Definizione 1.3.3 (Radice di un polinomio e molteplicità) *Sia $P(z)$ un polinomio nella variabile complessa z , sia $z_0 \in \mathbf{C}$ e sia $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$. Si dice che z_0 è radice di P se $P(z_0) = 0$; in tal caso, $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$, e si dice che z_0 ha molteplicità m se $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.*

Una conseguenza della definizione precedente è che un polinomio di grado n non può avere più di n radici (contate con le rispettive molteplicità).

La rappresentazione dei numeri complessi come coppie ordinate non è molto comoda nelle manipolazioni algebriche. Per questo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.3.4 (Forma algebrica, Re, Im, modulo, coniugato) *Denotato con i il numero complesso $(0, 1)$, definiamo forma algebrica del numero complesso $z = (a, b)$ la scrittura $z = a + ib$. Il numero reale a si dice parte reale di z , denotata $\operatorname{Re} z$ e il numero reale b si dice parte immaginaria di z , denotata $\operatorname{Im} z$. Si definisce inoltre il modulo di z come $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e il numero complesso coniugato di z come $\bar{z} = a - ib$.*

Il modulo complesso gode di proprietà analoghe a quelle del valore assoluto in campo reale.

Proposizione 1.3.5 (Proprietà del modulo) *Per ogni $z, w \in \mathbf{C}$ valgono le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0, & |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0; \\ |z| &= |-z|, & |z \cdot w| &= |z| \cdot |w|; \\ |z + w| &\leq |z| + |w|. \end{aligned}$$

Segue che per le operazioni tra numeri complessi si possono usare le usuali regole algebriche, trattando il numero i come una variabile letterale, e tenendo conto che $i^2 = -1$. La forma algebrica è basata sulla rappresentazione dei punti del piano $\mathbf{R}^2$ attraverso le coordinate cartesiane ed è molto comoda per le addizioni, non è altrettanto comoda per le moltiplicazioni. Introduciamo perciò nel piano le *coordinate polari*, che ci consentiranno di ottenere un'altra espressione dei numeri complessi, stavolta utile in modo particolare per le moltiplicazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi Matematica II.

Coordinate polari Le coordinate polari (ϱ, ϑ) sono definite come segue: $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane (x, y) dall'origine e coincide col modulo, mentre ϑ rappresenta l'angolo formato dalla semiretta di origine $(0, 0)$ e passante per (x, y) con il semiasse $\{x \geq 0, y = 0\}$ e si dice *argomento* o anche *anomalia* del numero complesso $z = x + iy$. Ne segue che il punto $(x, y) \neq (0, 0)$ è univocamente determinato da una coppia (ϱ, ϑ) , con $\varrho > 0$ e ϑ che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π . Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore $\varrho = 0$, ma non ha un ϑ determinato. In questo contesto è utile scegliere come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo $]-\pi, \pi]$, e si ha:

$$(1.3.13) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

Definizione 1.3.6 (Forma trigonometrica) *Ogni $z \in \mathbf{C}$ si può esprimere in forma trigonometrica usando le coordinate polari; risulta $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.*

Vediamo come la forma trigonometrica permette di eseguire facilmente le moltiplicazioni. Dati $z_1 = \varrho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \varrho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$, risulta:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \varrho_1 \varrho_2 [(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)] \\ &= \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)], \end{aligned}$$

risultato che si può descrivere dicendo che il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare, per $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ ed $n \in \mathbf{N}$ si ha la *formula di De Moivre*:

$$(1.3.14) \quad z^n = \varrho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)].$$

Queste osservazioni suggeriscono di dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.7 (Esponenziale complesso e forma esponenziale) Per $z = x + iy$, si pone

$$(1.3.15) \quad e^z = e^x(\cos y + i \sin y);$$

in particolare, per $x = 0$ si ottengono i numeri complessi di modulo unitario, sicché si può scrivere ogni numero complesso nella forma esponenziale $z = |z|e^{i\vartheta}$, dove ϑ è un argomento di z .

Notiamo che usando la forma esponenziale la formula appena vista per il prodotto di due numeri complessi e la formula di De Moivre si possono riscrivere

$$\varrho_1 e^{i\vartheta_1} \varrho_2 e^{i\vartheta_2} = \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (\varrho e^{i\vartheta})^n = \varrho^n e^{in\vartheta},$$

due uguaglianze che formalmente rispettano le leggi degli esponenti per il prodotto di potenze con la stessa base. Anche se la Definizione 1.3.7 ha delle giustificazioni ben più profonde (vedi anche il Paragrafo 1.3 degli Appunti di Analisi II), questa coerenza formale si può considerare come una prima motivazione. Le notazioni introdotte saranno comode nel calcolo delle radici complesse che ora definiamo.

Definizione 1.3.8 Dati $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, e $w \in \mathbf{C}$, un numero complesso z si dice radice complessa n -esima di w se $z^n = w$.

Notiamo che un numero complesso non può avere più di n radici complesse distinte, essendo le radici n -esime di w le radici del polinomio $P(z) = z^n - w$. Inoltre, è importante capire che la nozione di radice complessa, a differenza della radice n -esima aritmetica in campo reale, *non definisce una funzione*, anche quando si parta da numeri reali positivi. Per esempio, la *radice quadrata reale* del numero 4 è 2, e infatti in ambito reale si scrive $\sqrt{4} = 2$, mentre le *radici complesse* dello stesso numero 4 sono 2 e -2 . Di che cosa si stia parlando dev'essere pertanto sempre dichiarato o chiaro dal contesto.

Teorema 1.3.9 (Radici complesse) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, e per ogni $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$, esistono n radici complesse distinte di w , date dalla formula

$$(1.3.16) \quad z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\phi_k}, \quad \text{con } \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad \text{e } k = 0, \dots, n-1.$$

DIM. Posto $w = \varrho e^{i\vartheta}$, cerchiamo i numeri complessi $z = r e^{i\phi}$ tali che $z^n = w$. Dalla formula di De Moivre, quest'equazione equivale a $r^n e^{in\phi} = \varrho e^{i\vartheta}$, che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} r^n = \varrho \\ \cos(n\phi) = \cos \vartheta \\ \sin(n\phi) = \sin \vartheta \end{cases}$$

nelle incognite reali r e ϕ . Le soluzioni di questo sistema sono

$$r = \sqrt[n]{\varrho}, \quad \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

dove $\sqrt[n]{\cdot}$ indica la radice aritmetica del numero positivo ϱ . Quindi r , cioè il modulo di z , è unico, mentre per l'argomento abbiamo trovato infinite soluzioni ϕ_k . In realtà, esse non danno luogo ad infiniti numeri complessi distinti (che sarebbe impossibile, come già osservato), a causa del fatto che l'argomento di un numero complesso è determinato a meno di multipli di 2π . Infatti, $z_k = z_j$ se e solo se $\cos \phi_k = \cos \phi_j$ e $\sin \phi_k = \sin \phi_j$, cioè se e solo se i due indici k e j differiscono per un multiplo intero di n . Ne segue che i numeri $z_0, \dots, z_{n-1}$ sono tutti distinti tra loro e che ogni altra radice trovata coincide con uno di questi numeri. **QED**

Come annunciato all'inizio della sezione, la possibilità di trovare soluzioni dell'equazione $w^n = z$, cioè radici complesse di tutti i numeri complessi, si estende a tutte le equazioni algebriche. Infatti, il seguente importante (e difficile!) teorema assicura che ogni polinomio complesso ammette almeno una radice complessa.

Teorema 1.3.10 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Per ogni polinomio complesso di grado almeno 1 $P(z)$ esiste almeno un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.*

È facile trarre dal Teorema fondamentale dell'algebra numerose conseguenze: in particolare, usando la nozione di molteplicità di una radice, si può concludere che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici, pur di contarle con le rispettive molteplicità.

Teorema 1.3.11 *Ogni polinomio complesso di grado n ha esattamente n radici, se si conta m volte ogni radice di molteplicità m .*

Non abbiamo al momento bisogno di queste ulteriori informazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi matematica II. Enunciamo invece subito un risultato riguardante i polinomi a coefficienti reali.

Teorema 1.3.12 (Polinomi a coefficienti reali) *Se $P(z)$ è un polinomio nella variabile complessa z i cui coefficienti sono tutti numeri reali, allora $z_0 \in \mathbf{C}$ è radice di $P(z)$ se e solo se il suo coniugato $\bar{z}_0$ lo è, ed in tal caso z_0 e $\bar{z}_0$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che se $P(z_0) = 0$ allora

$$P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0.$$

QED

CAPITOLO 2

SUCCESIONI

In questo capitolo introduciamo e studiamo i concetti di successione e di limite di una successione di numeri reali, e discutiamo l'importante concetto di principio di induzione.

2.1 Limiti di successioni reali

Il concetto di successione è molto generale: chiamiamo *successione* ogni funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali. Siamo però particolarmente interessati ora alle *successioni reali*, cioè le funzioni $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. È utile però usare una notazione differente dalle funzioni reali generiche, per evidenziare che l'insieme immagine di una successione si può pensare come un insieme di numeri reali ordinato attraverso la dipendenza dalla variabile n . Perciò si scrive a_n in luogo di $f(n)$, sicché, se per ogni $n \in \mathbf{N}$ è dato il numero reale a_n risulta definita la *successione di numeri reali* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, e in particolare, a_n è detto *termine n -esimo o di indice n* della successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Definizione 2.1.1 Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali.

- (1) Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge ad $a \in \mathbf{R}$ (o che tende ad a) per n che tende a $+\infty$, e scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{o} \quad a_n \xrightarrow{n} a,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon).$$

- (2) Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge positivamente (o tende a $+\infty$) per n che tende a $+\infty$, e scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{o} \quad a_n \xrightarrow{n} +\infty,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow a_n > M.$$

Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge negativamente (o tende a $-\infty$) per n che tende a $+\infty$, e scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{o} \quad a_n \xrightarrow{n} -\infty,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists \nu \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow a_n < -M.$$

(3) Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è convergente se ammette limite finito; diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è divergente se ammette limite uguale a $+\infty$ o a $-\infty$.

(4) Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è regolare se ammette limite, altrimenti irregolare. Infine, diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è infinitesima se converge a 0 e se esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $a_n \neq 0$ per ogni $n \geq \nu$; diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è infinita se è divergente.

Se una successione ammette limite, questo è unico. Infatti, vale la seguente proprietà.

Teorema 2.1.2 (Unicità del limite) Supponiamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tenda ad a e a' per n che tende a $+\infty$. Allora $a = a'$.

DIM. Diamo la dimostrazione solo nel caso $a, a' \in \mathbf{R}$.

Supponiamo che $a \neq a'$. Allora, scelto $\varepsilon_0 = \frac{|a-a'|}{2} > 0$, applicando la Definizione 2.1.1(1) deduciamo che

$$(2.1.1) \quad \exists \nu_1 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_0$$

e

$$(2.1.2) \quad \exists \nu_2 \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu_2 \Rightarrow |a_n - a'| < \varepsilon_0.$$

Posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, combinando (2.1.1) e (2.1.2) otteniamo che

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 = |a - a'|,$$

cioè una contraddizione. $\square$

Esempi 2.1.3

1. Ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ è convergente e ha per limite proprio a .

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

3. la successione $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ è irregolare: scelto un $\varepsilon < 1/2$, per ogni $a \in \mathbf{R}$ esistono infiniti indici n per cui $|(-1)^n - a| > \varepsilon$.

Questi esempi mostrano che esistono successioni convergenti, divergenti e irregolari.

Una prima proprietà delle successioni convergenti è la loro limitatezza. Ricordiamo che, in accordo con la Definizione 1.2.5, una successione di numeri reali $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si dice *limitata superiormente* se

$$\exists L \in \mathbf{R} \text{ tale che } a_n \leq L \forall n \in \mathbf{N},$$

e si dice *limitata inferiormente* se

$$\exists L' \in \mathbf{R} \text{ tale che } a_n \geq L' \forall n \in \mathbf{N},$$

e si dice *limitata* se è limitata superiormente e inferiormente, cioè se

$$\exists L, L' \in \mathbf{R} \text{ tale che } L' \leq a_n \leq L \forall n \in \mathbf{N}$$

o equivalentemente, se

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \text{ tale che } |a_n| \leq M \forall n \in \mathbf{N}.$$

Esempi 2.1.4 È facile dimostrare che $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(\frac{n-1}{n^2})_{n \in \mathbf{N}}$ e $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ sono esempi di successioni limitate e che $(n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ è un esempio di successione limitata inferiormente ma non superiormente (analogamente, $(-n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ è un esempio di successione limitata superiormente ma non inferiormente).

È bene osservare che esistono esempi di successioni limitate non convergenti come $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$, ma la convergenza implica sempre la limitatezza.

Teorema 2.1.5 (Limitatezza) *Ogni successione convergente è limitata.*

DIM. Supponiamo che $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sia una successione convergente e che sia $a \in \mathbf{R}$ il suo limite. Allora, preso $\varepsilon_0 := 1$, applicando la Definizione 2.1.1(1) di successione convergente, deduciamo che

$$\exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow |a_n - a| \leq 1.$$

Questo implica che

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow |a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Posto $M = \max\{1 + |a|, |a_n| : n \leq \nu\}$ (osserviamo che tale massimo esiste perché si tratta di un insieme finito) otteniamo che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, cioè che $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è limitata. **QED**

La strategia per il calcolo dei limiti di successioni sarà la seguente: calcoleremo dei limiti di “successioni campione”, che chiamiamo *limiti notevoli*, e poi utilizzeremo questi risultati per calcolare i limiti di successioni più complesse. Il modo in cui i limiti notevoli si possono utilizzare per il calcolo di ulteriori limiti è descritto nei risultati seguenti. Il primo problema che affrontiamo è la relazione tra i limiti e la relazione d'ordine in $\mathbf{R}$.

Teorema 2.1.6 (Teorema della permanenza del segno) Sia $a_n \rightarrow a$. Allora valgono i seguenti risultati:

- (i) se $a > 0$ o $a = +\infty$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \nu$;
- (ii) se esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \nu$, allora $a \geq 0$.

DIM. (i) Supponiamo dapprima $a \in \mathbf{R}$. Fissato $\varepsilon_0 := a/2 > 0$, applicando la Definizione 2.1.1(1) deduciamo che

$$\exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_0 = a/2;$$

ne segue che

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow 0 < a/2 = a - a/2 < a_n.$$

Se $a = +\infty$, si può ripetere il ragionamento con $\varepsilon_0 > 0$ qualunque.

(ii) Supponiamo per assurdo che sia $a < 0$. Allora, applicando (i), otteniamo che

$$\exists \nu_1 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu_1 \Rightarrow a_n < 0;$$

posto $n_0 = \max\{\nu, \nu_1\}$, ne segue che $0 < a_n < 0$ se $n \geq n_0$, cioè una contraddizione.

QED

Un'informazione molto importante riguarda il comportamento dei limiti rispetto alle operazioni algebriche.

Teorema 2.1.7 (Operazioni con i limiti) Supponiamo che $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ siano due successioni reali tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbf{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ purché $b \neq 0$.

Dal Teorema della permanenza del segno e dal Teorema 2.1.7 si deduce il seguente teorema di confronto.

Teorema 2.1.8 (Primo Teorema del Confronto) Siano $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ due successioni regolari; allora:

- (i) se $a > b$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > b_n$ per ogni $n \geq \nu$;
- (ii) se esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > b_n$ per ogni $n \geq \nu$ allora $a \geq b$.

DIM. Basta applicare il Teorema della permanenza del segno alla successione $(a_n - b_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

QED

Osservazione 2.1.9 Passando al limite le disuguaglianze, in generale, si indeboliscono: ad esempio, per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $\frac{1}{n} > 0$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Quindi la disuguaglianza della tesi nella (ii) dei Teoremi 2.1.6, 2.1.8, in generale, non sono strette.

In molti casi è utile anche un teorema di confronto fra tre successioni.

Teorema 2.1.10 (Secondo Teorema del Confronto) *Date tre successioni (a_n) , (b_n) e (c_n) , se*

(i) *esiste $\nu_0 \geq 0$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \geq \nu_0$,*

(ii) *esistono $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ell$,*

allora esiste il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$.

DIM. Supponiamo $\ell \in \mathbf{R}$. Allora, per (i) possiamo affermare che (cfr Definizione 2.1.1(1))

$$(2.1.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \nu_1 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon,$$

$$(2.1.4) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \nu_2 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\nu := \max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$, dalle disuguaglianze (i), (2.1.3) e (2.1.4) otteniamo che

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq \nu \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , possiamo così concludere che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$. $\square$ QED

Osservazione 2.1.11 Vale l'implicazione

$$(2.1.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$$

Infatti, dalla proprietà (1.1.5) del valore assoluto segue che, fissato $\varepsilon > 0$, se esiste $\nu > 0$ tale che $n \geq \nu$ implica $|a_n - a| < \varepsilon$, allora per ogni $n \geq \nu$ vale anche

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

La (2.1.5) si può invertire solo se $a = 0$. Infatti, in tal caso si vede subito dalla definizione che $a_n \rightarrow 0$ se e solo se $|a_n| \rightarrow 0$, mentre per esempio $|(-1)^n| \rightarrow 1$ là dove, come già visto, la successione $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ non è regolare.

Esempio 2.1.12 Dati i polinomi $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ con $a_k \neq 0$ e $b_k \neq 0$, consideriamo la successione $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. Applicando il Teorema 2.1.7 otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_k(n)}{Q_k(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k (a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_2 n^{2-k} + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k})}{n^k (b_k + b_{k-1} n^{-1} + \dots + b_2 n^{2-k} + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k})} = \frac{a_k}{b_k} \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.13 Nel caso in cui le successioni $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non siano entrambe convergenti, il teorema precedente è ancora valido sotto opportune condizioni su a e b . In particolare:

$$a_n \xrightarrow{n} +\infty, b_n \xrightarrow{n} b \in \mathbf{R} \Rightarrow a_n \pm b_n \xrightarrow{n} +\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} -\infty, b_n \xrightarrow{n} b \in \mathbf{R} \Rightarrow a_n \pm b_n \xrightarrow{n} -\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} +\infty, b_n \xrightarrow{n} +\infty \Rightarrow a_n + b_n \xrightarrow{n} +\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} -\infty, b_n \xrightarrow{n} -\infty \Rightarrow a_n + b_n \xrightarrow{n} -\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} a \in \mathbf{R}, b_n \xrightarrow{n} \pm\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} 0$$

$$a_n \xrightarrow{n} +\infty, b_n \xrightarrow{n} b \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \xrightarrow{n} \pm\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} \pm\infty, b_n \xrightarrow{n} \pm\infty \Rightarrow a_n \cdot b_n \xrightarrow{n} \pm\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} \pm\infty, b_n \xrightarrow{n} b \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} \pm\infty$$

$$a_n \xrightarrow{n} a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} \pm\infty$$

(si applica l'usuale regola dei segni per determinare il segno di ∞ negli ultimi quattro casi)

Inoltre, se $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow 0$ e $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione limitata, diciamo $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è ancora una successione convergente a 0; infatti, applicando il Secondo teorema di confronto si ha $-Ma_n \leq a_n b_n \leq Ma_n$, ed entrambe le successioni $(-Ma_n)$ ed (Ma_n) convergono a 0.

Esempi 2.1.14 Applicando tali proprietà possiamo discutere i seguenti esempi.

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 2^n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - (-1)^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - (-1)^n \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{-n} + 1}{n} = 0$$

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k (a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_2 n^{2-k} + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k n^k}{b_h n^h} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } k > h \\ 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{se } k = h \end{cases}$$

4. Nulla si può dire invece nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} a_n &\xrightarrow{n} +\infty, \quad b_n \xrightarrow{n} -\infty \quad \text{e } a_n + b_n \xrightarrow{n} ? \\ a_n &\xrightarrow{n} \pm\infty, \quad b_n \xrightarrow{n} 0 \quad \text{e } a_n \cdot b_n \xrightarrow{n} ? \\ a_n &\xrightarrow{n} \pm\infty, \quad b_n \xrightarrow{n} \pm\infty \quad \text{e } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} ? \\ a_n &\xrightarrow{n} 0, \quad b_n \xrightarrow{n} 0 \quad \text{e } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} ? . \end{aligned}$$

Infatti, esistono esempi di coppie di successioni reali tali che la relativa successione somma (o prodotto o rapporto) risulta o convergente o divergente o irregolare, come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + (-1)^n) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty \quad \text{ma la successione}$$

$$\text{somma } ([n^2 + (-1)^n + (-n^2)])_{n \in \mathbf{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ è irregolare}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n^{-2} = 0 \quad \text{ma la successione}$$

$$\text{prodotto } (n^2 \cdot (-1)^n n^{-2})_{n \in \mathbf{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ è irregolare}$$

etc...

Questo è il motivo per cui si parla di *forme indeterminate* per indicare i casi riportati sopra e questi sono solitamente denotati nel modo seguente: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Nei teoremi visti finora l'esistenza del limite delle successioni considerate era sempre assunta come ipotesi. Il prossimo risultato riguarda invece *l'esistenza* di un limite. Le successioni, come tutte le funzioni reali definite in un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, possono essere monotone crescenti o decrescenti, in accordo con la Definizione 1.2.3. Nel caso delle successioni però la proprietà di monotonia si può enunciare in un modo più semplice.

Osservazione 2.1.15 (Successioni monotone) Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali.

1. La successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è *strettamente crescente* (*crescente*) se e solo se $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbf{N}$.
2. La successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è *strettamente decrescente* (*decrescente*) se e solo se $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Come sempre, diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è *strettamente monotona* (*monotona*) se $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è strettamente crescente o decrescente (crescente o decrescente).

Osserviamo che ogni successione strettamente monotona è monotona. Aver riformulato le proprietà di monotonia per le successioni in questo modo ha il vantaggio di ridurre la verifica della monotonia ad una disequazione *con un solo parametro* n , avendo ridotto il confronto di ciascun valore a_n soltanto con il suo successivo a_{n+1} . Le successioni monotone godono della fondamentale proprietà di essere sempre regolari.

Teorema 2.1.16 (Teor. fondamentale sul limite delle successioni monotone)

Ogni successione monotona è regolare. In particolare, valgono le seguenti proprietà:

- (i) $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ crescente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$,
- (ii) $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ decrescente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$,
- (iii) $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ monotona e limitata $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergente.

DIM. Dimostriamo solo (i). Sia $L = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$. Allora $L \in \mathbf{R}$ o $L = +\infty$.

Nel caso in cui $L \in \mathbf{R}$, fissato $\varepsilon > 0$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, vedi Proposizione 1.1.11, esiste $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $a_{n_0} > L - \varepsilon$. Poiché $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è crescente ed L è l'estremo superiore di $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, ne segue che

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , possiamo concludere che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.

Nel caso in cui $L = +\infty$, la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non è limitata superiormente (cioè, non ammette alcun maggiorante) e quindi

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tale che } a_{n_0} > M.$$

Poiché $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è crescente, ne segue allora che

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > M,$$

cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{QED}$

Naturalmente, non tutte le successioni sono regolari: perciò, è spesso utile studiare il comportamento di una successione isolandone solo una parte dei termini, che da sé possono dar luogo ad una successione regolare.

Definizione 2.1.17 (Successioni estratte) *Siano (a_n) una successione reale e $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ si dice successione estratta da $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ o sottosuccessione di $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.*

Notiamo che se si pensa alla successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in termini della funzione f definita in $\mathbf{N}$ tale che $a_n = f(n)$, per definire una sottosuccessione bisogna assegnare un'altra successione $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n_k = g(k)$ nella notazione appena introdotta, in modo tale che $f \circ g$ definisca l'estratta $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$. Una successione estratta non è però semplicemente una successione i cui termini sono un sottoinsieme dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ dei valori assunti dalla successione iniziale. Infatti, si vuole che nello scegliere i valori $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ si rispetti l'ordine in cui tali valori compaiono nella successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ iniziale. Questa richiesta viene formalizzata imponendo la *stretta crescita* alla legge di estrazione $n_k = g(k)$.

Esempio 2.1.18 Le successioni $((-1)^{2k})_{k \in \mathbf{N}} = (1)_{k \in \mathbf{N}}$ e $((-1)^{2k-1})_{k \in \mathbf{N}} = (-1)_{k \in \mathbf{N}}$ sono esempi di successioni estratte da $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$; le successioni $(\frac{1}{k^2})_{k \in \mathbf{N}}$, $(\frac{1}{2^k})_{k \in \mathbf{N}}$ e $(\frac{1}{k+3})_{k \in \mathbf{N}}$ sono esempi di successioni estratte da $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}}$.

Osservazione 2.1.19 Se la successione reale $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende ad a per n che tende a $+\infty$ allora ogni successione estratta da $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ha per limite a . Tale osservazione è ovvia, ma può essere riformulata in un modo molto utile per dimostrare che una successione non è regolare. Infatti, l'enunciato precedente equivale a dire che una successione *non* è regolare se e solo se ammette due estratte che non tendono allo stesso limite, quindi in particolare:

se una successione ammette due estratte aventi due limiti diversi allora non è regolare.

In questo modo si può nuovamente verificare che $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ non è regolare. Infatti, l'Esempio 2.1.18 mostra che possiede due estratte convergenti a due limiti diversi.

Abbiamo già osservato che esistono successioni limitate e non convergenti, come $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Però, risulta che

Teorema 2.1.20 (Teorema di Bolzano–Weierstass) *Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione limitata. Allora esiste almeno una successione estratta da $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergente.*

Questo teorema è di fatto equivalente all'Assioma di completezza, così come anche il seguente Teorema 2.1.22, che è molto importante perché dà una condizione di convergenza su una successione *senza coinvolgere il valore del limite*, ma basato *solo sui termini della successione stessa*, che ovviamente è la condizione in cui ci si trova se si vuole conoscere il comportamento di una successione prima di calcolarne il limite, e quando non si è affatto in grado di calcolarlo. Premettiamo la definizione di successione di Cauchy.

Definizione 2.1.21 (Successioni di Cauchy) *Diciamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq \nu \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.22 (Criterio di convergenza di Cauchy) *La successione reale $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è convergente in $\mathbf{R}$ se e solo se è una successione di Cauchy.*

Osservazioni 2.1.23

1. Il criterio di Cauchy stabilisce l'equivalenza tra due affermazioni: la convergenza della successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e la sua proprietà di essere una successione di Cauchy, quindi contiene due implicazioni. Di queste, una è ovvia, mentre l'altra è difficile. Quella ovvia è che se $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è convergente allora è di Cauchy. Infatti, se $a_n \rightarrow \ell \in \mathbf{R}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n > \nu$ implica $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Quindi, per $n, m > \nu$ risulta

$$|a_m - a_n| = |a_m - \ell + \ell - a_n| \leq |a_m - \ell| + |\ell - a_n| < 2\varepsilon,$$

e quindi $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è di Cauchy.

2. Come osservato, il Criterio di Cauchy è equivalente all'Assioma di completezza (ed anche al Teorema di Bolzano–Weierstrass), quindi è valido in $\mathbf{R}$ ma non in $\mathbf{Q}$. Infatti, esistono successioni di numeri razionali che sono di Cauchy, ma non ammettono limite in $\mathbf{Q}$ come la successione (che studieremo) $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbf{N}}$.

Osservazione 2.1.24 Concludiamo osservando che si possono considerare anche *successioni complesse* $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Per studiarne il comportamento, basta scrivere ogni termine in forma algebrica, $z_n = a_n + ib_n$, e studiare le due successioni reali $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ separatamente. Ovviamente, non ha senso in $\mathbf{C}$ parlare di successioni positivamente o negativamente divergenti, perciò si considereranno solo successioni convergenti, cioè tali che $z_n \rightarrow z \in \mathbf{C}$, divergenti, cioè tali che $|z_n| \rightarrow +\infty$, e irregolari.

2.2 Principio di induzione

In questo paragrafo discutiamo un teorema, noto sotto il nome tradizionale di “Principio di induzione”, che è spesso utile, come vedremo, per discutere la validità di una successione *infinita* di proposizioni in un *numero finito di passi*. Equivalentemente, si vuol provare che un enunciato dipendente dalla variabile naturale $n \in \mathbf{N}$ (detto *predicato*) è vero per ogni valore di n (o, più in generale, per ogni valore di n a partire da un valore iniziale n_0 che può essere diverso da 0). Non presentiamo la dimostrazione, ma ne discutiamo il significato dopo averlo enunciato.

Teorema 2.2.1 (Principio di induzione) *Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato dipendente dalla variabile $n \in \mathbf{N}$. Se*

(i) *esiste $n_0 \geq 0$ tale che $\mathcal{P}(n_0)$ sia vera;*

(ii) *per ogni $n \geq n_0$ vale l'implicazione*

$$(2.2.6) \quad \mathcal{P}(n) \text{ vera} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vera}$$

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Un *predicato* è un enunciato che contiene una variabile (in questo caso, $n \in \mathbf{N}$), e quindi di per sé non è né vero né falso, in quanto il suo valore di verità dipende dal valore che viene attribuito alla variabile. Quando si assegna un valore ad ogni variabile presente in un predicato si ottiene una *proposizione*, che sarà vera o falsa. Per esempio, l'enunciato “ n è un numero pari” è vero se alla variabile n viene attribuito come valore un multiplo di 2, ed è falso altrimenti. La tesi del Teorema 2.2.1 (per semplicità, supponiamo $n_0 = 0$), non è che il predicato $\mathcal{P}(n)$ è vero, ma che l'enunciato $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni n , cioè che tutte le proposizioni che si ottengono fissando ad arbitrio il valore della variabile $n \in \mathbf{N}$ sono vere. È importante anche chiarire che nella (ii) l'ipotesi è che sia vera l'implicazione nella (2.2.6), che è cosa diversa dall'assumere che $\mathcal{P}(n)$ sia vera: quello che si suppone nella (2.2.6) è che non possa accadere, per alcun valore di $n \geq n_0$, che $\mathcal{P}(n)$ sia vera e $\mathcal{P}(n+1)$ sia falsa. Questo infatti è l'unico caso in cui è falsa l'implicazione. D'altra parte, la sola (ii) non può bastare, come vedremo nell'Esempio 2.2.2.

Esempio 2.2.2 Consideriamo l'enunciato

$$\mathcal{P}(n) : \quad 2^n \geq n^3,$$

e proviamo che “ $\mathcal{P}(n)$ vera $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vera” per ogni $n \geq 7$. Infatti, per $n \geq 7$ risulta:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n \cdot n^2 \geq n^3 + 7n^2 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3, \end{aligned}$$

e quindi per ogni $n \geq 7$, se $2^n \geq n^3$ allora $2^{n+1} \geq (n+1)^3$. D'altra parte, semplici calcoli mostrano che $\mathcal{P}(n)$ è falsa per $n = 7, 8, 9$, mentre è vera per $n = 10$. Sintetizzando, si può dire che $\mathcal{P}(n)$ è *induttiva*, cioè verifica la (2.2.6), per ogni $n \geq 7$, mentre è *vera* per ogni $n \geq 10$, dal momento che (i) è verificata con $n_0 = 10$.

Presentiamo ora alcuni esempi di enunciati che si possono provare per induzione. Essi saranno utili in successive applicazioni, nel Paragrafo 2.3 e nel Capitolo 3.

Esempio 2.2.3 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

L'esempio seguente, che generalizza uguaglianze elementari come $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ o $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, sarà utile in connessione con la serie geometrica discussa nell'Esempio 3.1.7.

Esempio 2.2.4 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \neq 1$ risulta

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

La disuguaglianza dell'esempio seguente è nota come *disuguaglianza di Bernoulli*.

Esempio 2.2.5 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x > -1$ risulta

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

dal momento che $nx^2 \geq 0$.

L'esempio precedente si può raffinare, ottenendo una disuguaglianza più precisa.

Esempio 2.2.6 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x > -1$ risulta

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x) \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \right) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(x^2 + x^3) + x \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + x \left[\frac{n(n-1)}{2}x^2 - nx + 1 \right] \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2}x^2 \end{aligned}$$

dal momento che il trinomio in parentesi quadre ha discriminante negativo e quindi è positivo per ogni valore di x .

L'idea dell'induzione è alla base anche della definizione di successioni *per ricorrenza*, o, appunto, *per induzione*. Per definire una successione, invece di usare una formula chiusa del tipo $a_n = f(n)$, si può procedere così: Si definisce a_0 e poi si dà una formula del tipo $a_{n+1} = F(n, a_0, \dots, a_n)$. Per esempio, si può porre (n fattoriale)

$$0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1)n! \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Un procedimento di questo tipo si incontra, per esempio, quando i termini di una successione vengano calcolati con un metodo ricorsivo in cui una variabile viene attualizzata utilizzando il risultato ottenuto al passo precedente. Noi incontreremo almeno due importanti esempi, nella Definizione delle somme parziali di una serie (vedi Osservazione 3.1.2) e (nel corso di Analisi Matematica II) nella dimostrazione del Teorema di esistenza globale in intervalli compatti relativo alle equazioni differenziali.

L'introduzione di $n!$ permette di dare altri due esempi significativi che possono essere dimostrati grazie al Principio di Induzione.

Esempio 2.2.7 Proviamo per induzione che per ogni $n \geq 2$ risulta

$$2^n < n!.$$

Per $n = 2$ la disuguaglianza è chiaramente soddisfatta. Il passo induttivo si può provare come segue:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Esempio 2.2.8 Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $h \in \{0, 1, \dots, n\}$ poniamo

$$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{h!}.$$

Il numero $\binom{n}{h}$ si dice *coefficiente binomiale* e soddisfa le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n+1}{h} = \binom{n}{h-1} + \binom{n}{h}.$$

Dati $a, b \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ possiamo ora dare la *formula di Newton* per lo sviluppo di $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^h.$$

Questa formula si dimostra per induzione.

Per $n = 1$ è chiaramente verificata. Il passo induttivo si può provare come segue:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^h \\
 &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^{h+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h} a^{n-h} b^{h+1} + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} \\
 &= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h.
 \end{aligned}$$

2.3 Limiti notevoli

In questo paragrafo calcoliamo i limiti di alcune importanti successioni; essi saranno alla base del calcolo di tutti i limiti di successioni che incontreremo, e verranno utilizzati sfruttando i risultati generali visti nel Paragrafo 2.1.

Esempio 2.3.1 Ogni successione del tipo $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$, con $a \in \mathbf{R}$, è detta *successione geometrica di ragione a* . Osserviamo che la successione geometrica $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$ è irregolare se $a \leq -1$, come ad esempio la successione $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Studiamo tutti i casi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1. \end{cases}$$

Infatti, se $a > 1$ per la disuguaglianza di Bernoulli vista nell'Esempio 2.2.5 si ha

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \rightarrow +\infty$$

e quindi $a^n \rightarrow +\infty$ per confronto. Se $|a| < 1$ allora $1/|a| > 1$ e quindi $(1/|a|)^n \rightarrow +\infty$. Segue $|a|^n = 1/(1/|a|)^n \rightarrow 0$ ed anche $a^n \rightarrow 0$ per l'Osservazione 2.1.11. Se $a \leq -1$ invece risulta $a^{2k} \rightarrow +\infty$ e $a^{2k+1} \rightarrow -\infty$ per $k \rightarrow +\infty$ e quindi $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$ è irregolare.

Esempio 2.3.2 Per ogni $a > 0$ risulta $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$. Infatti, se $a \geq 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \geq 1$ e, posto $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$, risulta $b_n \geq 0$ e, per la disuguaglianza di Bernoulli nell'Esempio 2.2.5,

$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$, da cui

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e quindi la tesi. Per $0 < a < 1$ si ha $\sqrt[n]{a} = 1/(\sqrt[n]{1/a}) \rightarrow 1$ per quanto appena detto. Analogamente si prova che per ogni $b \in \mathbf{R}$ risulta $\lim_n \sqrt[n]{n^b} = 1$.

Abbiamo definito il numero e in (1.2.10) come estremo superiore di una successione. Grazie al Teorema 2.1.16, esso è anche il limite della stessa successione.

Esempio 2.3.3 La successione

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

è strettamente crescente e limitata.

Per dimostrare che $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}}$ è strettamente crescente, osserviamo che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ con $n > 1$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &> \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} &\iff \left(\frac{n+1}{n} \right)^n &> \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1} \right)^n \cdot \frac{n-1}{n} \\ &&\iff \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^n &> \frac{n-1}{n} \\ &&\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^n &> 1 - \frac{1}{n} \\ &&\iff \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n &> 1 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disequaglianza $\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n > 1 - \frac{1}{n}$ è vera e segue applicando la Diseguaglianza di Bernoulli nell'Esempio 2.2.5 con $x = -1/n^2$. Quindi la successione $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbf{N}}$ è strettamente crescente. Inoltre, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)}{n^h} \\ &< \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} = 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Per il Teorema fondamentale sul limite delle successioni monotone 2.1.16 possiamo concludere che

$$(2.3.7) \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbf{R},$$

per la (1.2.10). Il numero e è irrazionale e quindi il suo sviluppo decimale è infinito e aperiodico; le prime cifre decimali sono le seguenti:

$$e = 2,7182818284 \dots$$

Dal limite appena calcolato si potrebbe dedurre che per ogni $x \in \mathbf{R}$ vale

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ed anche che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \\ a_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \end{aligned}$$

Dall'esempio precedente si può dedurre un altro limite notevole.

Esempio 2.3.4 Proviamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Si ha per ogni $n > 3$

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < \frac{1}{n(n+1)} \log \frac{e}{n} < 0,$$

dove abbiamo usato la (2.3.7). Dalla decrescenza della successione segue l'esistenza del limite $\ell = \lim_n \frac{\log n}{n}$. Siccome per le proprietà dei logaritmi risulta

$$\frac{\log(n^2)}{n^2} = \frac{2 \log n}{n}$$

e $\frac{\log(n^2)}{n^2} \rightarrow \ell$, per l'Osservazione 2.1.19, si ha che $\ell = 0$. Più in generale, si può provare che $\frac{\log^p n}{n^q} \rightarrow 0$ per ogni $p \in \mathbf{R}$, $q > 0$.

Usando la disuguaglianza 2.2.6 si ottiene un altro limite notevole.

Esempio 2.3.5 Proviamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Scriviamo $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$, e applichiamo la disuguaglianza 2.2.6:

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

da cui $x_n^2 \leq 2/n \rightarrow 0$ e quindi $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Vediamo ora due limiti notevoli riguardanti le funzioni trigonometriche.

Esempio 2.3.6 Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione infinitesima. Allora

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Dimostriamo prima (i). Dato che $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, vale la seguente proprietà

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq |\sin a_n| \leq |a_n|,$$

dove $0 \xrightarrow{n} 0$ e $a_n \xrightarrow{n} 0$. Per il secondo teorema di confronto 2.1.10 possiamo concludere che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = 0$. Applicando (i) e il Teorema sulle operazioni con i limiti 2.1.7 otteniamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2 \sin^2(a_n/2)) = 1$.

Dimostriamo ora (ii). Poiché $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione infinitesima possiamo supporre, per semplicità, che $0 < a_n < \pi/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Ricordando che $0 < \sin x < x < \tan x$ per ogni $0 < x < \pi/2$, ne segue che

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < \sin a_n < a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$$

e quindi

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < \frac{\cos a_n}{\sin a_n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sin a_n}.$$

Moltiplicando per $\sin a_n (> 0)$, otteniamo che

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1,$$

dove $\cos a_n \xrightarrow{n} 1$ e $1 \xrightarrow{n} 1$. Sempre per il Teorema 2.1.10 concludiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$.

CAPITOLO 3

SERIE NUMERICHE

Trattiamo ora il problema di associare ad una successione (infinita) di numeri reali una procedura che generalizzi il calcolo della somma così come si esegue su un numero finito di termini. Ovviamente, non è possibile *neanche in linea di principio* “sommare fra loro infiniti numeri” e quindi bisognerà fare ricorso ancora una volta al concetto di limite. Iniziamo, come sempre, col definire l’oggetto del nostro discorso, cioè le serie numeriche. Studieremo nel corso di Analisi matematica II il caso più generale delle serie di funzioni.

3.1 Serie, convergenza, convergenza assoluta

Definizione 3.1.1 *Data la successione reale $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$, si dice serie di termine generale a_k l’operazione che associa alla successione $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definita per ogni $n \in \mathbf{N}$ da*

$$(3.1.1) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

che si dice successione delle somme parziali della serie. La serie di termine generale a_k si denota con la scrittura

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Notiamo che la scrittura introdotta per denotare le serie, facendo uso del simbolo di sommatoria, evoca il problema descritto all’inizio, ma *non denota una somma*.

Osservazione 3.1.2 *La successione delle somme parziali si dice anche *successione delle ridotte*, e si può definire per ricorrenza così*

$$(3.1.2) \quad s_0 = a_0, \quad s_n = s_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1.$$

Vediamo ora qual è la proprietà più rilevante delle serie.

Definizione 3.1.3 Si dice che la serie di termine generale a_k è convergente se esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

In caso affermativo, il valore di tale limite si dice *somma* della serie.

Vediamo una prima proprietà delle serie convergenti; intuitivamente, è naturale aspettarsi che, se una serie converge, il termine generale debba diventare sempre più piccolo. Quest'idea è formalizzata nel seguente enunciato.

Proposizione 3.1.4 Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente allora $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

DIM. Per definizione, dire che la serie data converge equivale a dire che la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle ridotte converge; ma allora, detta S la somma della serie, si ha

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1},$$

da cui, essendo il limite finito,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

QED

La proposizione precedente esprime una condizione solo *necessaria* per la convergenza di una serie. Essa non è però sufficiente, come mostra l'Esempio 3.2.2.

Osservazioni 3.1.5

1. Notiamo che la condizione di convergenza per la serie di termine generale a_k è l'esistenza del limite di *un'altra* successione, quella delle ridotte $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Il nome *somma* riservato al limite delle somme parziali, quando esiste finito, evoca di nuovo l'idea di generalizzare la somma tra numeri. In realtà non si tratta di una *somma* (cosa impossibile, come già osservato) ma di un *limite*.
3. Se la serie di termine generale a_k non è convergente, può accadere che il limite delle somme parziali sia infinito o non esista. Si dirà in tal caso che la serie è

- *positivamente divergente* se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$;
- *negativamente divergente* se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$;
- *indeterminata* se il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste.

4. Se la serie di termine generale a_k è convergente, la sua somma si denota con

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

e lo stesso simbolo si usa anche per indicare che la serie è divergente positivamente, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

o negativamente, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty.$$

Tale simbolo assume quindi due significati diversi (la serie o la sua somma), ma si vedrà che questo non genera alcuna confusione; infatti, assegnando una serie si pone naturalmente il problema di sapere se essa sia convergente o no, e, in caso affermativo, di determinarne la somma.

5. Si dice *carattere* della serie la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.
6. Se si modifica un numero *finito* di termini della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non se ne altera il carattere. In altri termini, due serie che differiscono per un numero finito di termini hanno lo stesso carattere. Naturalmente, esse *non hanno in generale la stessa somma*.
7. Dati una serie $\sum_k a_k$ e un numero reale $c \neq 0$, si può considerare la serie $\sum_k (ca_k)$. Ovviamente, questa ha lo stesso carattere della $\sum_k a_k$ e, in caso di convergenza, la sua somma è il prodotto di c per la somma della serie $\sum_k a_k$. In particolare, studieremo le serie a termini positivi, ma in realtà è chiaro che la classe a cui si riferiranno tutti i risultati è quella delle *serie a termini di segno costante* e non importa se tale segno sia $+$ o $-$.
8. Il discorso è più delicato per le serie che sono *somma di due serie*. Per il momento, quello che possiamo dire è che se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ è convergente, allora anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ è convergente, e questo segue subito dal teorema sulla somma dei limiti applicato alle successioni delle ridotte. Invece, se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ *non* è convergente, allora la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ *non può convergere*. Infatti, applicando il risultato precedente alle serie $\sum_k (a_k + b_k)$ e $\sum_k (-a_k)$ dedurremmo che $\sum_k b_k$ converge, che è contrario all'ipotesi.
9. Accenniamo rapidamente alle serie *a termini complessi*. Non c'è niente di nuovo, dal momento che, data la serie di termine generale $z_k = a_k + ib_k$, il suo comportamento è determinato dal comportamento delle due serie reali di termine generale a_k e b_k .

Ovviamente, non ci sono serie complesse divergenti, ma solo convergenti (se $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergono entrambe: in tal caso $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{\infty} b_k$) e non convergenti (se almeno una tra $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ non converge).

Il seguente risultato segue subito dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

Teorema 3.1.6 (Criterio di Cauchy per le serie) *La convergenza della serie $\sum_k a_k$ è equivalente alla validità della seguente condizione di Cauchy:*

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \nu > 0 \text{ tale che } \left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| < \varepsilon \text{ per ogni } p \in \mathbf{N}.$$

DIM. Ricordando il criterio di Cauchy per le successioni 2.1.22, basta applicarlo alla successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ delle ridotte, e si ha che $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n \geq \nu$ implica $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ per ogni $p \in \mathbf{N}$. A questo punto, scelto $n = \nu$, resta solo da osservare che

$$|s_{\nu+p} - s_{\nu}| = \left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right|.$$

QED

Studiamo in dettaglio un esempio molto importante che sarà di guida in numerose applicazioni.

Esempio 3.1.7 Per ogni $x \in \mathbf{R}$, consideriamo la serie di termine generale x^k , cioè la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k;$$

essa è detta *serie geometrica di ragione x*. È uno dei (pochi) casi in cui si riescono a calcolare esplicitamente, al variare di x , le somme parziali s_n . Anzi, è in realtà un lavoro già fatto: nell'Esempio 2.2.4 abbiamo ottenuto la formula

$$(3.1.3) \quad s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1,$$

(per $x = 1$ è ovvio che $s_n = n + 1$ e la serie è positivamente divergente). Possiamo allora facilmente calcolare il limite della successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e determinare il carattere della serie geometrica. Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \begin{cases} \text{non esiste} & x \leq -1 \\ = \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ = +\infty & x \geq 1 \end{cases}$$

e quindi la serie geometrica di ragione x converge se e solo se $-1 < x < 1$, diverge positivamente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x \leq -1$.

Introduciamo ora la nozione di *convergenza assoluta*, più forte della convergenza semplice.

Definizione 3.1.8 (Convergenza assoluta) *Si dice che la serie $\sum_k a_k$ converge assolutamente se la serie $\sum_k |a_k|$ converge.*

Vediamo che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Proposizione 3.1.9 *Se $\sum_k |a_k|$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge.*

Dim. Usiamo il criterio di convergenza di Cauchy. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Poiché per la disuguaglianza triangolare (1.1.4) risulta

$$\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| \leq \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} |a_k|$$

in corrispondenza dello stesso ν si ha pure

$$\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

e la tesi segue usando l'altra implicazione del criterio di Cauchy. $\square$

Vedremo nell'Osservazione 3.3.2.4 che invece esistono serie che convergono semplicemente ma non assolutamente.

3.2 Serie a termini positivi

Tra le serie, hanno un posto di rilievo quelle i cui termini hanno segno costante. Per fissare le idee (vedi Osservazione 3.1.5.7), supponiamo che i termini delle serie che consideriamo siano tutti positivi. Tali serie, dette per l'appunto *serie a termini positivi*, sono particolarmente importanti anche in relazione alla proprietà espressa dalla Proposizione 3.1.9: infatti, studiare la convergenza assoluta di una qualunque serie $\sum_k a_k$ consiste nello studiare la convergenza della serie a termini positivi $\sum_k |a_k|$ e, se la serie risulta assolutamente convergente, resta provata anche la convergenza semplice, sicché il problema della convergenza è completamente risolto. Inoltre, per le serie a termini positivi esistono numerosi criteri di convergenza. Una prima loro proprietà è la seguente.

Proposizione 3.2.1 *Una serie a termini positivi può essere convergente o positivamente divergente, ma non è mai indeterminata. In particolare, una serie a termini positivi è convergente se e solo se la successione delle sue ridotte è limitata.*

DIM. Data la serie $\sum_k a_k$, se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ allora la successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ delle ridotte è monotona crescente, perché

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

e quindi, per il Teorema fondamentale delle successioni monotone (Teorema 2.1.16), ammette limite, pari a $\sup_n s_n$. Segue che la serie data non può essere indeterminata, ed è positivamente divergente se $\sup_n s_n = +\infty$, è convergente se $\sup_n s_n$ è finito, cioè se e solo se la successione delle ridotte è limitata. **QED**

Studiamo ora una serie di fondamentale importanza, detta *serie armonica*. In particolare, essa è una serie che non converge, malgrado il suo termine generale tenda a 0. Questo, come già sottolineato, mostra che la condizione nella Proposizione 3.1.4 è *solo necessaria* per la convergenza di una serie, ma non sufficiente.

Esempio 3.2.2 (Serie armonica) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

detta *serie armonica*, è positivamente divergente. Infatti, essendo una serie a termini positivi, per la Proposizione 3.2.1 esiste il limite della successione delle ridotte,

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Proviamo che $S = +\infty$. In accordo con l'Osservazione 2.1.19, possiamo conoscere S calcolando il limite di una qualsiasi successione estratta da $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Scegliamo l'estratta $(s_{2^k})_{k \in \mathbf{N}}$, cioè la sottosuccessione della $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ottenuta arrestandosi di volta in volta quando l'indice è una potenza di 2. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1} \frac{1}{2^j} \\ &= 1 + k\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Per quanto detto, l'intera successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ delle ridotte tende a $+\infty$, e quindi la serie armonica diverge positivamente.

Per le serie a termini positivi vale il seguente criterio di confronto.

Teorema 3.2.3 (Criterio di confronto) *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, e supponiamo che esista $\nu > 0$ tale che $a_k \leq b_k$ per ogni $k > \nu$. Allora:*

1. *se $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;*
2. *se $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge.*

DIM. Poiché, come abbiamo visto, la convergenza di una serie non cambia modificando un numero finito di termini, possiamo supporre che $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ e non solo per $k \geq \nu$. Chiamando $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ le successioni delle ridotte di $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ rispettivamente, ponendo cioè

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_k,$$

entrambe le successioni $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sono crescenti e risulta evidentemente che $s_n \leq t_n$ per ogni n . La tesi allora segue dalla Proposizione 3.2.1.

Infatti, se $\sum_k b_k$ converge, la successione $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è limitata, quindi lo è anche la $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e la serie $\sum_k a_k$ converge e questo prova 1.

Viceversa, se $\sum_k a_k$ diverge, allora (per definizione) la successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge, ed ugualmente diverge la $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Segue che $\sum_k b_k$ diverge e questo prova 2. $\overline{QED}$

Una semplice applicazione della teoria vista fin qui, basata sulla serie geometrica, è nel seguente esempio.

Esempio 3.2.4 (Sviluppi decimali) Abbiamo tutti familiarità con la rappresentazione decimale (anche con infinite cifre, si pensi a numeri come $\sqrt{2}$, e o π) dei numeri reali, di cui la conoscenza delle serie numeriche dà una completa spiegazione. Un numero reale x si può rappresentare in forma decimale così:

$$(3.2.4) \quad x = n, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$$

ove $n \in \mathbf{Z}$ è la *parte intera*, le cifre a_k , numeri interi compresi tra 0 e 9, costituiscono la *parte decimale* di x . La scrittura (3.2.4) ha il significato dell'uguaglianza

$$(3.2.5) \quad x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k},$$

che è coerente con il linguaggio usuale, secondo cui a_1 sono i *decimi*, a_2 i *centesimi*, a_3 i *millesimi*, eccetera. Notiamo che siccome $a_k \leq 9$ per ogni k , risulta $\frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$. Quest'ultimo è il termine generale della serie geometrica di ragione $\frac{1}{10} < 1$ (moltiplicato

per 9), che converge. Per confronto, *tutte* le serie del tipo (3.2.5) che danno gli sviluppi decimali convergono. Come applicazione, si possono dedurre senza difficoltà le proprietà degli sviluppi decimali *periodici* in relazione alla rappresentazione frazionaria. Il più semplice esempio è l'uguaglianza $1 = 0, \overline{9}$, che si ottiene sommando la serie corrispondente:

$$0, \overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = 1.$$

In particolare, questo mostra che lo sviluppo decimale in generale non è unico. Più in generale, la stessa teoria si applica agli *sviluppi in base b qualunque*: dato un numero naturale b (i più usati in questo contesto sono, oltre a 10, le potenze di 2), la corrispondente rappresentazione in base b è data dalla serie

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k},$$

dove stavolta le cifre a_k sono interi compresi tra 0 e $b - 1$ e la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{b} < 1$.

Osservazione 3.2.5 Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esistano $\nu > 0$ e due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq c_2$$

per $k \geq \nu$. Allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere.

Infatti, se $\sum_k a_k$ diverge o $\sum_k b_k$ converge, la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle disuguaglianze

$$a_k \leq c_2 b_k,$$

mentre se $\sum_k a_k$ converge o $\sum_k b_k$ diverge la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle disuguaglianze

$$c_1 b_k \leq a_k.$$

Un risultato che si deduce facilmente dal criterio di confronto è il seguente criterio, basato sul calcolo di un limite.

Teorema 3.2.6 (Criterio di confronto asintotico) Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esista

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = c.$$

Allora:

1. se $0 < c < +\infty$ allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere;

2. se $c = 0$ e $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;
3. se $c = 0$ e $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge;
4. se $c = +\infty$ e $\sum_k a_k$ converge allora anche $\sum_k b_k$ converge;
5. se $c = +\infty$ e $\sum_k b_k$ diverge allora anche $\sum_k a_k$ diverge.

DIM. Per il punto 1, osserviamo che, usando la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{c}{2}$, per k abbastanza grande risulta

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}c$$

e quindi

$$\frac{c}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}c b_k$$

e il risultato segue dall'osservazione 3.2.5.

Per i punti 2 e 3, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \leq \varepsilon b_k$$

e la tesi segue dal Criterio di confronto.

Analogamente, per i punti 4 e 5, fissato un $M > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \geq M b_k$$

e la tesi segue ancora dal Criterio di confronto. $\square$

Presentiamo un ulteriore criterio di convergenza per le serie a termini positivi, noto come *criterio di condensazione* (in realtà ne esistono molti altri che tralasciamo), di cui vedremo l'utilità nell'Esempio 3.2.8. In un certo senso, è la forma astratta del ragionamento seguito nell'Esempio 3.2.2.

Teorema 3.2.7 *Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri positivi. Allora le due serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k}$$

hanno lo stesso carattere.

Non riportiamo la dimostrazione del criterio, ma lo applichiamo negli esempi che seguono.

Esempio 3.2.8

1. Consideriamo la serie armonica $\sum 1/k$ e applichiamo il criterio di condensazione. Risulta che essa converge se e solo se la serie

$$\sum_k 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = \sum \frac{1}{2}$$

converge. Poiché quest'ultima chiaramente non converge (il suo termine generale non tende a 0), non converge neanche la serie armonica.

2. Consideriamo la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora la condizione necessaria 3.1.4 è banalmente violata e la serie non converge. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di condensazione e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k,$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$, essendo una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$.

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^{\alpha} k}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora vale la relazione $\frac{1}{k \log^{\alpha} k} \geq \frac{1}{k}$ e quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di condensazione e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1}{2^k \log^{\alpha}(2^k)} = \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

4. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

Applicando il Criterio di condensazione, se ne può determinare il carattere studiando la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{(k \log 2)^{k \log 2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k^{\log 2} (\log 2)^{\log 2}} \right)^k$$

che converge per confronto con la serie geometrica, dal momento che (per esempio)

$$\frac{2}{k^{\log 2}(\log 2)^{\log 2}} \leq \frac{1}{2}$$

per k abbastanza grande (il primo membro tende a 0).

Si può dare un criterio di convergenza basato sul confronto con le serie armoniche generalizzate.

Corollario 3.2.9 *Data la serie a termini positivi $\sum_k a_k$, se esiste finito*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\alpha a_k = c > 0$$

allora $\sum_k a_k$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

DIM. Il criterio di confronto asintotico (Teorema 3.2.6) implica che $\sum_k a_k$ e $\sum_k k^{-\alpha}$ hanno lo stesso carattere, quindi il risultato segue subito usando i risultati dell'Esempio 6.4.18.

□

Presentiamo ora due utili criteri di convergenza, basati sul confronto con la serie geometrica.

Teorema 3.2.10 (Criterio della radice) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tali che $\sqrt[k]{a_k} \leq h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ per infiniti valori di k allora la serie non converge.*

DIM. Dall'ipotesi segue immediatamente che $a_k \leq h^k$ e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Viceversa, se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ per infiniti valori di k allora la condizione $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non converge.

□

Teorema 3.2.11 (Criterio del rapporto) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece esiste $\nu > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ diverge.*

DIM. Supponiamo per semplicità che sia $\nu = 0$. Dall'ipotesi segue la disuguaglianza

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq h^k a_0$$

e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Se invece $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per ogni k allora $a_{k+1} \geq a_k$ per ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere.

□

I due precedenti criteri hanno una versione che è spesso utile ed è basata sul calcolo di un limite, che può risultare più semplice della ricerca di un maggiorante.

Corollario 3.2.12 Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;
2. se $\ell > 1$ allora la serie diverge;
3. se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.

DIM. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\sqrt[k]{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.10.

Se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ allora $a_k \geq 1$ per ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere.

Infine, per provare il punto 3 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e la seconda converge. $\square$

Corollario 3.2.13 Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;
2. se $\ell > 1$ allora la serie diverge;
3. se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.

DIM. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.11.

Se $\ell \geq 1$ allora $a_k \geq a_0 > 0$ per ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere.

Infine, per provare il punto 3, come per il Corollario 3.2.12 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e la seconda converge. $\square$

Osservazione 3.2.14 Sia data la successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, con $a_k > 0$ per ogni k . Si può dimostrare il seguente risultato:

Se esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

allora esiste anche il $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ e vale ℓ .

Di conseguenza, se si deve studiare la serie $\sum_k a_k$ e il criterio del rapporto sotto forma di limite dà $\ell = 1$, è inutile ritentare col criterio della radice, che non può che fornire lo stesso risultato. D'altra parte, segnaliamo che può esistere il limite della radice senza che esista quello del rapporto.

3.3 Serie a termini di segno variabile

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso vari criteri di convergenza per serie a termini positivi, che, come abbiamo già osservato, sono anche criteri di convergenza assoluta per serie a termini di segno qualunque. Forse val la pena di spiegare che per “serie a termini di segno qualunque” si intendono serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k a_k$$

dove $a_k > 0$ per ogni k e gli ε_k possono assumere i valori 1 e -1 con *qualunque* alternanza di segno. Per tali serie non esiste una teoria, né esistono criteri di convergenza *semplice*. Pertanto, tutto ciò che si può fare è studiare caso per caso ciascuna singola serie (il che può essere molto difficile, e quindi esula dagli scopi di un corso introduttivo come questo) oppure studiare solo la convergenza assoluta con i metodi del paragrafo precedente, ben sapendo che se la serie non è assolutamente convergente resta aperto il problema di stabilire se sia o no semplicemente convergente.

Un caso particolare delle serie a termini di segno variabile è quello delle *serie a segni alterni*, cioè il caso in cui $\varepsilon_k = (-1)^k$. Come dice la locuzione appena introdotta, sono serie a termini di segno variabile, in cui però la legge della variazione di segno ε_k non è arbitraria, come nel caso generale, ma segue una regola semplicissima, che consiste nell’alternarsi dei segni $+$ e $-$. Per queste serie esiste un semplice criterio di convergenza, ma prima di presentarlo ci sembra opportuno osservare che, malgrado siano di un tipo particolarissimo, si incontrano molto frequentemente nelle applicazioni (per esempio, come si vedrà, in connessione con le serie di Fourier).

Teorema 3.3.1 (Criterio di Leibniz) *Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri strettamente positivi, e supponiamo che*

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$
2. $a_k \geq a_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Allora la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

è semplicemente convergente. Inoltre, se la serie è convergente, detta S la sua somma, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(3.3.6) \quad \left| S - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

DIM. Consideriamo le due successioni estratte dalla successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ delle somme parziali della serie corrispondenti agli indici pari e dispari rispettivamente, e notiamo che sono monotone a causa della decrescenza della successione $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned} s_{2p} &= \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k a_k - a_{2p-1} + a_{2p} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k a_k = s_{2p-2} \\ s_{2p+1} &= \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k a_k + a_{2p} - a_{2p+1} \\ &\geq \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k a_k = s_{2p-1} \end{aligned}$$

Per il Teorema fondamentale sulle successioni monotone entrambe le estratte $(s_{2p})_{p \in \mathbf{N}}$ e $(s_{2p+1})_{p \in \mathbf{N}}$ ammettono limite, siano S_p ed S_d rispettivamente. Siccome l'unione degli indici delle due estratte è tutto l'insieme dei numeri naturali, se proviamo che i due limiti sono finiti e che $S_p = S_d$, risulterà provata la convergenza dell'intera successione $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e quindi della serie. Iniziamo a vedere che i due limiti sono finiti. Siccome s_{2p} è decrescente ed s_{2p+1} è crescente, basta trovare un minorante di s_{2p} e un maggiorante di s_{2p+1} ; risulta

$$\begin{aligned} s_{2p} &= s_{2p-1} + a_{2p} \geq s_{2p-1} \geq s_1 \\ s_{2p+1} &= s_{2p} - a_{2p+1} \leq s_{2p} \leq s_0 = a_0 \end{aligned}$$

per ogni $p \in \mathbf{N}$, e quindi sia S_p che S_d sono finiti. D'altra parte, per il teorema sulla somma dei limiti e l'ipotesi 1:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = S_d - S_p$$

da cui segue evidentemente che $S_p = S_d$ e che la serie converge. Detta allora S la sua somma, si ha

$$S = S_p = S_d = \inf_p s_{2p} = \sup_p s_{2p+1}$$

e quindi per ogni $p \in \mathbf{N}$

$$s_{2p+1} = s_{2p} - a_{2p+1} \leq S \leq s_{2p} \quad \implies \quad 0 \leq s_{2p} - S \leq a_{2p+1}$$

e analogamente

$$s_{2p+1} \leq S \leq s_{2p+2} = s_{2p+1} + a_{2p+2} \quad \implies \quad 0 \leq S - s_{2p+1} \leq a_{2p+2},$$

sicché in ogni caso si ha (3.3.6).

QED

- Osservazioni 3.3.2** 1. Naturalmente, la scelta che i termini pari siano positivi e quelli dispari negativi è una delle due possibili, l'altra essendo ovviamente del tutto equivalente. Inoltre, osserviamo che come al solito le condizioni 1 e 2 del Criterio di Leibniz debbono essere verificate *da un certo indice in poi*, per poter applicare il criterio stesso, e non necessariamente *per tutti gli indici*.
2. L'errore più frequente nell'applicazione del criterio di Leibniz è l'omissione della verifica che la successione $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sia decrescente. Questa verifica è invece essenziale, dal momento che, ovviamente, esistono successioni positive infinitesime *non decrescenti*. Per avere un esempio esplicito, consideriamo la successione (infinitesima ma non decrescente)

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \frac{1}{k^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per l'Osservazione 3.1.5.8, la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ non può convergere, perché si può scrivere come differenza tra la serie $\sum_k \frac{1}{2k}$, che diverge, e la serie $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2}$, che converge.

3. Si possono aggiungere alcune interessanti considerazioni generali all'esempio precedente (vedi anche il Teorema 3.3.3 seguente): se la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ converge semplicemente ma *non* converge assolutamente, allora né la serie $\sum_k a_{2k}$ dei termini positivi né la serie $\sum_k a_{2k+1}$ dei termini negativi possono convergere. Infatti, una sola di queste ultime non può convergere (l'argomento per provare questa affermazione è quello dell'esempio precedente), e se convergessero entrambe si avrebbe convergenza assoluta della serie di partenza.
4. Ora che abbiamo un criterio di convergenza semplice, possiamo vedere un esempio di serie semplicemente convergente che non è assolutamente convergente. Basta considerare la *serie armonica a segni alterni* $\sum_k (-1)^k \frac{1}{k}$, che converge semplicemente per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente, come abbiamo già visto.

Terminiamo il capitolo con delle considerazioni che dovrebbero far capire quanta distanza ci sia tra le serie e le somme finite. Una delle proprietà più "ovvie" delle somme finite è la proprietà commutativa (Assioma 2 dei numeri reali). È naturale domandarsi se essa valga anche per le serie. Per formulare correttamente il problema bisogna introdurre il concetto di *permutazione dei termini di una serie*. Date la serie $\sum_k a_k$ ed una funzione bigettiva $\pi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (permutazione), si dice *serie ottenuta permutando i termini di* $\sum_k a_k$ *secondo* π *la serie* $\sum_k a_{\pi(k)}$. Notiamo che i valori assunti dalla successione $(a_{\pi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ sono *gli stessi* di $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$, e *vengono assunti lo stesso numero di volte*, per cui se avessimo a che fare con una somma finita passare da $\sum_k a_k$ a $\sum_k a_{\pi(k)}$ si ridurrebbe a "cambiare l'ordine degli addendi", ed è ben noto che in tal caso "la somma non cambia". Per le serie infinite le cose vanno in modo completamente diverso, a meno che non si abbia convergenza assoluta.

Teorema 3.3.3 *Sia $\sum_k a_k$ una serie semplicemente convergente. Allora:*

- (i) *se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente e la sua somma è S , allora per ogni permutazione π la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ converge assolutamente ed ha per somma S .*
- (ii) *se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge assolutamente, allora nessuna serie permutata converge assolutamente, ed inoltre per ogni $S \in \mathbf{R}$ esiste una permutazione π tale che la serie permutata $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ converga (semplicemente) ad S .*

Non presentiamo la dimostrazione di questo risultato, che per altro non richiede strumenti che vadano oltre la presente trattazione, ma ci limitiamo a sottolineare ancora la differenza tra le somme finite e le serie non assolutamente convergenti: queste, cambiando l'ordine degli addendi, possono dare *qualunque* somma!

CAPITOLO 4

LIMITI E CONTINUITÀ

In questo capitolo introduciamo dapprima il concetto di limite di funzioni reali di una variabile reale e ne studiamo le principali proprietà, e poi trattiamo le funzioni continue.

4.1 Limiti di funzioni

Per introdurre il concetto di limite è necessario dare la seguente

Definizione 4.1.1 *Siano $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \emptyset$, e $x_0 \in \mathbf{R}$.*

1. *Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione di X se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

2. *Diciamo che x_0 è un punto isolato di X se*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tale che } X \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[= \{x_0\}.$$

3. *Diciamo che x_0 è interno ad X se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 contenuto in X .*

Osservazione 4.1.2

1. Se x_0 è un punto di accumulazione di X , allora x_0 può o no appartenere ad X .
2. Se x_0 è un punto isolato di X , allora $x_0 \in X$.
3. x_0 non può essere un punto di accumulazione di X e anche un punto isolato di X .
4. Se $X = \cup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ dove (a_k, b_k) denota un intervallo qualsiasi di estremi a_k e b_k , allora X non ha punti isolati e l'insieme dei punti di accumulazione di X è dato da $\overline{X} = \cup_{k=1}^n [a_k, b_k]$.
Se, invece, $X = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ dove $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione convergente a $x_0 \in \mathbf{R}$ e tale che $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora X ha x_0 come unico punto di accumulazione e l'insieme dei punti isolati di X è X stesso.

5. Si può dimostrare che x_0 è un punto di accumulazione di X se, e solo se, esiste $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \xrightarrow{n} x_0$.
6. Se X è un intervallo di estremi a e b , l'insieme dei punti interni di X è l'intervallo aperto $]a, b[$, indipendentemente dal fatto che gli estremi a e b appartengano o no ad X .

Possiamo ora definire il concetto di limite di funzioni reali di una variabile reale.

Definizione 4.1.3 Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto d'accumulazione di X . Sia $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione.

1. Diciamo che la funzione f ha limite uguale a $\ell \in \mathbf{R}$ per x che tende a x_0 , e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. Diciamo che la funzione f ha limite uguale a $+\infty$ ($-\infty$) per x che tende a x_0 , e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($= -\infty$), se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{aligned} & f(x) > M \\ & (f(x) < -M). \end{aligned}$$

Poiché molti risultati che vedremo valgono sia che i limiti considerati siano reali, oppure $+\infty$ o $-\infty$, introduciamo la seguente notazione, che ci consentirà enunciati più sintetici: poniamo $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Osservazione 4.1.4 Nella definizione di limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ il valore di f nel punto x_0 non viene considerato, dal momento che si richiede sempre $|x - x_0| > 0$. In effetti, esso è irrilevante. Per esempio, data la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

è facile dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, osserviamo che, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \varepsilon;$$

posto $\delta = \varepsilon > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbf{R} : 0 < |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Vediamo qualche altro semplice esempio.

Esempi 4.1.5

1. Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. Per dimostrare tale affermazione, osserviamo che, per ogni $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato sopra la seguente disuguaglianza: $|\sin y| \leq |y|$ per ogni $y \in \mathbf{R}$ già usata nell'Esempio 2.3.6). Fissato $\varepsilon > 0$, ne segue che

$$\exists \delta = \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbf{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon .$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Fissato $M > 0$, osserviamo che

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{M}} .$$

Allora, posto $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}} > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : 0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M .$$

Definizione 4.1.6 Siano $X \subseteq \mathbf{R}$ non limitato superiormente (non limitato inferiormente) e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione.

1. Diciamo che la funzione f ha limite uguale a $\ell \in \mathbf{R}$ per x che tende a $+\infty$ ($-\infty$), e scriviamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ (x < -K)$$

2. Diciamo che la funzione f ha limite uguale a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ ($-\infty$), e scriviamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$), se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists K = K(M) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K \Rightarrow f(x) > M \\ (x < -K)$$

3. Diciamo che la funzione f ha limite uguale a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ ($-\infty$), e scriviamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$), se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists K = K(M) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K \Rightarrow f(x) < -M \\ (x < -K)$$

Esempi 4.1.7

1. (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ e (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi/2$. Per dimostrare la (i) procediamo come segue.

Fissato $0 < \varepsilon < \pi/2$, osserviamo che

$$\begin{aligned} |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon &\iff \pi/2 - \varepsilon < \arctan x < \pi/2 + \varepsilon \\ &\iff \pi/2 - \varepsilon < \arctan x \\ &\iff \tan(\pi/2 - \varepsilon) < x. \end{aligned}$$

Posto $K = \tan(\pi/2 - \varepsilon) > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbf{R} : x > K \Rightarrow |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon.$$

(ii) si dimostra in modo analogo.

2. Per ogni $a > 1$, (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ e (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. Per dimostrare la (i) procediamo come segue.

Fissato $M > 0$, osserviamo che

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad a^x > M \iff x > \log_a M;$$

posto $K = \max\{\log_a M, 0\} > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbf{R} : x > K \Rightarrow a^x > M.$$

(ii) si dimostra in modo analogo.

3. In modo analogo, si dimostra che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Adesso diamo un teorema fondamentale che permette di ricondurre il concetto di limite ora introdotto a quello del limite di successioni.

Teorema 4.1.8 (Caratterizzazione dei limiti con successioni) Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

DIM. Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui $\ell \in \mathbf{R}$.

“ $\Rightarrow$ ”: Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi

$$(4.1.1) \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tale che } x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ una successione convergente a x_0 . Allora, in corrispondenza di δ

$$(4.1.2) \quad \exists \nu = \nu(\delta) \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbf{N} : n \geq \nu \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

sicché per (4.1.1) risulta

$$\forall n \in \mathbf{N} : n \geq \nu \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , possiamo così concludere che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

“ $\Leftarrow$ ”: Supponiamo, per assurdo, che f non abbia limite ℓ per x tendente ad x_0 , cioè che

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0 \exists x \in X \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}.$$

Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbf{N}$ possiamo scegliere $x_n \in X$ tale che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$.

Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ per la quale si ha $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, e quindi per il Teorema 2.1.10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$. Ma $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi la successione $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ non converge a ℓ ed abbiamo ottenuto così una contraddizione. **QED**

Osserviamo che vale una analoga caratterizzazione per limiti di funzioni con x tendente a $+\infty$ ($-\infty$). Infatti, si può dimostrare

Teorema 4.1.9 Siano $X \subset \mathbf{R}$ un insieme non limitato superiormente (inferiormente) e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$$

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell \right).$$

Osservazione 4.1.10 I Teoremi 4.1.8 e 4.1.9 forniscono un utile strumento per riconoscere se una data funzione $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ non ammette limite per x che tende a x_0 (o a $\pm\infty$); basta infatti determinare due successioni $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ convergenti a x_0 tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$.

Esempio 4.1.11 $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Infatti, posto $x_n = \pi/2 + 2n\pi$ e $y_n = 2n\pi$ per ogni n , si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$, ma $\sin x_n = 1$ e $\sin y_n = 0$ per ogni n e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin x_n = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin y_n$. Analogamente, non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

Esempio 4.1.12 Nel Capitolo 2.1 abbiamo dimostrato che, per ogni successione infinitesima $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$. Applicando il Teorema 4.1.8 possiamo allora concludere che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Per semplicità i teoremi che adesso daremo sono enunciati solo nel caso in cui $x_0 \in \mathbf{R}$ sia un punto di accumulazione di X . Ma gli stessi risultati continuano a valere se consideriamo limiti per x che tende a $\pm\infty$.

Applicando il Teorema 4.1.8 deduciamo subito che

Teorema 4.1.13 (Unicità del limite) *Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X . Sia $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione tale che*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Allora il limite è unico.

DIM. Supponiamo, per assurdo, che risulti anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell'$ con $\ell \neq \ell'$.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$. Per il Teorema 4.1.8 e per ipotesi deduciamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell'$. Per l'unicità del limite per le successioni ne segue che $\ell = \ell'$, e otteniamo una contraddizione. $\square$

Il Teorema 4.1.8 permette di estendere facilmente anche i risultati riguardanti le operazioni con i limiti di successioni ai limiti di funzioni. Si ha infatti:

Teorema 4.1.14 *Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X . Siano $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni tali che*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbf{R}.$$

Allora

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m;$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m;$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m},$ purché $m \neq 0$.

Questi risultati si estendono al caso in cui ℓ o m siano $\pm\infty$, purché le operazioni indicate non diano luogo a forme indeterminate.

DIM. A titolo di esempio, dimostriamo solo 1. Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$. Per ipotesi e per il Teorema 4.1.8 abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = m.$$

Per il Teorema 2.1.7 possiamo allora concludere che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \ell + m$. Per l'arbitrarietà della successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la tesi segue. $\square$

Esempi 4.1.15 Applicando il Teorema 4.1.14 e ricordando i risultati degli esempi del Capitolo 2, deduciamo immediatamente quanto segue.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

Infatti, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

e quindi, per il Teorema 4.1.14 e l'Esempio 4.1.12, possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

2. Consideriamo un polinomio:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k (a_k + a_{k-1} x^{-1} + \dots + a_2 x^{2-k} + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k}) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

3. Consideriamo una funzione razionale:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_h x^h + b_{h-1} x^{h-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_k x^k}{b_h x^h} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \text{ e } a_k \text{ e } b_h \text{ sono concordi} \\ -\infty & \text{se } k > h \text{ e } a_k \text{ e } b_h \text{ sono discordi} \\ 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{se } k = h \end{cases} \end{aligned}$$

Un risultato analogo vale per x tendente a $-\infty$.

Anche il seguente teorema può essere dimostrato applicando il Teorema 4.1.8.

Teorema 4.1.16 (Teorema sul limite della funzione composta) Siano $X, Y \subset \mathbf{R}$, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ e $g: Y \rightarrow \mathbf{R}$. Siano $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X e $y_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di Y tali che esiste $r > 0$ con $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ per qualche $r > 0$.

Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ e $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$, allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$.

Esempi 4.1.17

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Infatti, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2,$$

e quindi, per i Teoremi 4.1.14 e 4.1.16 possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

2. (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 1$.

Dimostriamo solo (i). Posto $y = \arcsin x$, risulta che y tende a 0 quando x tende a 0 e $x = \sin y$ cosicché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

In verità, tutte le proprietà dei limiti di successioni date nel Capitolo 2.1 continuano a valere per i limiti di funzioni. Infatti, risulta:

Teorema 4.1.18 (Proprietà dei limiti) Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X . Sia $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione tale che esista $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Allora

1. **[Permanenza del segno]**

(i) Se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $f(x) > 0$.

(ii) Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > 0$, allora $\ell \geq 0$.

2. **[Limitatezza locale]** Se $\ell \in \mathbf{R}$, allora esistono $r > 0$ ed $M > 0$ tali che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $|f(x)| \leq M$.

Dim. A titolo di esempio, diamo solo la dimostrazione di 2. Scelto $\varepsilon = 1$, per ipotesi esiste $\delta = \delta(1, x_0) > 0$ tale che

$$\forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$$

Posto $M = |\ell| + 1 > 0$ e $r = \delta > 0$, ne segue che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) + \ell| + |\ell| < 1 + |\ell| = M.$$

QED

Teorema 4.1.19 (Primo Teorema del Confronto) *Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X . Siano $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni tali che esistano $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$. Allora*

(i) *Se $\ell > m$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $f(x) > g(x)$.*

(ii) *Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > g(x)$, allora $\ell \geq m$.*

Teorema 4.1.20 (Secondo Teorema del Confronto) *Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione di X . Siano $f, g, h : X \rightarrow \mathbf{R}$ tre funzioni tali che*

(i) $\exists r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,

(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$.

Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Osservazioni 4.1.21

1. Anche per i limiti di funzioni vale l'implicazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|.$$

Il viceversa è vero solo nel caso in cui $\ell = 0$.

2. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ed esiste $r > 0$ tale che $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$, allora dal Secondo Teorema del Confronto 4.1.20 segue che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$, dato che $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M|f(x)|$ per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$. Quindi, per esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0,$$

malgrado i limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esistano e quindi non sia applicabile il Teorema 4.1.14.

4.2 Limite destro e limite sinistro

Introduciamo ora il concetto di limite destro e di limite sinistro. Per fare ciò è necessario dare la seguente

Definizione 4.2.1 Siano $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \emptyset$, e $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione a destra di X se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap]x_0, x_0 + \varepsilon[\neq \emptyset.$$

2. Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione a sinistra di X se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap]x_0 - \varepsilon, x_0[\neq \emptyset.$$

Osservazione 4.2.2 Osserviamo che se x_0 è un punto di accumulazione a destra o a sinistra di X , allora x_0 è anche un punto di accumulazione di X . Inoltre, un insieme X può avere punti di accumulazione solo a destra o solo a sinistra. Ad esempio, l'insieme $X = \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ ha un unico punto di accumulazione a destra che è 0; se $X = [a, b[$, tutti i punti che appartengono a $]a, b[$ sono punti di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X , mentre a è un punto di accumulazione solo a destra di X e b è un punto di accumulazione solo a sinistra di X .

Possiamo ora introdurre

Definizione 4.2.3 (Limite destro) Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione a destra di X e $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione.

1. Diciamo che la funzione f ha limite destro uguale a $\ell \in \mathbf{R}$ per x che tende a x_0 da destra, e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$, se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. Diciamo che la funzione f ha limite destro uguale a $+\infty$ ($-\infty$) per x che tende a x_0 da destra, e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ ($= -\infty$), se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \begin{aligned} & f(x) > M \\ & (f(x) < -M). \end{aligned}$$

Definizione 4.2.4 (Limite sinistro) Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ un punto di accumulazione a sinistra di X e $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione.

1. Diciamo che la funzione f ha limite sinistro uguale a $\ell \in \mathbf{R}$ per x che tende a x_0 da sinistra, e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$, se vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. Diciamo che la funzione f ha limite sinistro uguale a $+\infty$ ($-\infty$) per x che tende a x_0 da sinistra, e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ ($= -\infty$), se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \begin{aligned} &f(x) > M \\ &(f(x) < -M). \end{aligned}$$

Esempi 4.2.5

1. Data la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

risulta che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

2. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = -\infty$.

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

mentre, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

Nel caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione sia a destra che a sinistra di X , l'esistenza del limite per x che tende a x_0 dipende dall'esistenza del limite destro e sinistro, cioè

Teorema 4.2.6 *Siano $X \subset \mathbf{R}$, x_0 un punto di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Allora:*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$

Esempi 4.2.7 Per il Teorema 4.2.6 e gli esempi dati in 4.2.5 possiamo subito concludere che $\nexists \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n}$ se n è dispari, e $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ se n è pari.

Inoltre, per le funzioni monotone vale il seguente risultato, analogo al Teorema fondamentale per le successioni monotone 2.1.16.

Teorema 4.2.8 (Teorema fondamentale sul limite delle funzioni monotone)

Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione monotona. Allora valgono le seguenti proprietà.

1. Se x_0 è un punto di accumulazione a destra di X e f è crescente, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in X, x > x_0\}$.
2. Se x_0 è un punto di accumulazione a sinistra di X e f è crescente, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in X, x < x_0\}$.
3. Se x_0 è un punto di accumulazione a destra di X e f è decrescente, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in X, x > x_0\}$.
4. Se x_0 è un punto di accumulazione a sinistra di X e f è decrescente, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in X, x < x_0\}$.

Osserviamo che tutte le proprietà dei limiti di funzioni sopra introdotte continuano a valere sia per il limite destro sia per il limite sinistro.

4.3 Limiti notevoli

In questo paragrafo ricordiamo alcuni limiti per mezzo dei quali e dei risultati visti nei paragrafi precedenti si possono calcolare i limiti di funzioni più generali.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$

I limiti 1. ÷ 5. sono stati già calcolati nel paragrafo 4.1. I limiti 6. e 10. seguono applicando il Teorema di Caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8 e ricordando gli Esempi 2.3.3, 2.3.4 del Capitolo 2.

Per il calcolo del limite 7. basta osservare che, posto $y = \frac{1}{x}$ cosicché $y \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0^+$ e $y \rightarrow -\infty$ se $x \rightarrow 0^-$, risulta che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

La conclusione segue dal Teorema 4.2.6.

Il limite 8. è una immediata conseguenza di 7. perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1.$$

Infine, per verificare 9. basta porre $y = e^x - 1$ e osservare che $y \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 0$ e $x = \log(1+y)$ ottenendo così

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

4.4 Funzioni continue

Come abbiamo già osservato, il valore $f(x_0)$ è a priori slegato dal valore del $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. D'altra parte, è naturale aspettarsi che la coincidenza di tali valori possa avere conseguenze rilevanti. È così, come vedremo in questo paragrafo.

Definizione 4.4.1 *Sia $X \subset \mathbf{R}$. Sia $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Si dice che f è continua in x_0 se x_0 è un punto isolato di X oppure*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, se

$$(4.4.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \text{t. c.} \quad \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che f è continua in X se essa è continua in ogni punto di X .

Esempi 4.4.2

1. Tutte le funzioni elementari che abbiamo introdotto nel Capitolo 1 sono continue in tutto il loro insieme di definizione. Quindi, ad esempio, le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x ($a > 0$) sono continue in $\mathbf{R}$, la funzione $\log_a x$ ($1 \neq a > 0$) è definita e continua in $]0, +\infty[$, le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono definite e continue in $[-1, 1]$.

2. La funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ e non è continua nel punto 0.

Osservazione 4.4.3 Siano $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di X . Osserviamo che f non è continua in x_0 , cioè f è discontinua in x_0 , se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ con $\ell \neq f(x_0)$, oppure se $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

1. Nel caso in cui $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, con $\ell \neq f(x_0)$, diciamo che la funzione f ha una *discontinuità eliminabile* in x_0 . In particolare, la funzione $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbf{R}$ così definita

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

è continua in x_0 . Ad esempio, la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità eliminabile in 0 poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ con $1 \neq 0$.

2. Nel caso in cui $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, x_0 è un punto di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbf{R}$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbf{R}$ (ovviamente risulta $\ell_1 \neq \ell_2$), diciamo che x_0 è un *punto di discontinuità di 1ª specie* per f . In particolare, $\ell_2 - \ell_1$ si dice *salto* di f in x_0 . Ad esempio, la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ha un punto di discontinuità di 1ª specie in 0 con salto 2, dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

3. Nei rimanenti casi, cioè quando $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, o $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbf{R}$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$, o $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbf{R}$, o $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2$, etc., diciamo che x_0 è un *punto di discontinuità di 2ª specie* per f . Ad esempio, la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

ha un punto di discontinuità di 2ª specie in 0 dato che, come abbiamo visto nell'Esempio 4.1.11, il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ non esiste e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Osserviamo che, per il Teorema fondamentale sul limite delle funzioni monotone 4.2.8, le funzioni monotone possono avere solo discontinuità di 1^a specie nei punti di accumulazione sia a destra sia a sinistra del loro insieme di definizione.

Osservazione 4.4.4 Siano $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbf{R} \setminus X$ un punto di accumulazione di X . Se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell,$$

diciamo che la funzione f è *prolungabile per continuità in x_0* . In tal caso, la funzione $\bar{f}: X \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$ così definita

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0 poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = \bar{f}(x_0)$.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ è prolungabile per continuità in 0 poiché esiste finito il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Dalla definizione stessa di continuità e dai teoremi fondamentali sui limiti si deducono immediatamente le seguenti proprietà delle funzioni continue.

Teorema 4.4.5 (Proprietà delle funzioni continue) *Valgono le seguenti proprietà.*

1. **[Caratterizzazione della continuità con le successioni]** Siano $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di X . Allora f è continua in x_0 se, e solo se, per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
2. **[Permanenza del Segno]** Sia $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $x_0 \in X$ con x_0 punto di accumulazione di X . Se $f(x_0) > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[$, $f(x) > 0$.
3. **[Operazioni]** Siano $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue in $x_0 \in X$. Allora le funzioni $|f|$, $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_0 .
Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione f/g è continua in x_0 .
4. **[Continuità della funzione composta]** Siano $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $x_0 \in X$ e $g: Y \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $y_0 = f(x_0) \in Y$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0 .

Ovviamente, tutte le proprietà enunciate per funzioni continue in un punto valgono in tutto il dominio X se valgono in ciascun punto di X .

4.5 Proprietà globali delle funzioni continue

Tutte le proprietà delle funzioni continue viste nel paragrafo precedente sono relative ai singoli punti del dominio o valgono in intorno dei punti considerati, sono cioè *locali*, nel senso che dipendono dal fatto che la funzione sia continua nel punto considerato di volta in volta, indipendentemente dal comportamento della funzione negli altri punti del dominio. In questo paragrafo consideriamo funzioni continue nel loro dominio, che supponiamo essere un intervallo, e dimostriamo delle proprietà *globali* di fondamentale importanza, cioè asserzioni che riguardano l'insieme dei valori che la funzione assume nell'intero dominio, e dipendono in modo essenziale dal fatto che la funzione sia continua nell'intero dominio.

Teorema 4.5.1 (Teorema di Weierstrass) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora f è limitata ed è dotata di massimo e minimo in $[a, b]$, cioè*

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \text{ tali che } \forall x \in [a, b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

DIM. Dimostriamo che f è limitata superiormente ed è dotata di massimo in $[a, b]$.

Poniamo $L = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ e osserviamo che o $L \in \mathbf{R}$ o $L = +\infty$. In ogni caso, per le proprietà dell'estremo superiore, possiamo determinare una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset [a, b]$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$. Infatti:

1. se $L = +\infty$, allora f non è limitata superiormente (cioè l'insieme $f([a, b])$ non è limitato superiormente) e quindi, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$n \text{ non è un maggiorante di } f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_n \in [a, b] \text{ tale che } f(x_n) > n.$$

Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset [a, b]$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) > n$; ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

2. se $L \in \mathbf{R}$, allora, per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbf{N}$, in corrispondenza di $\varepsilon_n = 1/n$,

$$\exists x_n \in [a, b] \text{ tale che } L - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq L.$$

Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset [a, b]$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $L - 1/n < f(x_n) \leq L$; ne segue, per il Teorema 2.1.10, che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

In ogni caso, la successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è limitata poiché è contenuta nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass 2.1.20 esiste allora una successione $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ estratta da $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e convergente a qualche $x_0 \in [a, b]$. Per la continuità di f , ne segue che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0);$$

d'altro canto $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = L$ poiché $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione estratta da $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ che, per costruzione, tende a L . Per l'unicità del limite deduciamo che

$L = f(x_0)$ è un numero reale, e quindi che f ammette massimo (in particolare, f è limitata superiormente).

Si dimostra in modo analogo che f è limitata inferiormente ed è dotata di minimo in $[a, b]$. **QED**

Teorema 4.5.2 (Teorema dell'esistenza degli zeri) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno un $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Se, inoltre, f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora esiste un unico $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

DIM. Dato che $f(a) \cdot f(b) < 0$, possiamo supporre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora, posto

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

l'insieme A è non vuoto (poiché $a \in A$) e limitato (poiché $A \subset [a, b]$), cosicché esiste il $\sup A = x_0 \in [a, b]$. In particolare, esiste anche il $\min A = a$. Dimostriamo ora che $f(x_0) = 0$ procedendo come segue.

Se $f(x_0) > 0$, allora $a < x_0 \leq b$ e, per il Teorema della Permanenza del segno 4.4.5, esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in]x_0 - r, x_0] \subset [a, b]$ risulta $f(x) > 0$. In corrispondenza di $\varepsilon = r > 0$, per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, siccome $x_0 \notin A$, esiste $\bar{x} \in A$ tale che $x_0 - r < \bar{x} < x_0$, sicché valgono contemporaneamente $f(\bar{x}) < 0$ e $f(\bar{x}) > 0$. La contraddizione prova che $f(x_0) \leq 0$.

Se $f(x_0) < 0$, allora $a \leq x_0 < b$ e, per il Teorema della Permanenza del segno 4.4.5, esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in [x_0, x_0 + r[\subset [a, b]$, $f(x) < 0$. Ne segue che $[x_0, x_0 + r[\subset A$ e quindi x_0 non può essere l'estremo superiore di A ; otteniamo ancora una contraddizione, e quindi dev'essere $f(x_0) \geq 0$.

Pertanto, possiamo concludere che $f(x_0) = 0$.

Se f è anche strettamente monotona, allora f è iniettiva e quindi l'unicità segue immediatamente. **QED**

Più in generale, vale un risultato analogo in un qualunque intervallo, anche non chiuso o non limitato.

Corollario 4.5.3 *Siano I un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in I . Se esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = 0$.*

DIM. Per provare il corollario, basta applicare il Teorema 4.5.2 all'intervallo di estremi a e b , che per l'ipotesi che I sia un intervallo è contenuto nel dominio di f . **QED**

Esempi 4.5.4 Il Teorema dell'esistenza degli zeri 4.5.2 è un utile strumento per stabilire l'esistenza di soluzioni (e anche un'eventuale approssimazione) di equazioni non risolubili in modo esplicito. Infatti, per determinare se un'equazione del tipo $f(x) = 0$, con f funzione definita e continua in un intervallo I , ha qualche soluzione in I , è sufficiente

stabilire l'esistenza di due elementi $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Infatti, in tal caso, grazie al Corollario 4.5.3, si può subito concludere che esiste $x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x_0) = 0$. Ad esempio:

1. l'equazione $e^x + \arctan x = 0$ ha almeno una soluzione in $] -1, 0[$ perché la funzione $f(x) = e^x + \arctan x$ è definita e continua in $\mathbf{R}$, $f(-1) = e^{-1} - (\pi/4) < 0$ e $f(0) = 1 > 0$; notando che f è somma di due funzioni strettamente crescenti e quindi è a sua volta strettamente crescente, la soluzione è unica.
2. L'equazione algebrica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, con $n \in \mathbf{N}$ dispari e $a_n \neq 0$, ha almeno una soluzione reale. Supposto per fissare le idee che $a_n > 0$, la funzione $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è definita e continua in $\mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (quindi, per il Teorema della permanenza del segno, esistono $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$ tali che $p(x) < 0$ per ogni $x \leq K_1$ e $p(x) > 0$ per ogni $x \geq K_2$). Naturalmente, è essenziale che il grado del polinomio sia *dispari*. Per esempio, il polinomio $x^2 + 1$ non ha zeri in $\mathbf{R}$.

Dal Corollario 4.5.3 del Teorema dell'esistenza degli zeri 4.5.2 segue immediatamente il seguente risultato.

Teorema 4.5.5 (Teorema dei valori intermedi) *Sia I un intervallo, ed $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in I . Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ ed $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$, cioè: per ogni $y_0 \in]m, M[$ esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = y_0$.*

DIM. Fissato $y_0 \in]m, M[$, per le proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore esistono $x_1, x_2 \in I$ tali che $m < f(x_1) < y_0 < f(x_2) < M$. Posto allora $g(x) = f(x) - y_0$, la funzione g è continua in I e risulta $g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$ e $g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$. Per il Corollario 4.5.3 esiste $x_0 \in I$ tale che $g(x_0) = 0$, il che significa che $y_0 = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di y_0 , il teorema è dimostrato. **QED**

Osservazione 4.5.6 Il teorema dei valori intermedi si può riformulare dicendo che se $X \subset \mathbf{R}$ è un qualunque insieme, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua in X , ed I è un intervallo contenuto in X , allora $f(I)$ è ancora un intervallo.

Inoltre, se il dominio di f nel Teorema 4.5.5 è un intervallo chiuso e limitato, diciamo $I = [a, b]$, allora per il Teorema di Weierstrass f assume i valori m (che non è quindi solo l'estremo inferiore di f in I , ma anche il minimo), ed M (che non è quindi solo l'estremo superiore di f in I , ma anche il massimo), quindi $f([a, b]) = [m, M]$.

La continuità delle funzioni monotone può essere caratterizzata come segue.

Teorema 4.5.7 (Continuità delle funzioni monotone) *Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione monotona in I . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. f è continua in I ;

2. $f(I)$ è un intervallo.

Osservazione 4.5.8 Se in particolare $I = [a, b]$ allora possiamo dire che $f(I) = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ se f è crescente, e $f(I) = f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ se f è decrescente.

Il Teorema 4.5.7 permette di dimostrare che

Teorema 4.5.9 (Continuità della funzione inversa) Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente monotona in I . Allora la sua funzione inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ è continua in $f(I)$.

DIM. Per la continuità di f sappiamo che $f(I) = J$ è un intervallo. Di conseguenza, la funzione inversa f^{-1} è definita nell'intervallo J ed è ivi strettamente monotona con $f^{-1}(J) = I$. Dal Teorema 4.5.7 segue che f^{-1} è continua in J . $\square$

In virtù di questi ultimi risultati possiamo affermare che le funzioni inverse delle funzioni elementari sono tutte continue nel loro insieme di definizione, cioè la funzione $\log_a x$ ($1 \neq a > 0$) è continua in $]0, +\infty[$, la funzione $\arctan x$ è continua in $\mathbf{R}$, le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono continue in $[-1, 1]$, etc.

Osservazioni 4.5.10 Osserviamo che in tutti i teoremi presentati in questo paragrafo 4.5 nessuna delle ipotesi può essere rimossa. Facciamo qualche esempio.

1. Se una funzione f è continua in un intervallo I e I non è chiuso o non è limitato, non possiamo affatto concludere che f ammetta massimo e minimo in I . Per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è continua in $]0, 1]$, ma non ammette massimo in $]0, 1]$; la funzione $g(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) è continua in $\mathbf{R}$, ma non ammette nè massimo nè minimo in $\mathbf{R}$.
2. Se una funzione f è definita ma non continua in un intervallo I e esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, non possiamo affatto concludere che f si annulli in qualche punto di I . Per esempio, la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$$

non si annulla in nessun punto di $[-1, 1]$ anche se $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

3. Se f è una funzione continua e invertibile in un insieme generico X , non è in generale vero che la sua inversa f^{-1} sia ancora continua in $f(X)$. Infatti, la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in]1, 2], \end{cases}$$

è continua e invertibile in $X = [-1, 0] \cup]1, 2]$, ma la sua funzione inversa f^{-1} , che è data da

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x & \text{se } x \in]1, 2], \end{cases}$$

non è continua in $f(X) = [0, 2]$ perché ha un punto di discontinuità (di 1^a specie) nel punto 1.

Concludiamo questo capitolo discutendo i due concetti presentati nella Definizione che segue, in cui si considerano versioni “globali” della continuità.

Definizione 4.5.11 *Siano $X \subset \mathbf{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che f è uniformemente continua in X se vale la seguente proprietà*

$$(4.5.4) \quad \begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che} \\ &\forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

2. *Diciamo che f lipschitziana in X se vale la seguente proprietà*

$$\exists L > 0 \text{ tale che } \forall x, x' \in X, |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|.$$

In tal caso, L è detta costante di Lipschitz.

Osservazioni 4.5.12

1. Spieghiamo in che senso l'uniforme continuità è una versione globale della continuità, come si vede confrontando le definizioni 4.4.1 e 4.5.11.1, ed in particolare (4.4.3) e (4.5.4). Data una funzione $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ continua in X , la differenza tra continuità ed uniforme continuità consiste nel fatto che, fissato $\varepsilon > 0$, si trova un $\delta > 0$ che se f è solo continua dipende anche dal punto $x_0 \in X$ considerato, mentre se f è uniformemente continua dipende solo da ε e dal dominio X , ma non varia da punto a punto (in questo senso la scelta è globale).
2. La lipschitzianità implica la uniforme continuità e la uniforme continuità implica la continuità. D'altra parte, esistono funzioni lipschitziane, funzioni uniformemente continue ma non lipschitziane e funzioni continue non uniformemente continue.

La funzione $f(x) = x$ è lipschitziana in $\mathbf{R}$; anche le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono esempi di funzioni lipschitziane in $\mathbf{R}$. La funzione $g(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty[$, ma non lipschitziana in $[0, +\infty[$. Infine, la funzione $h(x) = 1/x$ è continua in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, ma non uniformemente continua in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Invece la continuità in intervalli chiusi e limitati implica l'uniforme continuità. Infatti, vale il seguente risultato.

Teorema 4.5.13 (Teorema di Heine–Cantor) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora f è anche uniformemente continua in $[a, b]$.*

CAPITOLO 5

CALCOLO DIFFERENZIALE

In questo capitolo introduciamo la nozione di derivata e studiamo le sue principali proprietà.

5.1 Derivate di una funzione

Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto, $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in I$. Se $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ è tale che $x_0 + h \in I$, possiamo considerare il seguente rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Esso è detto *rapporto incrementale* della funzione f in x_0 relativo all'incremento h della variabile.

A questo punto possiamo dare la seguente

Definizione 5.1.1 *Se esiste finito il*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

allora diciamo che la funzione f è derivabile in x_0 . In tal caso, il limite si dice derivata di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'(x_0) \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad (Df)_{x=x_0} \quad Df(x_0).$$

Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Inoltre, diciamo che la funzione f è derivabile in I se essa è derivabile in ogni punto di I . In tal caso, è ben definita la funzione che associa ad ogni $x \in I$ la derivata $f'(x)$; tale funzione si dice derivata di f e si indica solitamente con f' . In altri termini, la funzione derivata di f è così definita

$$f': I \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \in I \rightarrow f'(x).$$

Osservazioni 5.1.2

1. Osserviamo che, posto $x = x_0 + h$, possiamo scrivere il rapporto incrementale come segue

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e quindi f è derivabile in x_0 se, e solo se, esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Supponiamo che la funzione $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ sia derivabile in x_0 e poniamo, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$,

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{e} \quad \omega(x_0) = 0.$$

Allora possiamo scrivere che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0),$$

dove $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$.

Come nel caso dei limiti e della continuità, quando una funzione non è derivabile in un punto si può parlare di *derivata destra* e di *derivata sinistra*.

Definizione 5.1.3 (Derivata destra e derivata sinistra) Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in I$ un punto di accumulazione a destra di I (a sinistra di I). Se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right),$$

diciamo che f ammette derivata destra in x_0 (derivata sinistra in x_0). In tal caso, tale limite è detto derivata destra di f in x_0 (derivata sinistra di f in x_0) e si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'_d(x_0), \quad D_+ f(x_0) \quad (f'_s(x_0), \quad D_- f(x_0)).$$

Osserviamo che, se $x_0 \in I$ è un punto interno di I , f è derivabile in x_0 se, e solo se, f ammette derivata destra e derivata sinistra in x_0 e, in tal caso, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$.

Una prima conseguenza della derivabilità è il seguente risultato, che lega il concetto di derivata a quello di continuità.

Proposizione 5.1.4 Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

DIM. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0;$$

quindi esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè f è continua in x_0 . $\square$

Osservazione 5.1.5 In generale, una funzione continua non è detto che sia derivabile. Per esempio, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$, dato che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1 \\ &\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}. \end{aligned}$$

In realtà, si potrebbero costruire funzioni *continue in tutto un intervallo ma non derivabili in alcun punto*.

Il rapporto incrementale e la derivata hanno un importante significato geometrico, che discutiamo nella seguente osservazione.

Osservazione 5.1.6 (Significato geometrico della derivata) Dati un intervallo aperto I , $x_0 \in I$ e una funzione $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, osserviamo che, per ogni $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_0 + h \in I$, la retta passante per i punti $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ e $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ha equazione cartesiana data da

$$r_h: y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0);$$

il cui coefficiente angolare $m(h)$ è uguale a $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, cioè è uguale al rapporto incrementale di f in x_0 relativo all'incremento h della variabile. Se h tende a 0, cioè se P si avvicina a P_0 lungo il grafico di f , la sua pendenza varia. Al limite, si possono avere situazioni differenti.

1. Nel caso in cui f sia derivabile in x_0 , esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = f'(x_0)$. Questo significa che la retta r_h assume una posizione limite, non parallela all'asse y al tendere di h a 0. Tale posizione limite è detta *retta tangente al grafico di f nel punto P_0* e la sua equazione cartesiana è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Se f non è derivabile in x_0 , allora

$$\text{o } \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3. Nel caso in cui f sia continua in x_0 e $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, la retta r_h assume una posizione limite, parallela all'asse y , al tendere di h a 0. Tale retta è ancora tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e la sua equazione cartesiana è data da $x = x_0$. Per questo motivo, si dice che f ha in x_0 un *punto di flesso a tangente verticale*. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$, ha un punto di flesso a tangente verticale in 0.
4. Nel caso in cui f sia continua in x_0 e

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m \in \mathbf{R}, \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m',$$

con $m \neq m'$ (cioè, $m = f'_d(x_0)$ e $m' = f'_s(x_0)$), la retta r_h non assume alcuna posizione limite al tendere di h a 0. Infatti, se h tende a 0 da destra, la retta r_h assume una posizione limite $t_d(x_0)$, non parallela all'asse y e di equazione cartesiana $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)$. La retta $t_d(x_0)$ è *tangente a destra* al grafico di f nel punto P_0 . Se h tende a 0 da sinistra, la retta r_h assume una posizione limite $t_s(x_0)$, non parallela all'asse y e di equazione cartesiana $y - f(x_0) = f'_s(x_0)(x - x_0)$. Essa è *tangente a sinistra* al grafico di f nel punto P_0 . In particolare, le rette $t_d(x_0)$ e $t_s(x_0)$ non coincidono avendo coefficienti angolari diversi. In tal caso, si dice che f ha in x_0 un *punto angoloso*. Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, ha un punto angoloso in 0.

5. Nel caso in cui f è continua in x_0 e

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty, \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

(o viceversa), la retta r_h non assume una posizione limite al tendere di h a 0. Infatti, se h tende a 0 da destra, la retta r_h assume una posizione limite $t_d(x_0)$, parallela all'asse y e con verso di percorrenza dal basso verso l'alto. Essa è *tangente a destra* al grafico di f nel punto P_0 . Se h tende a 0 da sinistra, la retta r_h assume una posizione limite $t_s(x_0)$, parallela ancora all'asse y e verso di percorrenza dall'alto verso il basso. Essa è *tangente a sinistra* al grafico di f nel punto P_0 . Pertanto le rette $t_d(x_0)$ e $t_s(x_0)$, pur avendo la stessa equazione cartesiana $x = x_0$, non coincidono. In tal caso, si dice che f ha in x_0 un *punto di cuspid*. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, ha un punto di cuspid in 0.

Vediamo ora le relazioni esistenti tra l'operazione di derivazione e le principali operazioni tra le funzioni.

Il seguente risultato è una conseguenza della definizione di derivata e delle operazioni tra i limiti.

Teorema 5.1.7 (Regole di derivazione) *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno ad I ed $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_0 . Allora, $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$)*

sono derivabili in x_0 e valgono le seguenti formule:

$$(5.1.1) \quad (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0);$$

$$(5.1.2) \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

$$(5.1.3) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

In particolare, dalla (5.1.2) si deduce che

$$\forall c \in \mathbf{R} \quad (c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

e dalla (5.1.3) si deduce, ponendo $f \equiv 1$, che

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

DIM. La formula (5.1.1) è una immediata conseguenza della definizione di derivabilità e del fatto che il limite di una somma di funzioni è uguale alla somma dei limiti.

Proviamo la formula (5.1.2). Osserviamo che, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Per ipotesi e tenuto conto che la derivabilità implica la continuità (vedere la Proposizione 5.1.4), deduciamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

In modo analogo, si dimostra la formula (5.1.3). $\square$

Accanto alle operazioni algebriche, consideriamo le operazioni di composizione e inversione funzionale.

Teorema 5.1.8 (Teorema di derivazione della funzione composta) *Siano $I, J \subset \mathbf{R}$ due intervalli aperti e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ e $g: J \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni tali che $f(I) \subset J$. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e g è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in J$, allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la seguente formula*

$$(5.1.4) \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

DIM. Poiché g è derivabile in y_0 , possiamo scrivere che

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \omega(y)(y - y_0)$$

per ogni $y \in J$, dove ω è una opportuna funzione definita su J tale che $\lim_{y \rightarrow y_0} \omega(y) = 0 = \omega(y_0)$ (vedere l'Osservazione 5.1.2.2). Dato che $f(I) \subset J$ e $y_0 = f(x_0)$ ne segue che, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$, vale la seguente identità

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \omega(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x) - f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Poiché f è derivabile in x_0 e la derivabilità implica la continuità (vedere la Proposizione 5.1.4), deduciamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x) - f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

QED

Teorema 5.1.9 (Teorema di derivazione della funzione inversa) *Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente monotona in I . Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la sua funzione inversa $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la seguente formula*

$$(5.1.5) \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DIM. Per l'Osservazione 1.2.4 e i Teoremi 4.5.7, 4.5.9, f^{-1} è una funzione continua in $f(I)$ ed $f(I)$ è un intervallo aperto. Inoltre, per l'iniettività di f ,

$\forall y \in f(I) \setminus \{y_0\}, \exists! x \in I \setminus \{x_0\}$ tale che $y = f(x)$ o, equivalentemente, $f^{-1}(y) = x$ e $x \rightarrow x_0$ se e solo se $y \rightarrow y_0$.

Di conseguenza, per ogni $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$ possiamo scrivere che

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Poiché $y \rightarrow y_0$ se, e solo se, $x \rightarrow x_0$ e $f'(x_0) \neq 0$, ne segue che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

QED

Osservazione 5.1.10 I teoremi precedenti continuano a valere in tutti i punti degli intervalli di definizione delle funzioni in cui le ipotesi sono soddisfatte.

Esempi 5.1.11 (Derivate delle funzioni elementari)

1. **[Costanti]** Sia $f(x) = k$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $k \in \mathbf{R}$ fissato. Allora f è derivabile in $\mathbf{R}$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Infatti, fissato $x_0 \in \mathbf{R}$, risulta che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0.$$

2. **[Potenze naturali]** Per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Allora f_n è derivabile in $\mathbf{R}$ e $f'_n(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Si può dimostrare ciò per induzione. Infatti, per $n = 1$, fissato $x_0 \in \mathbf{R}$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1;$$

per l'arbitrarietà di x_0 , possiamo concludere che la funzione f_1 è derivabile in $\mathbf{R}$ e la sua derivata $f'_1(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Supponiamo ora che la funzione f_n sia derivabile in $\mathbf{R}$ e che la sua derivata sia $f'_n(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Fissato $x_0 \in \mathbf{R}$, per l'ipotesi induttiva, usando la (5.1.2) deduciamo che

$$Df_{n+1}(x_0) = D(f_1 \cdot f_n)(x_0) = f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot nf'_n(x_0) = x_0^n + x_0(n x_0^{n-1}) = (n+1)x_0^n.$$

Per l'arbitrarietà di x_0 , la funzione f_{n+1} è allora derivabile in $\mathbf{R}$ e la sua derivata è $f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

3. **[Polinomi e funzioni razionali]** Dal Teorema 5.1.7 deduciamo anche che:

- (a) ogni polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è derivabile in $\mathbf{R}$ e la sua derivata è data da

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1;$$

- (b) ogni funzione razionale, cioè del tipo

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R} : b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0\}$; in particolare, se $f(x) = \frac{1}{x^n}$, la sua derivata è $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4. **[Funzioni trigonometriche]** Sia $f(x) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Allora f è derivabile in $\mathbf{R}$ e $f'(x) = \cos x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Infatti, fissato $x_0 \in \mathbf{R}$, dall'Esempio 4.1.12 risulta che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2} = \cos x_0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di x_0 , la tesi è dimostrata. Analogamente, se $f(x) = \cos x$ allora $f'(x) = -\sin x$; infatti, basta osservare che $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ e dedurre dal Teorema di derivazione della funzione composta 5.1.8 che:

$$\begin{aligned} D \cos x &= D(\sin(\pi/2 - x)) = D(\pi/2 - x)(D \sin)(\pi/2 - x) \\ &= -(D \sin)(\pi/2 - x) = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x. \end{aligned}$$

La funzione $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è derivabile in tutto il suo insieme di definizione e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

5. **[Funzioni trigonometriche inverse]** La funzione $f(x) = \arcsin x$ è derivabile in $] -1, +1[$ e la sua derivata è data da

$$\forall x \in] -1, +1[\quad f'(x) \stackrel{y=\arcsin x}{=} \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

in modo analogo si dimostra che

$$\forall x \in] -1, +1[\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. **[Esponenziali]** Si dimostra facilmente usando il limite notevole 9 nel Paragrafo 4.3 che le funzioni esponenziali sono derivabili in $\mathbf{R}$ e che, posto $f(x) = a^x$, vale la

relazione $f'(x) = a^x \log a$. Infatti,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h} = a^x \log a.$$

7. **[Logaritmi]** Si dimostra facilmente usando il limite notevole 8 nel Paragrafo 4.3 che la funzione $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) è derivabile in $]0, +\infty[$ e la sua derivata è data da $1/(x \log a)$. Infatti,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x \log a}.$$

8. **[Potenze reali]** Dal Teorema 5.1.8 e dagli esempi precedenti deduciamo che la funzione $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) è derivabile nel suo insieme di definizione $]0, +\infty[$ e la sua derivata è data da

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Notiamo che la formula precedente è stata ottenuta in vari passi e con vari metodi, partendo dal caso $\alpha \in \mathbf{N}$, ma in definitiva è valida per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo la

Definizione 5.1.12 (Derivate successive) Siano $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo aperto I ed $f': I \rightarrow \mathbf{R}$ la sua derivata prima.

Se la funzione derivata f' è a sua volta derivabile in $x_0 \in I$, si dice che f ammette derivata seconda in x_0 e tale derivata seconda si indica con $D^2 f(x_0)$ oppure con $f''(x_0)$. In particolare, risulta che

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Se tale derivata seconda esiste in ogni punto di I , si dice che f è derivabile 2 volte in I e la funzione così definita

$$f'': I \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \in I \rightarrow f''(x),$$

è detta derivata seconda di f .

In modo analogo, si definiscono le derivate successive di f . Dato $k \in \mathbf{N}$, si dice che f ammette derivata k -esima in $x_0 \in I$ se f è derivabile $(k-1)$ volte in I e la sua derivata $f^{(k-1)}$ di ordine $(k-1)$ è derivabile in x_0 . Tale derivata k -esima si indica con $D^k f(x_0)$ o con $f^{(k)}(x_0)$. In particolare, $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$. Se tale derivata esiste in ogni punto di I , si dice che f è derivabile k volte in I e la funzione così definita

$$f^{(k)}: I \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \in I \rightarrow f^{(k)}(x),$$

è detta derivata k -esima di f . Se inoltre $f^{(k)}$ è una funzione continua in I allora si scrive $f \in C^k(I)$ e si dice che f è di classe C - k in I . Se f è di classe C^k in I per ogni $k \in \mathbf{N}$ allora si scrive $f \in C^\infty(I)$ e si dice che f è di classe C -infinito in I .

Ad esempio, ogni polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è derivabile k volte in $\mathbf{R}$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ e $P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2a_2$, $P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6a_3$, ..., $P^{(n)}(x) = n!a_n$, $P^{(k)}(x) = 0$ per ogni $k > n$.

5.2 Proprietà delle funzioni derivabili

Diamo ora i teoremi fondamentali del calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale. Questi risultati sono un utile strumento per la ricerca dei massimi e minimi e per lo studio qualitativo del grafico delle funzioni. Oltre agli estremi assoluti introdotti nella Definizione 1.2.6, la cui esistenza è discussa nel Paragrafo 4.5, definiamo gli estremi *relativi* di una funzione.

Definizione 5.2.1 (Estremi relativi) Siano $X \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Diciamo che f ha un massimo relativo in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \quad f(x) \leq f(x_0);$$

diciamo che f ha un minimo relativo in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0 , allora diciamo che ha un estremo relativo in x_0 . Se le due disuguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché $\leq$ (risp. $\geq$) diciamo che l'estremo relativo è proprio.

Osservazione 5.2.2 Ricordiamo che se $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ammette massimo (o minimo) in X allora esiste $x_1 \in X$ (esiste $x_2 \in X$) tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) \leq f(x_1)$ ($f(x) \geq f(x_2)$). In tal caso, si dice che f ha un *massimo assoluto* in x_1 (un *minimo assoluto* in x_2). È chiaro che se $x_1 \in X$ è un punto di massimo assoluto (se $x_2 \in X$ è un punto di minimo assoluto) per f , allora x_1 è un punto di massimo relativo (x_2 è un punto di minimo relativo) per f . Il viceversa non è vero. Ad esempio, la funzione $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, con $x \in [-1, 4]$, ha un massimo relativo nel punto 1 e $f(1) = 5$, mentre ha un massimo assoluto (e quindi relativo) nel punto -1 e $f(-1) = 37$. Inoltre, f ha un minimo relativo nel punto 0 e $f(0) = 0$, mentre ha un minimo assoluto (e quindi relativo) nel punto 3 e $f(3) = -27$.

Osserviamo anche che una funzione f può ammettere diversi massimi relativi e minimi relativi, ma il massimo assoluto e il minimo assoluto (se esistono) sono unici. Infatti, la funzione precedente ammette come massimi relativi $f(1) = 5$ e $f(-1) = 37$ e come minimi relativi $f(0) = 0$ e $f(3) = -27$.

Il seguente risultato fornisce un criterio per determinare i punti dove una funzione f potrebbe assumere un estremo relativo.

Teorema 5.2.3 (Teorema di Fermat) *Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ un punto interno, ed $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Se x_0 è un punto di estremo relativo di f ed f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.*

DIM. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo per f . Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I : \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Poiché f è derivabile in x_0 , ne segue che

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0,$$

$$\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Di conseguenza, $f'(x_0) = 0$. $\square$

Vista l'importanza che avranno nel seguito i punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione, introduciamo una speciale locuzione per indicarli.

Definizione 5.2.4 *Sia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile in I ; i punti interni di I in cui si annulla la derivata f' di f si dicono punti stazionari o punti critici di f .*

Esempio 5.2.5 Consideriamo il problema di stabilire l'esistenza del massimo e del minimo assoluti della funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$, e, nel caso che esistano, di trovarli e di calcolare i punti di estremo.

Per risolvere problemi di questo tipo è sufficiente verificare se la funzione data è continua nell'intervallo chiuso e limitato assegnato. In tal caso, il Teorema di Weierstrass 4.5.1 ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluti.

Poiché la funzione data è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, \pi]$ possiamo concludere che essa ammette massimo e minimo assoluti in tale intervallo. Adesso rimane il problema di determinare tali valori.

Per determinare tali valori, osserviamo che f può assumere il massimo e minimo assoluti o agli estremi dell'intervallo oppure all'interno dell'intervallo. Se f è derivabile nell'interno dell'intervallo, per il Teorema di Fermat 5.2.3 gli eventuali punti interni di massimo e minimo relativo annullano la sua derivata. Quindi è sufficiente risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ e calcolare il valore di f su tutte le soluzioni di questa equazione che sono interne all'intervallo. Infine, basta calcolare il valore di f agli estremi dell'intervallo e confrontare tutti i valori così ottenuti.

Poiché la funzione data è derivabile in $]0, \pi[$ risolviamo la seguente equazione

$$\cos x - \cos x + x \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dato che tale equazione non ha alcuna soluzione all'interno dell'intervallo $[0, \pi]$, possiamo concludere che la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ assume il massimo e il minimo assoluti agli estremi dell'intervallo. Precisamente, $f(0) = 0$ è il minimo assoluto e $f(\pi) = \pi$ è il massimo assoluto di f in $[0, \pi]$.

Osservazione 5.2.6 Osserviamo che il Teorema di Fermat 5.2.3 rappresenta solo una condizione necessaria affinché un punto interno all'intervallo sia di estremo relativo. Infatti, la funzione $f(x) = x^3$ non ammette alcun punto di estremo relativo in $\mathbf{R}$, ma la sua derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0. Il Teorema di Fermat quindi afferma che esiste la seguente relazione tra i punti di estremo relativo e i punti stazionari di una funzione:

$$x_0 \text{ punto di estremo relativo} \Rightarrow x_0 \text{ punto stazionario.}$$

Il viceversa non è vero in generale come mostra l'esempio appena dato.

Diamo adesso un risultato (e sue conseguenze) che ci assicura l'esistenza di almeno un punto stazionario.

Teorema 5.2.7 (Teorema di Rolle) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Se valgono le seguenti proprietà*

1. f è continua in $[a, b]$,
2. f è derivabile in $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$,

allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

DIM. Per la continuità di f in $[a, b]$ possiamo applicare il Teorema di Weierstrass 4.5.1 e così concludere che f ammette massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$M = f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Si possono verificare due casi: entrambi x_1 e x_2 coincidono con uno degli estremi, oppure almeno uno tra x_1 e x_2 è interno all'intervallo $[a, b]$.

Se sia x_1 che x_2 coincidono con uno degli estremi, ad esempio $x_1 = a$ e $x_2 = b$, allora per l'ipotesi 3.

$$M = f(x_1) = f(a) = f(b) = f(x_2) = m$$

e questo significa che la funzione f è costante in $[a, b]$ e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Se almeno uno tra x_1 e x_2 è interno all'intervallo $[a, b]$, ad esempio $x_1 \in]a, b[$, allora x_1 è un punto interno di estremo relativo per f e quindi, per il Teorema di Fermat 5.2.3, $f'(x_1) = 0$. **QED**

Dal Teorema di Rolle si deducono facilmente i seguenti risultati.

Teorema 5.2.8 (Teorema di Cauchy) *Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$g'(x_0)[f(b) - f(a)] = f'(x_0)[g(b) - g(a)].$$

DIM. Sia $h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$\forall x \in [a, b] \quad h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)].$$

Per le ipotesi su f e g possiamo affermare che la funzione h è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Inoltre, si verifica facilmente che $h(a) = 0 = h(b)$. Quindi, per il Teorema di Rolle 5.2.7 esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$\begin{aligned} h'(x_0) = 0 &\Leftrightarrow g'(x_0)[f(b) - f(a)] - f'(x_0)[g(b) - g(a)] = 0 \\ &\Leftrightarrow g'(x_0)[f(b) - f(a)] = f'(x_0)[g(b) - g(a)]. \end{aligned}$$

QED

Teorema 5.2.9 (Teorema di Lagrange) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$; allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

DIM. Basta applicare il Teorema di Cauchy 5.2.8, con $g(x) = x$ per ogni $x \in [a, b]$. QED

Osservazioni 5.2.10

1. Il teorema di Lagrange ha un'interessante interpretazione geometrica: infatti il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta r che congiunge i punti estremi del grafico di f su $[a, b]$, cioè i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, quindi il teorema afferma che c'è un punto x_0 in cui la retta tangente al grafico è parallela ad r .
2. Osserviamo che il Teorema di Rolle (e quindi i Teoremi di Cauchy e di Lagrange) non è più vero se una (e basta una) delle ipotesi non è soddisfatta. Facciamo qualche esempio.
 - (a) Se una funzione f è continua in un intervallo $[a, b]$, assume agli estremi di $[a, b]$ lo stesso valore, ma non è derivabile in ogni punto di $]a, b[$, non possiamo affatto concludere che la sua derivata f' si annulla in qualche punto di $]a, b[$. Infatti, la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $[-1, 1]$, $f(1) = 1 = f(-1)$, è derivabile in $] - 1, 1[\setminus \{0\}$, ma la sua derivata f' (dove esiste), che è data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, 1[\\ -1 & \text{se } x \in] - 1, 0[, \end{cases}$$

e non si annulla in alcun punto di $] - 1, 1[\setminus \{0\}$.

- (b) Se una funzione f è continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, ma $f(a) \neq f(b)$, non possiamo affatto concludere che la sua derivata f' si annulla in qualche punto di $]a, b[$. Infatti, la funzione $f(x) = 1/x$ è continua in $[1, 2]$, derivabile in $]1, 2[$ e $f(1) = 1 \neq f(2) = 1/2$, ma la sua derivata $f'(x) = -1/x^2$ non si annulla in alcun punto di $]1, 2[$.

Diamo adesso alcune conseguenze del Teorema di Lagrange 5.2.9.

Proposizione 5.2.11

1. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Se $f' \equiv 0$ in $]a, b[$, allora f è una funzione costante in $[a, b]$.
2. Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Se $f' \equiv g'$ in $]a, b[$, allora $f - g$ è una funzione costante in $[a, b]$.

DIM. 1) Osserviamo che, per ogni $x \in]a, b[$, la funzione f è continua in $[a, x]$ e derivabile in $]a, x[$. Si può così applicare il Teorema di Lagrange concludendo che esiste $x_0 \in]a, x[$ tale che $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0)$. Poiché $f'(x_0) = 0$, ne segue che $f(x) - f(a) = 0$, cioè $f(x) = f(a)$.
2. segue applicando il risultato 1. alla funzione $h = f - g$. **QED**

Osservazione 5.2.12 Osserviamo che la Proposizione 5.2.11 non è vera su insiemi più generali degli intervalli. Infatti, la funzione f , data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se } 2 < x < 3, \end{cases}$$

è continua e derivabile in $]0, 1[\cup]2, 3[$ e la sua derivata $f' \equiv 0$ in $]0, 1[\cup]2, 3[$, ma f non è costante in tale insieme.

Teorema 5.2.13 (Test di monotonia) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.

1. Se per ogni $x \in]a, b[$ $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente in $[a, b]$.
2. Se per ogni $x \in]a, b[$ $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente in $[a, b]$.

DIM. Dimostriamo solo 1. Fissati $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, osserviamo che la funzione f è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $]x_1, x_2[$. Possiamo allora applicare il Teorema di Lagrange 5.2.9 per concludere che esiste $x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0),$$

dove $f'(x_0) > 0$. Tenuto conto che $x_1 < x_2$, ne segue che $f(x_1) < f(x_2)$. Per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 , abbiamo dimostrato che f è strettamente crescente in $[a, b]$.

In modo analogo si dimostra la 2. **QED**

In modo analogo si dimostra anche

Teorema 5.2.14 (Criterio di monotonia) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è crescente in $[a, b]$.
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ è decrescente in $[a, b]$.

Ricordiamo che una funzione è Lipschitziana (vedi Definizione 4.5.11.2) se ha rapporti incrementali limitati. Se consideriamo funzioni derivabili, tale condizione segue dalla limitatezza della derivata.

Teorema 5.2.15 Sia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e derivabile nei punti interni di I . Se la funzione derivata f' è limitata allora f è lipschitziana in I .

DIM. Per ogni $x, x' \in I$ esiste x_0 punto interno ad I tale che

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \right| = |f'(x_0)| \leq \max_I |f'(x)|,$$

e quindi, posto $L = \max_I |f'(x)|$, risulta $|f(x') - f(x)| \leq L|x' - x|$. $\square$

Un'altra utile proprietà è espressa nella seguente proposizione.

Proposizione 5.2.16 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Se esiste finito il $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \ell$, allora f è derivabile a sinistra in b e $f'_s(b) = \ell$.

DIM. Fissata una successione crescente x_n che converge a b , per il Teorema di Lagrange per ogni n esiste $t_n \in]x_n, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} = f'(t_n),$$

sicché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(t_n) = \ell.$$

Poiché questo vale per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ come sopra, la tesi è provata. $\square$

Inoltre, usando i Test di monotonia 5.2.13 è facile dedurre che vale

Teorema 5.2.17 (Test della derivata prima) Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$ un punto stazionario di f . Allora valgono le seguenti proprietà.

1. $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad f'(x) \geq 0$ e $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\quad f'(x) \leq 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo di f .
2. $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad f'(x) \leq 0$ e $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\quad f'(x) \geq 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo di f .

3. $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $f'(x) \leq 0$ (o $f'(x) \geq 0$) allora x_0 non è nè un punto di massimo nè di minimo relativo di f .

Esempio 5.2.18 Consideriamo il problema di determinare gli intervalli di monotonia e stabilire l'esistenza dei massimi e minimi assoluti e relativi della funzione $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$ nel suo insieme di definizione.

Per risolvere problemi di questo tipo è sufficiente verificare che la funzione data sia derivabile nel suo insieme di definizione. In tal caso, per i Test di monotonia e della derivata prima lo studio del segno della sua derivata permette di individuare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi relativi. Infine, tramite lo studio del comportamento della funzione agli estremi del suo insieme di definizione si può stabilire se la funzione data ammetta o no massimo o minimo assoluti.

La funzione data è definita e derivabile in $X =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. La sua derivata f' è data da

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2}{x-1}} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

così che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 2x \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$ o $x \geq 2$. Allora f è strettamente crescente in $] -\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $]0, 1[$ e in $]1, 2[$. Inoltre 0 è un punto di massimo relativo e $f(0) = 1$, mentre 2 è un punto di minimo relativo $f(2) = e^4$. Possiamo già concludere che f non ammette massimo e minimo assoluti dato che $f(0) = 1 < e^4 = f(2)$. In ogni modo, osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Ne segue che $\sup_X f = +\infty$ e $\inf_X f = 0$.

Il Teorema di Cauchy permette di dimostrare il seguente risultato che è un utile strumento per il calcolo di limiti che si presentano sotto la forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ .

Teorema 5.2.19 (Teorema di de l'Hopital) Siano $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in $]a, b[$. Se

$$1. \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

DIM. Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$. Allora possiamo estendere per continuità f e g nel punto a ponendo $f(a) = g(a) = 0$. In tal caso, fissata una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset]a, b[$ convergente ad a , risulta che, per ogni

$n \in \mathbf{N}$, f e g soddisfanno le ipotesi del Teorema di Cauchy 5.2.8 nell'intervallo $[a, x_n]$ e quindi esiste $t_n \in]a, x_n[$ tale che

$$\begin{aligned} g'(t_n)[f(x_n) - f(a)] &= f'(t_n)[g(x_n) - g(a)] &\Leftrightarrow & g'(t_n)f(x_n) = f'(t_n)g(x_n) \\ &&\Leftrightarrow & \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}. \end{aligned}$$

Ora $t_n \xrightarrow{n} a^+$ (dato che $t_n \in]a, x_n[$ e $x_n \xrightarrow{n} a^+$) così che $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \xrightarrow{n} \ell$ per il Teorema di caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8 e di conseguenza anche $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n} \ell$. Per l'arbitrarietà di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la tesi segue grazie al Teorema di caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8. $\boxed{QED}$

Esempi 5.2.20 Applichiamo adesso il Teorema di de l'Hopital per calcolare alcuni limiti notevoli.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\beta x}} = 0$ per ogni $\beta > 0$; infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{\beta x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta e^{\beta x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\beta x}} = 0.$$

Questo risultato si generalizza subito come segue

$$\forall \alpha, \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{(\beta/\alpha)x}} \right)^\alpha = 0.$$

2. Da 1. segue $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ per ogni $\alpha, \beta > 0$ e $0 < a \neq 1$ (basta porre $t = \log_a x$ così che $x = a^t$).

Osservazioni 5.2.21

1. Anzitutto, osserviamo esplicitamente che il Teorema 5.2.19 vale anche se $\ell = \pm\infty$.
2. Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \rightarrow b^-$, con $b \in \mathbf{R}$ o $b = +\infty$, e anche se si considera il limite per $x \rightarrow x_0$ con x_0 un qualsiasi punto dell'intervallo $]a, b[$.
3. Il teorema di de l'Hopital può essere usato anche nel calcolo di limiti che si presentano nella forma indeterminata $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$.

Supponiamo che si voglia calcolare il $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)]$, dove $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$. Allora basta porre la funzione $f + g$ nella seguente forma

$$f(x) + g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

e poi applicare il Teorema di de l'Hôpital alle funzioni $\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}$ e $\frac{1}{f(x)g(x)}$. Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2 \sin x}{x \sin x};$$

applicando il Teorema 5.2.19 otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - 2 \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin x + x \cos x} = -\infty$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x} \right] = -\infty.$$

Supponiamo ora che si voglia calcolare il $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x)$ dove $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$. Allora basta porre la funzione $f \cdot g$ in una delle seguenti forme

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

e poi applicare il Teorema di de l'Hôpital alle funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{g(x)}$ oppure alle funzioni $g(x)$ e $\frac{1}{f(x)}$. Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}};$$

applicando il Teorema 5.2.19 otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0.$$

4. Il procedimento indicato nel Teorema 5.2.19 si può iterare, a patto che le funzioni f e g siano derivabili più volte: se il rapporto f'/g' dà ancora luogo ad una forma indeterminata del tipo visto, si può procedere ad una ulteriore applicazione e studiare il limite del rapporto f''/g'' , e così via.

5.3 Funzioni convesse e concave

Introduciamo adesso una ulteriore proprietà delle funzioni reali di una variabile reale utile ai fini dello studio qualitativo del relativo grafico.

Definizione 5.3.1 Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile in I .

1. Diciamo che la funzione f è convessa in I se

$$(5.3.6) \quad \forall x, x_0 \in I \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Diciamo che la funzione f è concava in I se

$$(5.3.7) \quad \forall x, x_0 \in I \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se le due disuguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $>$ (risp. $<$) anziché $\geq$ (risp. $\leq$) diciamo che la funzione f è strettamente convessa in I (risp. strettamente concava in I).

Osservazioni 5.3.2

1. La disuguaglianza (5.3.6) significa che per ogni $x_0 \in I$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ (di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) è al di sotto del grafico di f . Mentre, la disuguaglianza (5.3.7) significa che per ogni $x_0 \in I$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ (di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) è al di sopra del grafico di f .
2. Si può dare la definizione di convessità e concavità anche nell'ambito della classe delle funzioni non derivabili. Precisamente, data una funzione $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, diciamo che f è *convessa* (risp. *concava*) nell'intervallo I se il suo epigrafico

$$\mathcal{E}_f := \{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}$$

è un sottoinsieme convesso (risp. concavo) di $\mathbf{R}^2$, cioè tale che per ogni coppia di suoi punti P, Q l'intero segmento di estremi P e Q appartiene ancora all'insieme dato. Se esplicitiamo questa condizione con P e Q sul grafico di f , la richiesta diviene che il segmento della retta secante il grafico di f che passa per P e Q sia contenuto in $\mathcal{E}_f$. Ricordando l'equazione della secante (vedi Osservazione 5.1.6, ciò vuol dire che

$$(5.3.8) \quad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

se $x_1 < x < x_2$. Poiché ogni punto x siffatto si può scrivere nella forma $x = tx_2 + (1 - t)x_1$, con $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, la (5.3.8) diviene

$$f(tx_2 + (1 - t)x_1) \leq tf(x_2) + (1 - t)f(x_1),$$

condizione che dev'essere verificata per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$. Ovviamente, considerazioni analoghe valgono per le funzioni concave, e conducono alla disuguaglianza di concavità

$$f(tx_2 + (1 - t)x_1) \geq tf(x_2) + (1 - t)f(x_1).$$

Si può anche dimostrare che ogni funzione convessa (o concava) in un intervallo è ivi continua e che la precedente definizione e la Definizione 5.3.1 sono equivalenti nell'ambito della classe delle funzioni derivabili.

3. La funzione esponenziale a^x è un esempio di funzione strettamente convessa in $\mathbf{R}$, mentre la funzione logaritmo $\log_a x$ è un esempio di funzione strettamente concava in $]0, +\infty[$.

Il segno della derivata seconda (qualora esista) permette di determinare gli intervalli di convessità e/o di concavità di una data funzione come il seguente risultato mostra.

Teorema 5.3.3 (Criterio di convessità/concavità) *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e 2 volte derivabile in $]a, b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (a) f è convessa in $[a, b]$
- (b) f' è crescente in $[a, b]$
- (c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

2. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (a') f è concava in $[a, b]$
- (b') f' è decrescente in $[a, b]$
- (c') $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

DIM. Dimostriamo solo il punto 1.

Per il Criterio di monotonia 5.2.14 applicato alla funzione derivata f' possiamo concludere che f' è crescente in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

Per completare la dimostrazione basta dimostrare che le affermazioni (a) e (b) sono equivalenti.

Dimostriamo prima che (a) implica (b). Fissati $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ e posto x_0 uguale a x_1 e poi uguale a x_2 in (5.3.6), risulta che per ogni $x \in [a, b]$

$$(5.3.9) \quad f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

e

$$(5.3.10) \quad f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

Scelto $x = x_2$ in (5.3.9) e $x = x_1$ in (5.3.10) otteniamo

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sommando membro a membro, deduciamo che

$$\begin{aligned} f(x_2) + f(x_1) &\geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow [f'(x_2) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Dato che $x_1 < x_2$, ne segue che $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Dimostriamo infine che (b) implica (a). Fissati $x, x_0 \in [a, b]$ con $x \neq x_0$, per il Teorema di Lagrange 5.2.9 esiste un punto x_1 interno all'intervallo di estremi x_0 e x tali che

$$(5.3.11) \quad f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Se $x > x_0$, anche $x_1 > x_0$ e quindi $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ per la monotonia di f' . Questo insieme a (5.3.11) implica che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se $x < x_0$, anche $x_1 < x_0$ e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ per la monotonia di f' . Dato che $x - x_0 < 0$ questo insieme a (5.3.11) implica ancora che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad \boxed{QED}$$

Concludiamo questo paragrafo con la definizione di punto di flesso.

Definizione 5.3.4 Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ un punto interno ad I ed $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione (derivabile in I). Diciamo che x_0 è un punto di flesso per f se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa (risp. concava) in $]x_0 - \delta, x_0[$ ($\subset I$) e concava (risp. convessa) in $]x_0, x_0 + \delta[$ ($\subset I$).

Per determinare gli eventuali punti di flesso di una data funzione è utile la seguente condizione necessaria.

Proposizione 5.3.5 Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile in I . Se x_0 è un punto di flesso per f e f è derivabile 2 volte in x_0 , allora $f''(x_0) = 0$.

5.4 Formula di Taylor

Dati una funzione $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ e $x_0 \in I$ punto interno all'intervallo I , se f è derivabile in x_0 possiamo scrivere che, per ogni $x \in I$,

$$(5.4.12) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0),$$

dove ω è una opportuna funzione definita in I tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$ (vedere Osservazione 5.1.2.2). Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$ e questo si esprime talvolta dicendo che la funzione $\omega(x)(x-x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x-x_0$ per $x \rightarrow x_0$.

Introduciamo ora un simbolo che permette di descrivere in maniera sintetica questa situazione.

Definizione 5.4.1 (“o” piccolo) Date due funzioni f, g definite in un intorno di x_0 , si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

e si legge “ $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ ” se

$$(5.4.13) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se g è una funzione non nulla in $I \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, cioè g è un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$, il fatto che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ implica che anche $f(x)$ tende a 0 per $x \rightarrow x_0$ ma più velocemente rispetto a $g(x)$. Ecco perché in tale caso si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$. Dev’essere chiaro che il simbolo o non esprime una relazione funzionale, ma, data g , descrive una classe di funzioni, quelle f per cui vale (5.4.13). Le proprietà che stiamo per enunciare vanno pertanto intese in questo senso.

La relazione “o piccolo” adesso introdotta verifica le seguenti proprietà: per ogni $c \in \mathbf{R}$, con $c \neq 0$, e $\alpha \in \mathbf{R}^+$

1. $o(g) + o(g) = o(g)$,
2. $c \cdot o(g) = o(g)$,
3. $g_1 \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$,
4. $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$,
5. $|o(g)|^\alpha = o(|g|^\alpha)$,
6. $o(g + o(g)) = o(g)$,
7. $o(o(g)) = o(g)$.

Indicata con $R_1(x; x_0)$ la funzione $\omega(x)(x-x_0)$ che compare in (5.4.12), possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x; x_0),$$

dove $R_1(x; x_0) = o(x-x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. Questo significa che, se approssimiamo la funzione f con il polinomio di 1° grado $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, cioè

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

commettiamo un errore $R_1(x; x_0) = o(x - x_0)$ che è un infinitesimo superiore a $(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, dato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Notiamo anzi che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Ovviamente, in tal caso $a = f'(x_0)$.

A questo punto è naturale porsi il problema se, data una funzione f n volte derivabile in un punto x_0 , si possa approssimare con un opportuno polinomio $P_n(x)$ di grado n commettendo un errore $R_n(x; x_0)$ che tende a 0 più rapidamente di $(x - x_0)^n$ quando $x \rightarrow x_0$. Tale problema ha una risposta positiva, come vedremo dopo aver introdotto i polinomi di Taylor.

Data una funzione $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ n volte derivabile in un punto $x_0 \in I$ interno all'intervallo I , si dice *polinomio di Taylor di ordine n e di centro (o punto iniziale) x_0* di f il polinomio così definito

$$\begin{aligned} T_n(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$, $T_n(x) = T_n(x; 0)$ si dice *polinomio di MacLaurin di ordine n* di f .

Si può dimostrare che il polinomio di Taylor $T_n(x; x_0)$ è l'unico polinomio di grado n per cui $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0; x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$.

Inoltre osserviamo che, se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado n , allora f coincide con il suo polinomio di Taylor $T_n(x; x_0)$ di ordine n e di centro x_0 per ogni fissato $x_0 \in \mathbf{R}$. Quindi, in questo caso f e $T_n(x; x_0)$ rappresentano la stessa funzione e sostituire l'una con l'altra non comporta alcun errore, dando così una giustificazione intuitiva al fatto che i polinomi di Taylor sono gli opportuni polinomi che permettono di risolvere positivamente il problema appena posto, come mostra il seguente risultato.

Teorema 5.4.2 (Formula di Taylor con il resto di Peano) *Sia $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione $(n - 1)$ volte derivabile nell'intervallo aperto I e derivabile n volte in un punto $x_0 \in I$. Allora, per ogni $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0) \\ (5.4.14) \quad &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0), \end{aligned}$$

dove $R_n(x; x_0) = o((x - x_0)^n)$, cioè

$$(5.4.15) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Per (5.4.14) e (5.4.15) possiamo così scrivere che, per ogni $x \in I$,

$$(5.4.16) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \omega(x)],$$

con $\omega(x) = \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n}$ per $x \in I$ e $x \neq x_0$, $\omega(x_0) = 0$. La (5.4.16) si dice formula di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 (formula di MacLaurin di ordine n se $x_0 = 0$) con il termine complementare, o resto, di Peano.

DIM. Per dimostrare la (5.4.15) basta verificare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

o, equivalentemente, che

$$(5.4.17) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \\ = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \end{aligned}$$

Se $n = 1$ il risultato segue dalla definizione di derivabilità in x_0 . Se $n > 1$, osserviamo che le funzioni al numeratore e al denominatore del limite in (5.4.17) soddisfanno tutte le ipotesi del Teorema di de L'Hôpital 5.2.19 e quindi il suo calcolo può essere ricondotto al calcolo del limite per $x \rightarrow x_0$ delle rispettive derivate, cioè al calcolo del

$$(5.4.18) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}}{n(x - x_0)^{n-1}}.$$

Anche nel limite (5.4.18) le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfanno tutte le ipotesi del Teorema di de L'Hôpital 5.2.19 e quindi il suo calcolo può essere ricondotto al calcolo del limite per $x \rightarrow x_0$ delle rispettive derivate. Questo procedimento può essere iterato $(n - 1)$ volte (vedi Osservazione 5.2.21.4) riconducendo il calcolo del limite (5.4.17) iniziale alla seguente relazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

che è vera, dato che $\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)}$ non è altro che il rapporto incrementale della derivata $(n - 1)$ -esima di f nel punto x_0 e f è n volte derivabile in x_0 . $\square$

Esempi 5.4.3 Per calcolare lo sviluppo di Taylor di una funzione f ad un ordine prefissato n , in generale non si può far altro che calcolare le derivate di f fino all'ordine n ed usare i risultati trovati per ottenere i coefficienti del polinomio di Taylor T_n . In molti casi però si riescono ad ottenere formule che forniscono, in dipendenza dal parametro $k = 0, 1, \dots, n$, il valore di *tutte le derivate* $f^{(k)}$, almeno nel centro dello sviluppo; in tal caso si può scrivere il polinomio di Taylor cercato senza ulteriore fatica. Nel caso delle funzioni elementari, poi, che sono di classe C^∞ , si possono scrivere i polinomi di Taylor di ogni ordine. Un'ulteriore semplificazione si ha spesso se il centro dello sviluppo è $x_0 = 0$.

Diamo adesso lo sviluppo in formula di MacLaurin di ordine n di alcune funzioni elementari:

1. **[Esponenziale]** Poiché $D^k e^x|_{x=0} = 1$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, si ottiene facilmente

$$(5.4.19) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. **[Funzioni trigonometriche]** Le derivate di ordine pari della funzione sin sono $D^{2k} \sin x = (-1)^k \sin x$ e quelle di ordine dispari $D^{2k+1} \sin x = (-1)^k \cos x$, sicché per $x = 0$ tutte le derivate pari si annullano, mentre la derivata di ordine $2k + 1$ vale $(-1)^k$. Ne segue lo sviluppo

$$(5.4.20) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2(n+1)}),$$

ove si è tenuto conto che $D^{2n+2} \sin x = 0$ per $x = 0$. Analogamente, per il coseno risulta $D^{2k} \cos x = (-1)^k \cos x$ e $D^{2k+1} \cos x = (-1)^k \sin x$, da cui

$$(5.4.21) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ove si è tenuto conto che $D^{2n+1} \cos x = 0$ per $x = 0$.

3. **[Formula del binomio]** Per $\alpha \in \mathbf{R}$ consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$. Un calcolo elementare mostra che $D^k f(0) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)$, da cui

$$(5.4.22) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

4. **[Logaritmi]** La funzione $f(x) = \log(1+x)$ ha per derivata $(1+x)^{-1}$, quindi possiamo usare lo sviluppo del binomio (5.4.22) per $\alpha = -1$ per ottenere

$$(5.4.23) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. **[Funzioni trigonometriche inverse]** Anche le funzioni trigonometriche inverse hanno derivate di tipo binomiale (pur di sostituire x^2 al posto di x), e quindi se ne possono ottenere gli sviluppi di MacLaurin dalla (5.4.22). La derivata della funzione $\arctan$ è $(1 + x^2)^{-1}$, e quindi

$$(5.4.24) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2(n+1)}).$$

Analogamente, la derivata della funzione $\arcsin$ è $(1 - x^2)^{-1/2}$ e la derivata di $\arccos$ è $-(1 - x^2)^{-1/2}$, da cui

$$(5.4.25) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(5.4.26) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

dove abbiamo introdotto per comodità il simbolo del *semifattoriale* $k!!$, definito da $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$ per $k = 2n$ pari, e $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n+1)$ per $k = 2n+1$ dispari.

Il termine complementare di Peano fornisce solo una informazione qualitativa dell'errore che si commette nell'approssimare una funzione data con il relativo polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 . Per avere qualche informazione di tipo quantitativo su tale errore occorre ovviamente richiedere che la funzione data soddisfaccia qualche ulteriore proprietà. Precisamente, risulta:

Teorema 5.4.4 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange) *Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ ed $f \in C^{n+1}(I)$; allora per ogni $x \in I$ esiste $\bar{x} \in I$, con $|x - \bar{x}| \leq |x - x_0|$, tale che*

$$(5.4.27) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

La (5.4.27) si dice formula di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 (formula di MacLaurin di ordine n se $x_0 = 0$) con il termine complementare, o resto, di Lagrange.

Osserviamo che se la funzione f , oltre a soddisfare le ipotesi del Teorema 5.4.4, ha derivata $f^{(n+1)}$ di ordine $(n+1)$ limitata in I , cioè esiste un $M > 0$ tale che $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$ allora

$$|R_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Questa disuguaglianza permette di valutare il resto $R_n(x; x_0)$ e quindi di stimare *quantitativamente* l'errore che si commette approssimando la funzione f con il relativo polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 , come negli esempi che seguono.

Esempi 5.4.5

- Supponiamo di voler valutare l'errore che si commette nell'approssimare e col polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = e^x$.

Tale polinomio è $T_4(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ e quindi, applicando il Teorema 5.4.4, possiamo scrivere che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^{\bar{x}}}{5!}x^5,$$

con $0 < |\bar{x} - x| < |x|$. Sostituendo $x = 1$ otteniamo che $0 < \bar{x} < 1$ e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{e^{\bar{x}}}{5!} = 2,708\bar{3} + \frac{e^{\bar{x}}}{5!},$$

dove $R_5(1; 0) = \frac{e^{\bar{x}}}{120} \leq \frac{3}{120} = 0,016666667$ e $\frac{3}{120} > 10^{-2}$. Questo ci permette di affermare che, approssimando e con $2,708\bar{3}$, solo la prima cifra decimale è certamente esatta.

- Supponiamo invece di voler approssimare e con un errore non superiore a 10^{-4} (e questo significa che le prime quattro cifre dopo la virgola del numero trovato corrispondono a quelle dello sviluppo decimale del numero e).

La formula di McLaurin di ordine n con il termine complementare di Lagrange della funzione $f(x) = e^x$ è data da

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

con $0 < |\bar{x} - x| < |x|$. Sostituendo $x = 1$ otteniamo che $0 < \bar{x} < 1$ e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!},$$

dove

$$|R_n(1; 0)| = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Affinché l'errore che si commette nell'approssimare e con $1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}$ non sia superiore a 10^{-4} basta determinare n in modo tale che

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \geq 3 \cdot 10^4.$$

Ora il più piccolo n che soddisfa la disuguaglianza di sopra è uguale a 7. Quindi la somma (calcolarla!)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

fornisce una approssimazione del numero e con 4 cifre decimali esatte.

- La formula di Taylor è anche un utile strumento per calcolare i limiti. Facciamo qualche esempio:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) - (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x\sqrt{1+x} - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4))}{x(1 + \frac{1}{2}x + o(x)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Un'altra importante applicazione della formula di Taylor è la seguente condizione sufficiente di estremalità.

Teorema 5.4.6 (Condizione sufficiente di estremalità) *Siano I un intervallo aperto, $f \in C^n(I)$ e $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora:*

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo relativo proprio per f in I*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo relativo proprio per f in I*
3. *se n è dispari allora x_0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo relativo per f in I .*

DIM. Poiché la funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema 5.4.2 possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{(x - x_0)^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)], \quad x \in I, \end{aligned}$$

dove $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$ (cfr con (5.4.16)). Tenuto conto che $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ne segue che

$$(5.4.28) \quad f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \omega(x)], \quad x \in I.$$

Osserviamo ora che $\lim_{x \rightarrow x_0} [f^{(n)}(x_0) + \omega(x)] = f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e quindi, per il Teorema della Permanenza del Segno, esiste un $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ e la funzione $[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)]$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ in tale intervallo.

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, da (5.4.28) segue che $f(x) - f(x_0) > 0$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ e questo significa che x_0 è un punto di minimo relativo proprio per f in I .

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, da (5.4.28) segue che $f(x) - f(x_0) < 0$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ e questo significa che x_0 è un punto di massimo relativo proprio per f in I .

Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0), da (5.4.28) segue che $f(x) - f(x_0) < 0$ (> 0) per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ e $f(x) - f(x_0) > 0$ (< 0) per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta[$; questo significa che x_0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo relativo per f in I . $\square$

5.5 Grafici di funzioni

Una delle principali applicazioni del calcolo differenziale trattato in questo capitolo consiste nello studiare l'andamento qualitativo di una funzione e di tracciarne il relativo grafico. A tal fine si può procedere secondo lo schema seguente.

- *Determinare l'insieme o dominio di definizione:* in generale, è data un'espressione analitica (vedi il Paragrafo 1.2.c) di cui bisogna determinare il dominio naturale $\text{Dom}(f)$.
- *Stabilire se la funzione gode di qualche simmetria,* cioè stabilire se f è dispari o pari o se f è periodica
- *Determinare il segno della funzione e le intersezioni del grafico con gli assi* quando è semplice farlo
- *Calcolare i limiti agli estremi del dominio di f ,* cioè calcolare i limiti di f per $x \rightarrow \pm\infty$ se $\text{Dom}(f)$ non è limitato superiormente e/o inferiormente e i limiti (destro e/o sinistro) per $x \rightarrow x_0$ per ogni $x_0 \notin \text{Dom}(f)$ punto di accumulazione di $\text{Dom}(f)$. In questa fase, si determinano anche gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui e i punti in cui la funzione è prolungabile per continuità. Ricordiamo che

1. la retta di equazione $y = \ell$ si dice *asintoto orizzontale* per f se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$,

2. la retta di equazione $x = x_0$ si dice *asintoto verticale* (risp. destro, risp. sinistro) per f se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (risp. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, risp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$),
3. la retta di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$ si dice *asintoto obliquo* per f se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$.

Osserviamo che l'esistenza dell'asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ (risp. per $x \rightarrow -\infty$) esclude l'esistenza dell'asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (risp. per $x \rightarrow -\infty$). Inoltre, si procede come segue per determinare l'esistenza dell'asintoto obliquo: si verifica prima che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbf{R} \setminus \{0\};$$

in tal caso, si verifica poi che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbf{R}.$$

Se ambedue queste condizioni sono soddisfatte, allora si può concludere che $y = mx + q$ è un asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$. Si procede in modo analogo per $x \rightarrow -\infty$.

- *Calcolare la derivata prima e successivamente determinare il suo segno* così che si possono stabilire gli intervalli dove la funzione è crescente o decrescente e i punti di estremo relativo. In questa fase, si determinano anche i punti del dominio di definizione in cui la funzione non è derivabile e quindi gli eventuali punti angolosi o di cuspide o di flesso a tangente verticale.
- *Calcolare la derivata seconda e successivamente determinare il suo segno* così che si possono stabilire gli intervalli dove la funzione è convessa o concava e i punti di flesso.
- *Disegnare il grafico* con l'aiuto delle informazioni raccolte nei punti precedenti.

CAPITOLO 6

CALCOLO INTEGRALE

Con lo studio del Calcolo integrale ci prefiggiamo di risolvere due problemi apparentemente distinti, ma che in realtà si vedranno essere intimamente legati. Essi sono:

Problema 1 (antiderivazione) Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo; data $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, dire se esiste una funzione G derivabile in I tale che $G' = f$.

Problema 2 (quadratura) Date $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, con $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, assegnare un valore numerico che esprima l'*area* dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Per quanto riguarda il problema 2 si vuole definire l'area di una regione piana in modo che certi (naturali) requisiti siano soddisfatti: per esempio, si vuole che l'area di una regione A contenuta in una B sia più piccola dell'area di B , o che l'area dell'unione di due regioni disgiunte sia la somma delle aree, e così via. Non formalizziamo tutte le richieste, ma è importante avere in mente che *una funzione che esprima l'area non può essere arbitraria*.

Definizione 6.0.1 (Primitive) Date $f, G : I \rightarrow \mathbf{R}$, si dice che G è una primitiva di f in I se G è derivabile in I e risulta $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Osservazioni 6.0.2 Le seguenti proprietà delle primitive sono immediate conseguenze della definizione.

1. Se G è una primitiva della funzione f in I , ogni funzione del tipo $G(x) + c$, con $c \in \mathbf{R}$, è ancora una primitiva di f in I . Infatti, $D(G + c) = G' = f$.
2. Se G_1 e G_2 sono primitive della stessa funzione in un intervallo I , allora la funzione differenza $G_1 - G_2$ è costante in I . Infatti, risulta $D(G_1 - G_2) = G_1' - G_2' = 0$ in I , e quindi $G_1 - G_2$ è costante in I per la Proposizione 5.2.11.
3. Tenendo conto delle precedenti osservazioni, il problema del calcolo di *tutte* le primitive di una funzione f in un intervallo si riconduce al calcolo di *una sola* primitiva. Infatti trovata una, sia G , le funzioni $G + c$, al variare della costante c in $\mathbf{R}$, sono *tutte e sole* le primitive di f in I .

Esempio 6.0.3 Ricordando le derivate delle funzioni elementari, possiamo dire che:

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = x^\alpha \quad \text{in} \quad]0, +\infty[$$

$$F(x) = \log_a x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = \frac{1}{x \log a} \quad \text{in} \quad]0, +\infty[$$

$$F(x) = \cos x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = -\sin x \quad \text{in} \quad \mathbf{R}$$

$$F(x) = \sin x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = \cos x \quad \text{in} \quad \mathbf{R}.$$

6.1 Funzioni integrabili secondo Riemann

In questo paragrafo considereremo sempre funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato che denoteremo $[a, b]$. Daremo una definizione di integrale di una funzione, ma precisiamo che questa non è l'unica definizione possibile per affrontare i problemi su esposti. Le idee presentate in questo capitolo sono state sviluppate dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866), ed è per questo che l'integrale che definiremo viene detto *integrale di Riemann*.

Definizione 6.1.1 (suddivisione) Si dice suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ la scelta di un numero finito di punti $x_0, \dots, x_n$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Per la generica suddivisione di $[a, b]$ useremo la notazione $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$.

Notiamo che fra le suddivisioni di un intervallo sussiste l'ovvia relazione di inclusione. Costruiremo l'integrale di una funzione con un procedimento di approssimazione basato sulle nozioni introdotte nella seguente definizione.

Definizione 6.1.2 (Somme integrali) Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ limitata, e fissiamo una suddivisione $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ di $[a, b]$. Per $k = 1, \dots, n$ poniamo

$$(6.1.1) \quad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$(6.1.2) \quad M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

e definiamo la somma integrale inferiore di f relativa a P ponendo

$$(6.1.3) \quad s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e la somma integrale superiore di f relativa a P ponendo

$$(6.1.4) \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Tutta la costruzione è basata sulle proprietà delle somme integrali esposte nella proposizione seguente.

Proposizione 6.1.3 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ limitata, e siano P, Q suddivisioni di $[a, b]$, con $P \subset Q$. Allora*

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P).$$

DIM. Proviamo l'enunciato per Q ottenuta da P aggiungendo un punto, poiché nel caso generale basterà ripetere l'argomento per ogni punto appartenente a Q e non a P . Siano allora $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$, e $Q = P \cup \{\bar{x}\}$. Se, com'è ovvio, assumiamo che $\bar{x}$ non appartenga a P , esiste un indice $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Posto

$$\begin{aligned} m'_j &= \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq \bar{x}\}, & m''_j &= \inf\{f(x) : \bar{x} \leq x \leq x_j\}, \\ M'_j &= \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq \bar{x}\}, & M''_j &= \sup\{f(x) : \bar{x} \leq x \leq x_j\}, \end{aligned}$$

risulta, dall'osservazione 1.1.9.4, $m'_j \geq m_j$, $m''_j \geq m_j$, $M'_j \leq M_j$, $M''_j \leq M_j$, e quindi

$$\begin{aligned} s(f, Q) - s(f, P) &= m'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + m''_j(x_j - \bar{x}) - m_j(x_j - x_{j-1}) \geq 0, \\ S(f, Q) - S(f, P) &= M'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j(x_j - \bar{x}) - M_j(x_j - x_{j-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Poiché la disuguaglianza $s(f, Q) \leq S(f, Q)$ è ovvia dalla definizione per ogni suddivisione Q , la tesi è dimostrata. $\square$

Definizione 6.1.4 (Funzioni integrabili) *Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ limitata, definiamo il suo integrale inferiore in $[a, b]$ ponendo*

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

e il suo integrale superiore in $[a, b]$ ponendo

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b]\}.$$

Diciamo che f è integrabile in $[a, b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$$

In tal caso, il loro comune valore si denota con

$$\int_a^b f(x) dx$$

e si dice integrale definito di f in $[a, b]$.

Notiamo che nella notazione appena introdotta per gli integrali la variabile x è *muta*, può cioè essere sostituita con qualunque altro simbolo senza alterare il significato dell'espressione. In particolare, se f è integrabile in $[a, b]$ allora le scritture $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b f(t)dt$ indicano lo stesso numero.

Osservazione 6.1.5 Mostriamo con un esempio che non tutte le funzioni sono integrabili. Come si vedrà, l'esempio è piuttosto “artificiale”, rispetto agli esempi considerati fin qui, che sono sempre stati costruiti usando le funzioni elementari, malgrado sia probabilmente il più semplice possibile. Questo fa capire che in generale le funzioni che incontreremo saranno tutte integrabili negli intervalli chiusi e limitati. D'altra parte, è importante essere consapevoli che una definizione ha senso solo se qualche oggetto sfugge alla classe che si sta definendo; altrimenti, la definizione è quanto meno inutile. Vediamo l'esempio di funzione non integrabile, che in genere viene chiamata *funzione di Dirichlet*, dal nome di un matematico dell'ottocento. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Poiché fra due qualunque numeri reali ci sono sempre un numero razionale ed un numero irrazionale, per ogni suddivisione $P = \{0 = x_0, \dots, x_n = 1\}$ di $[0, 1]$ e per ogni $k = 1, \dots, n$ risulta (con la solita notazione) $m_k = 0$ e $M_k = 1$, e quindi $s(f, P) = 0$ e $S(f, P) = 1$. Segue

$$\int_0^1 f(x)dx = 0, \quad \overline{\int_0^1 f(x)dx} = 1$$

e quindi f non è integrabile.

L'integrale definito gode di alcune semplici proprietà, che valgono in modo ovvio per le somme integrali e seguono facilmente per l'integrale.

Proposizione 6.1.6 (Proprietà degli integrali) *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabili, e siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora:*

1. **[Linearità]** *La funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile, e risulta*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

2. **[Additività rispetto all'intervallo]** *Se $c \in]a, b[$ allora*

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

3. **[Confronto]** Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Osservazione 6.1.7 È utile definire l'integrale anche quando il primo estremo d'integrazione è un numero reale maggiore del secondo estremo. Il modo più coerente di definire l'integrale è il seguente:

$$\int_b^a f dx = - \int_a^b f dx$$

per ogni $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile. Con questa definizione, la proprietà di additività rispetto all'intervallo vale qualunque sia l'ordine dei punti a, b, c .

La verifica dell'integrabilità di una funzione, più che sulla definizione, fa spesso uso del seguente risultato.

Teorema 6.1.8 (Caratterizzazione delle funzioni integrabili) Una $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ limitata è integrabile in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

DIM. Sia f integrabile, sia $I \in \mathbf{R}$ il valore dell'integrale e sia ε fissato. Siccome I è sia il valore dell'integrale superiore che quello dell'integrale inferiore, dalla Proposizione 1.1.11 (con $\varepsilon/2$ al posto di ε) segue che esistono due suddivisioni P_1 e P_2 tali che

$$S(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(f, P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $P = P_1 \cup P_2$ risulta allora, grazie alla Proposizione 6.1.3,

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) - s(f, P_2) < \varepsilon$$

e la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$, poiché la differenza tra integrale superiore ed integrale inferiore è minore della differenza $S(f, P) - s(f, P)$ per ogni suddivisione, risulta

$$\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, e, per l'Osservazione 1.1.10, ciò è possibile solo se $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$, cioè se f è integrabile. **QED**

Usando il precedente risultato, si può dimostrare che ampie classi di funzioni sono integrabili. Vediamo alcuni risultati abbastanza generali.

Teorema 6.1.9 (Integrabilità delle funzioni continue) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Useremo la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 6.1.8. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché f è uniformemente continua in $[a, b]$ in virtù del Teorema di Heine-Cantor 4.5.13, esiste un $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Di conseguenza, se fissiamo una suddivisione $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che $x_k - x_{k-1} < \delta$ per ogni $k = 1, \dots, n$, con la solita notazione risulta $M_k - m_k < \varepsilon$, e pertanto

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$

QED

Definizione 6.1.10 (Funzioni continue a tratti) *Diciamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua a tratti in $[a, b]$ se è continua per ogni x in $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti in cui ha discontinuità di prima specie.*

In modo equivalente, si può dire che f è continua a tratti se è continua per ogni x in $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti, siano $x_1, \dots, x_n$, e le restrizioni di f agli intervalli $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$ sono continue.

Osservazione 6.1.11 (Integrabilità delle funzioni continue a tratti) Se f è continua a tratti in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$. Infatti, con la notazione appena introdotta, f è integrabile negli intervalli $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$ e risulta

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f + \int_{x_n}^b f$$

Le funzioni monotone in un intervallo possono presentare un numero infinito di punti di discontinuità, ma sono ancora integrabili.

Teorema 6.1.12 (Integrabilità delle funzioni monotone) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è monotona in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Useremo anche in questo caso la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 6.1.8. Per fissare le idee, supponiamo f crescente. In tal caso, per ogni suddivisione $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ risulta, con la solita notazione, $M_k = f(x_k)$ e $m_k = f(x_{k-1})$. Dato allora $\varepsilon > 0$, basta scegliere P tale che $x_k - x_{k-1} < \varepsilon$ per ogni $k = 1, \dots, n$, così che si abbia

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

□ QED

Il seguente risultato ci permetterà di estendere notevolmente la classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 6.1.13 *Siano f integrabile in $[a, b]$ e $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ lipschitziana in ogni intervallo limitato. Allora $g \circ f$ è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Poiché f è integrabile in $[a, b]$, f è limitata, diciamo $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia L la costante di Lipschitz di g nell'intervallo $[-M, M]$, sicché risulti

$$(6.1.5) \quad |g(y_1) - g(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in [-M, M].$$

Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste una suddivisione $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon/L$. Posto, per $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ M_k &= \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ m'_k &= \inf\{g(f(x)) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ M'_k &= \sup\{g(f(x)) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{aligned}$$

per (6.1.5) risulta $M'_k - m'_k \leq L(M_k - m_k)$. Quindi

$$\begin{aligned} S(g \circ f, P) - s(g \circ f, P) &\leq \sum_{k=1}^n (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq L \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = L(S(f, P) - s(f, P)) < \varepsilon \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε la tesi segue dal Teorema 6.1.8 di caratterizzazione delle funzioni integrabili.

□ QED

Il precedente risultato è molto generale: vediamone alcune semplici conseguenze. È utile introdurre le seguenti notazioni. Poniamo

$$\begin{aligned} g^+(y) &= \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases} \\ g^-(y) &= \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e, per $f : I \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le funzioni f^+ ed f^- si dicono rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di f . Notiamo che le funzioni f^+ ed f^- sono entrambe positive e che $f = f^+ - f^-$, mentre $|f| = f^+ + f^-$. Dal momento che risulta $f^+ = g^+ \circ f$, $f^- = g^- \circ f$ e le funzioni g^+ , g^- sono lipschitziane, si ha subito che se f è integrabile in $[a, b]$ allora anche f^+ , f^- , $|f|$ sono integrabili. Inoltre, vale la disuguaglianza

$$(6.1.6) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Infatti, $-|f| \leq f \leq |f|$, per la proprietà di confronto, implica

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

e da (1.1.1) segue (6.1.6). Applicando ancora la Proposizione 6.1.13 si ottiene che se f è integrabile anche f^2 è integrabile ($f^2 = g \circ f$, con $g(y) = y^2$ lipschitziana sugli intervalli limitati) e, se f e g sono integrabili, lo è anche il prodotto fg ; infatti,

$$fg = \frac{1}{4} \left[(f+g)^2 - (f-g)^2 \right]$$

e, se f e g sono integrabili, sia $f+g$ che $f-g$ lo sono, così come i loro quadrati. Naturalmente, è possibile completare questi risultati, estendendoli al caso di potenze diverse da 2 e al prodotto di più di due funzioni.

Possiamo ora dare una soluzione (parziale) al Problema 2 posto all'inizio del capitolo.

Definizione 6.1.14 (Area di figure piane) *Siano date $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabili, con $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Si dice area dell'insieme*

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

il numero $\int_a^b (f - g) dx$.

Osserviamo che gli insiemi del tipo descritto nella definizione precedente (cioè gli insiemi di punti compresi tra i grafici di due funzioni integrabili) possono essere usati in situazioni più generali: dato un insieme qualunque del piano, si può infatti tentare di scomporlo nell'unione disgiunta di un numero finito di insiemi del tipo detto, e la sua area sarà data dalla somma delle aree dei singoli sottoinsiemi, ciascuna calcolata come spiegato.

Abbiamo visto che l'integrale è, in un certo senso, un'estensione dell'operazione di somma. Come per un numero finito di numeri $a_1, \dots, a_n$ si definisce la *media aritmetica* m ponendo

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k,$$

si può definire un concetto di media integrale.

Definizione 6.1.15 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile; si definisce la media integrale di f in $[a, b]$ ponendo

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 6.1.16 (Teorema della media integrale) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile, e siano

$$m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}; \quad M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\};$$

allora $m \leq m(f) \leq M$. Se inoltre f è continua in $[a, b]$ allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = m(f)$.

DIM. Per provare la prima affermazione, basta integrare le disuguaglianze $m \leq f(x) \leq M$ in $[a, b]$, tenendo conto della proprietà di confronto. Si ottiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

da cui, dividendo per $b-a$, la tesi.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, basta applicare il Teorema dei valori intermedi 4.5.5 al numero $m(f) \in [m, M]$. $\square$ **QED**

Osserviamo che, se $f(x) \geq 0$, il numero $m(f)$ è l'altezza del rettangolo di base $[a, b]$ che ha la stessa area del trapeziode di f definito da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

6.2 Teorema fondamentale del calcolo e integrali indefiniti

In questo paragrafo mostriamo come si risolve il Problema 1 del calcolo delle primitive di una funzione, e quali sono i legami tra i due problemi enunciati. Iniziamo osservando che, data una funzione f integrabile in $[a, b]$, per ogni $x \in [a, b]$ si può considerare l'integrale tra a ed x di f , ottenendo un risultato che (ovviamente!) dipende solo da x , e pertanto definisce una nuova funzione con dominio $[a, b]$. Vediamone una prima importante proprietà.

Proposizione 6.2.1 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile; definiamo la sua funzione integrale F ponendo

$$(6.2.7) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

La funzione F è lipschitziana in $[a, b]$.

DIM. Sia $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Notiamo che per l'Osservazione 6.1.7 e per la proprietà (6.1.6) risulta

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} M dt \right| \leq M|x_1 - x_2|.$$

QED

La precedente proposizione mostra che la funzione integrale di f è più regolare della f stessa. Utilizzando F si possono costruire le primitive di f , sotto l'ulteriore ipotesi che f sia continua. È questo il contenuto del seguente importante risultato.

Teorema 6.2.2 (Teorema fondamentale del calcolo) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua in $[a, b]$. Allora la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

è derivabile in $[a, b]$ e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

DIM. Fissiamo $x_0 \in [a, b]$ e proviamo che $F'(x_0) = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di x_0 questo prova la tesi. Esplicitando la definizione della derivata, dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

cioè, esplicitando anche la definizione di limite, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|h| < \delta$ risulta

$$(6.2.8) \quad \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$ fissato. Per ipotesi, f è continua in $[a, b]$ e in particolare in x_0 , sicché, in corrispondenza del numero ε fissato,

$$(6.2.9) \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Notiamo che risulta

$$(6.2.10) \quad f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dx$$

(è la media integrale della costante $f(x_0)$ nell'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$) e che, per l'Osservazione 6.1.7, possiamo scrivere il rapporto incrementale di F nella forma:

$$(6.2.11) \quad \begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx. \end{aligned}$$

Da (6.2.11) e (6.2.10) deduciamo

$$(6.2.12) \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx.$$

Se ora prendiamo $|h| < \delta$, con δ dato da (6.2.9), risulta anche $|x - x_0| < \delta$ per x compreso tra x_0 ed $x_0 + h$, sicché, usando (6.1.6), otteniamo

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dx = \varepsilon,$$

cioè (6.2.8). $\square$

Osservazione 6.2.3 È importante notare che nel teorema fondamentale del calcolo non è necessario che l'intervallo I in cui la funzione f è definita sia chiuso e limitato. Infatti, anche se il dominio di f è un intervallo aperto o illimitato (anche $\mathbf{R}$, che anzi è un caso frequentissimo), pur di fissare (arbitrariamente, ma una volta per tutte) un punto $a \in I$, tutti gli integrali che abbiamo scritto sono calcolati su intervalli chiusi e limitati, in accordo con la trattazione precedente.

Il teorema fondamentale del calcolo mostra come si può calcolare una primitiva di una assegnata funzione continua in un intervallo. In realtà, grazie alle Osservazioni 6.0.2, il procedimento fornisce *tutte* le primitive cercate. Il teorema mostra lo stretto legame che c'è tra i Problemi 1 e 2 enunciati all'inizio del capitolo: il procedimento usato per risolvere il Problema 2, che fornisce l'area delle regioni di piano descritte nel Paragrafo precedente, permette infatti di costruire, facendo variare l'estremo superiore d'integrazione, le primitive di una funzione *continua* data. Notiamo che, com'è evidente dalla dimostrazione, avremmo potuto definire una funzione integrale diversa, ponendo

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

con c punto *qualunque* di $[a, b]$, ed avremmo ottenuto ancora una primitiva di f (e quindi tutte le primitive). La costruzione appena vista dà ragione della seguente definizione.

Definizione 6.2.4 (Integrale indefinito) Sia I un intervallo, e sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$; si dice integrale indefinito di f l'insieme di tutte le primitive di f . Si denota con

$$\int f(x) dx.$$

Osservazioni 6.2.5

1. Non bisogna confondere l'integrale definito con quello indefinito, che sono evidentemente oggetti del tutto diversi: *l'integrale di f tra a e b è un numero reale, mentre l'integrale indefinito di f è un insieme di funzioni*. Il legame tra i due, che giustifica i nomi, è nella costruzione del secondo, che è basata sulla definizione del primo.

2. Abbiamo dato la definizione di integrale indefinito per una generica funzione f , ma saremo quasi sempre interessati all'integrale di funzioni continue sull'intervallo I . In questo caso possiamo scrivere

$$(6.2.13) \quad \int f(x)dx = \left\{ \int_a^x f(t)dt + c : c \in \mathbf{R} \right\},$$

dove a è un qualunque punto di I . Infatti, la funzione integrale di f è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo, e tutte le altre primitive si ottengono sommando un'arbitraria costante, come spiegato nelle Osservazioni 6.0.2.

3. Se il dominio di f non è un intervallo, ma, per esempio, l'unione di più intervalli, allora la descrizione dell'integrale indefinito cambia. Per esempio, sapendo che $\log|x|$ è una primitiva della funzione $1/x$, definita per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, l'integrale indefinito di $1/x$ è dato da tutte le funzioni del tipo

$$\begin{cases} \log x + c_1 & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

al variare di tutte le possibili scelte di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, che non c'è alcun motivo di scegliere uguali. In particolare, la descrizione completa dell'integrale indefinito non dipende da una sola costante arbitraria (come nel caso in cui il dominio sia un intervallo) ma da più di una, in questo caso due. La ragione è che nell'Osservazione 6.0.2.2 abbiamo usato la Proposizione 5.2.11, che vale per funzioni derivabili *in un intervallo*.

4. Il Teorema fondamentale del calcolo 6.2.2 afferma che *ogni funzione continua ammette primitive*. Bisogna tener distinta quest'affermazione, che è molto generale, dal problema del *calcolo effettivo* delle primitive di una funzione data. Anzi, anche l'espressione "calcolo effettivo" è da definire con chiarezza. In generale, il problema sarà di determinare le primitive di una *funzione elementare*, che, com'è noto, è sostanzialmente il risultato di (un numero finito di) operazioni algebriche e di composizione sulle funzioni elencate nel Capitolo 1. Anche in questo caso, però, *non è detto che le primitive della funzione data siano ancora funzioni elementari in quest'accezione*. Possiamo dare esempi semplicissimi, come e^{x^2} , $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, o le funzioni irrazionali del tipo $x^m(a + bx^n)^p$, con $a, b \in \mathbf{R}$ non nulli, $m, n, p \in \mathbf{Q}$ tali che nessuno dei tre numeri

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad p + \frac{m+1}{n}$$

sia intero.

Il legame tra l'integrale indefinito e quello definito è ulteriormente illustrato dal seguente risultato, che è il principale strumento per calcolare integrali definiti senza ricorrere alla definizione.

Teorema 6.2.6 (Secondo teorema fondamentale del calcolo) *Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in I e G è una qualunque primitiva di f , allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

DIM. Posto al solito $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per l'Osservazione 6.0.2.2, esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$, e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = [G(b) - c] - [G(a) - c] = G(b) - G(a).$$

QED

6.3 Metodi d'integrazione

In questo paragrafo affronteremo il problema del calcolo effettivo degli integrali indefiniti e definiti, cioè della determinazione delle primitive di una funzione data e dell'applicazione di questo al calcolo degli integrali definiti. Dal momento che il teorema fondamentale del calcolo dice sostanzialmente che l'integrazione indefinita è il procedimento inverso della derivazione, è lecito aspettarsi che i metodi di calcolo degli integrali indefiniti siano fondati su un'opportuna elaborazione dei metodi di calcolo delle derivate. Così è, infatti, ed i due principali metodi d'integrazione, detti *per parti* e *per sostituzione*, sono, rispettivamente, i procedimenti inversi del calcolo delle derivate del prodotto e della composizione di funzioni.

Teorema 6.3.1 (Integrazione per parti) *Siano f e g due funzioni di classe C^1 nell'intervallo I . Allora*

$$\int f g' dx = f g - \int f' g dx.$$

DIM. Basta osservare che la funzione $f g$ è una primitiva della funzione $f g' + f' g$. QED

Osservazioni 6.3.2

1. Il teorema precedente può sembrare inutile ai fini del calcolo effettivo di integrali, dal momento che al primo ed al secondo membro appaiono due integrali simili. In realtà, come si vede su esempi concreti, se usata in modo opportuno, la formula può fornire un integrale più semplice di quello di partenza. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int x e^x dx.$$

Posto $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, risulta evidentemente $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^x$, sicché si ha:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c, \quad c \in \mathbf{R}$$

ed è evidente che al primo passaggio si è ottenuto un integrale più semplice di quello dato.

2. Anche quando dall'integrazione per parti si ottiene un integrale molto simile a quello dato, non è detto che il calcolo sia stato inutile. Ad esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Posto $f(x) = g'(x) = \cos x$, risulta $f'(x) = -g(x) = -\sin x$, e si ha:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

da cui

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c.$$

3. La formula di integrazione per parti si applica ovviamente anche agli integrali definiti. Con la notazione del teorema, se $[a, b] \subset I$, allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Teorema 6.3.3 (Integrazione per sostituzione) *Siano I, J due intervalli, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua, $\varphi : J \rightarrow I$ di classe C^1 . Risulta:*

$$(6.3.14) \quad \int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Per quanto riguarda gli integrali definiti, risulta

$$(6.3.15) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \, dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt$$

per ogni intervallo $[c, d] \subset J$.

DIM. Se G è una qualunque primitiva di f , allora $G \circ \varphi$ è una primitiva della funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$. Infatti:

$$\frac{d}{dt}(G \circ \varphi) = (G' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$$

e quindi la formula dice semplicemente che l'integrale indefinito di f è $\{G + c\}$ se e solo se l'integrale indefinito di $f \circ \varphi$ è $\{G \circ \varphi + c\}$. $\square$

Osservazioni 6.3.4

1. Il modo forse più semplice (almeno dal punto di vista mnemonico) di applicare il Teorema 6.3.3 è il seguente. Ricordando la notazione $\varphi' = \frac{dx}{dt}$ per la derivata della funzione $x = \varphi(t)$, si può ricavare (formalmente) $dx = \varphi'(t)dt$, e questa sostituzione, assieme alla $x = \varphi(t)$, fornisce l'enunciato corretto del teorema, malgrado non sia giustificata dalle conoscenze presentate fin qui.
2. Il Teorema 6.3.3 si può usare nei due versi. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Ponendo $x = \varphi(t)$ con $\varphi(t) = \sin t$ si ottiene, procedendo come appena indicato, $dx = \cos t dt$ e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

e l'ultimo integrale è stato calcolato nell'Osservazione 6.3.2.2. Invece, se si considera l'integrale

$$\int \tan t dt,$$

per esempio per $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, conviene porre $x = \varphi(t) = \cos t$, sicché $dx = \varphi'(t)dt = -\sin t dt$ e si ottiene

$$\int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c = \log |\cos t| + c.$$

3. Nel calcolo per sostituzione degli integrali definiti si può procedere in due modi. Dovendo calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, si possono prima calcolare le primitive in termini della variabile x e sostituire alla fine i valori a e b , oppure calcolare le primitive in termini della variabile t e sostituire alla fine i valori c e d tali che $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. È essenziale però verificare l'applicabilità del teorema *nell'intervallo* $[a, b]$. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 t} dt.$$

È facile verificare che la sostituzione $x = \tan t$ fornisce

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{2+\tan^2 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(x/\sqrt{2}) + c.$$

Se ora proviamo a sostituire gli estremi, otteniamo che $t = 0$ dà $x = 0$ e $t = \pi$ dà ancora $x = 0$, e da questi calcoli dedurremmo che l'integrale è nullo, risultato assurdo dal momento che l'integrale di una funzione strettamente positiva è strettamente

positivo. L'errore è dovuto al fatto che la funzione $\tan$ *non è definita nell'intervallo* di integrazione $[0, \pi]$ perché $\pi/2$ non è nel suo dominio. La sostituzione indicata si può ancora adoperare, ma il calcolo corretto è quest'altro (in cui si tiene conto che $\cos^2(t + \pi/2) = \cos^2 t$):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt + \int_{\pi/2}^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + x^2} dx = \sqrt{2}\pi/4, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato nell'esempio 6.4.14 del paragrafo seguente.

4. A volte è dato da calcolare un integrale definito nella forma

$$\int_a^b f(x) dx$$

e si vuol cercare una funzione φ che ne semplifichi il calcolo. Gli estremi c e d dell'integrale nella nuova variabile t tale che $x = \varphi(t)$ saranno due punti del dominio J di φ tali che $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$ e in generale non sono univocamente determinati, dal momento che nell'enunciato del Teorema 6.3.3 non abbiamo supposto che φ sia invertibile. Se però φ è invertibile, possiamo scrivere (6.3.15) nella forma

$$(6.3.16) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

A tal proposito, osserviamo che se la funzione φ è decrescente allora l'ordine degli estremi di integrazione viene scambiato, cioè $a < b$ allora $\varphi^{-1}(a) > \varphi^{-1}(b)$. Se si vuole conservare l'ordine crescente negli estremi d'integrazione, detto $[c, d]$ l'intervallo di estremi $\varphi^{-1}(a)$ e $\varphi^{-1}(b)$, la formula (6.3.16) va scritta

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

6.4 Integrali impropri

Finora abbiamo trattato solo integrali di funzioni *limitate* su intervalli *limitati*. Vediamo ora come sia possibile generalizzare la teoria per considerare casi più generali, che fra l'altro sono connessi con la teoria delle serie numeriche studiate nel Capitolo 2. Distinguiamo due casi, quello di funzioni non limitate su intervalli limitati e quello di intervalli non limitati, che si chiamano integrali generalizzati (o impropri) di prima e di seconda specie, rispettivamente. Naturalmente, tutta la trattazione si basa sui procedimenti già visti. Come nel caso delle serie numeriche, esiste una nozione di *convergenza assoluta* accanto a quella di convergenza semplice.

Definizione 6.4.1 (Integrali generalizzati di 1^a specie) Sia $f : [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c]$ per ogni $c < b$; diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ se esiste finito il limite

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ se esiste finito il limite

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c |f(x)| dx.$$

Se $f :]a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile in $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b]$, allora i limiti considerati sopra vanno sostituiti con

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx, \quad \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b |f(x)| dx.$$

Sulle relazioni tra integrabilità assoluta e non assoluta torneremo nell'Osservazione 6.4.8 e nell'Esempio 6.4.16.

La proprietà che la funzione f sia (assolutamente) integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ dipende da quanto velocemente $f(x)$ diventa grande per x che tende a b da destra. Ritroviamo questa considerazione qualitativa nel fondamentale esempio che segue.

Esempio 6.4.2 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $]0, 1]$ della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$. Ovviamente, per $\alpha \leq 0$ la funzione è continua nell'intervallo chiuso $[0, 1]$ e quindi è integrabile, grazie al Teorema 6.1.9. Il problema dell'integrabilità in senso generalizzato si pone per $\alpha > 0$. Usando la definizione otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1 - c^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} & \alpha \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} -\log c & \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{-\alpha + 1} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi x^α è integrabile in senso generalizzato in $]0, 1]$ se e solo se $\alpha < 1$.

Come abbiamo accennato prima, una funzione che tenda all'infinito troppo velocemente in un estremo dell'intervallo di definizione non sarà integrabile in senso generalizzato. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende all'infinito per $x \rightarrow 0$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, come spiegato nell'esempio, è il valore $\alpha = 1$: se α è più piccolo la funzione x^α è integrabile, se α è più grande non lo è. Questo punto di vista è utile per comprendere il seguente teorema di confronto. Trattiamo il caso di

una funzione che può essere illimitata in prossimità dell'estremo destro dell'intervallo di definizione. Nel caso in cui il problema dell'integrabilità si ponga nell'estremo sinistro, le modifiche da apportare sono ovvie.

Teorema 6.4.3 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 1^a specie)

Siano $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabili in $[a, c]$ per ogni $c < b$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b[$. Se g è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$.

Osservazione 6.4.4 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g non è integrabile in senso generalizzato allora neanche f lo è.

Combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 6.4.2 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 6.4.5 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in [a, b[$. Allora:*

- (i) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha < 1$ tali che $|f(x)| \leq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato;*
- (ii) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha \geq 1$ tali che $|f(x)| \geq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, b[$ allora f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato.*

Osservazione 6.4.6 Quanto visto finora per funzioni definite in un intervallo semiaperto a destra $[a, b[$ si può facilmente riformulare per funzioni definite in un intervallo semiaperto a sinistra del tipo $]a, b]$ o per funzioni definite in un intervallo privato di un punto interno.

Se $f :]a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile in $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b]$, le condizioni nel Corollario 6.4.5 divengono

$$|f(x)| \leq C(x-a)^{-\alpha}, \quad |f(x)| \geq C(x-a)^{-\alpha};$$

la prima, con $\alpha < 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \geq 1$, garantisce la non integrabilità.

Consideriamo ora $c \in]a, b[$, e sia $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c-\delta]$ e in $[c+\delta, b]$ per ogni $\delta > 0$. Allora, f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se è integrabile in senso generalizzato sia in $[a, c]$ che in $[c, b]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\delta} f(x) dx, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. In altri termini, nel caso di uno (o più) punti singolari *interni* all'intervallo di integrazione, si deve studiare un punto per volta, e ciascuno separatamente da destra e da sinistra.

Passiamo ora a considerare l'integrabilità di funzioni su semirette. Anche in questo caso, studiamo in dettaglio il caso della semiretta $[a, +\infty[$, ed esponiamo poi le modifiche da fare nel caso della semiretta $] - \infty, b]$.

Definizione 6.4.7 (Integrali generalizzati di 2^a specie) *Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $b > a$; diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ se esiste finito il limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x)| dx.$$

Come nel caso delle serie numeriche (vedi Proposizione 3.1.9), la convergenza assoluta implica quella semplice.

Osservazione 6.4.8 Si può dimostrare che, sia nel caso degli integrali generalizzati di prima che di seconda specie, se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ (o $[a, +\infty[$) allora è anche integrabile in senso generalizzato (senza valore assoluto) nello stesso intervallo. Nell'esempio 6.4.16 vedremo che il viceversa non è vero. Questo tipo di fenomeno è analogo a quanto accade per le serie numeriche, vedi Proposizione 3.1.9 ed Osservazione 3.3.2.4.

Esempio 6.4.9 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $[1, +\infty[$ della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$. Usando la definizione otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha + 1} & \alpha \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} \log c & \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$.

In questo caso, una funzione che tenda a zero troppo lentamente per $x \rightarrow +\infty$ non sarà integrabile in senso generalizzato. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende a zero per $x \rightarrow +\infty$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, anche in questo caso, è il valore $\alpha = 1$: stavolta, se α è più grande di 1 la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile, se α è più piccolo non lo è. Vediamo ora un'altra interessante classe di esempi.

Esempio 6.4.10 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $[2, +\infty[$ della funzione $f(t) = \frac{1}{t \log^\alpha t}$ al variare del parametro $\alpha > 0$. In base alle proprietà dei logaritmi, non è possibile applicare teoremi di confronto con le funzioni studiate nell'esempio 6.4.9. Possiamo però usare l'esempio 6.4.9, dopo aver calcolato l'integrale con la sostituzione $x = \log t$, e otteniamo:

$$\int_2^\infty \frac{1}{t \log^\alpha t} dt = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

e quindi $\frac{1}{t \log^\alpha t}$ è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$.

Anche per gli intervalli illimitati vale un teorema di confronto, analogo al Teorema 6.4.3.

Teorema 6.4.11 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 2^a specie)

Siano $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabili in $[a, b]$ per ogni $b > a$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Se g è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$.

Osservazione 6.4.12 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g non è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ allora neanche f lo è.

Come prima, combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 6.4.9 si ottiene il seguente corollario, analogo al Corollario 3.2.9 valido per le serie.

Corollario 6.4.13 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $b > a$. Allora:*

- (i) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che $|f(x)| \leq Cx^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$;*
- (ii) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha \leq 1$ tali che $|f(x)| \geq Cx^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$ allora f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$.*

Il seguente esempio è interessante anche in relazione all'Osservazione 6.3.4.4.

Esempio 6.4.14 Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} dx,$$

con $m > 0$. Il Corollario 6.4.13 ci dice subito che l'integrale è convergente, ma è ancora più semplice procedere al calcolo diretto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} dx = \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (x/m)^2} dx = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x/m) = \frac{\pi}{2m}.$$

Osservazioni 6.4.15 Consideriamo ora il caso in cui l'intervallo d'interesse sia una semiretta del tipo $] - \infty, b]$ o tutta la retta $] - \infty, +\infty[$. Come nel caso degli integrali di prima specie, sarà sufficiente indicare in breve le modifiche da fare. Distinguiamo i due casi.

1. Sia $f :] - \infty, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. I limiti considerati nella Definizione 6.4.7 vanno sostituiti con

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b |f(x)| dx,$$

e le condizioni nel Corollario 6.4.13 con

$$|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}, \quad |f(x)| \geq C|x|^{-\alpha};$$

la prima, con $\alpha > 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \leq 1$, garantisce la non integrabilità in $] - \infty, b]$.

2. Sia ora $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. Allora, f è integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}$ se è integrabile in senso generalizzato sia in $[0, +\infty[$ che in $] - \infty, 0]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx.$$

Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. Naturalmente, l'estremo finito d'integrazione nelle formule precedenti è del tutto arbitrario, e si è scelto 0 solo per non introdurre altri parametri. Qualunque numero reale andrebbe bene.

Esempio 6.4.16 Consideriamo la funzione $\frac{\sin x}{x}$, per $x \in \mathbf{R}$ (com'è noto, la funzione vale 1 per $x = 0$, trattandosi di una discontinuità eliminabile). Allora l'integrale improprio

$$(6.4.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

è convergente (e vale π), mentre l'integrale improprio

$$(6.4.18) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

non è convergente. Questo prova che esistono funzioni integrabili in senso generalizzato che non sono *assolutamente* integrabili in senso generalizzato. È abbastanza facile vedere la divergenza dell'integrale in (6.4.17), mentre non è altrettanto facile provare la convergenza dell'integrale in (6.4.17). La difficoltà risiede nel fatto che le primitive della

funzione $\frac{\sin x}{x}$, che ovviamente esistono per il Teorema fondamentale del calcolo, non sono esprimibili in termini delle funzioni elementari (come già osservato nell'Osservazione 6.2.5.4), per cui il calcolo esplicito, come negli esempi precedenti, è impossibile. Possiamo mettere in relazione quest'esempio con l'esempio 3.3.2.4 relativo alle serie a segni alterni, notando che, grazie al criterio di Leibniz, la trattazione relativa alle serie è molto più semplice.

Come accennato all'inizio, ci sono molte somiglianze tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie, tanto che sotto opportune condizioni lo studio di un integrale generalizzato e di una serie sono equivalenti, come mostra il seguente criterio. Esso è particolarmente efficace perché, mentre è in generale molto difficile trovare una formula esplicita per le ridotte di una serie, è spesso possibile determinare le primitive di una funzione usando il teorema fondamentale del Calcolo.

Teorema 6.4.17 *Sia $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ una funzione positiva e decrescente. Allora la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

converge se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

converge.

DIM. Siccome f è decrescente, risulta $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ per ogni $x \in [k, k+1]$ ed inoltre f è integrabile in ogni intervallo $[0, x]$, $x > 0$. Poiché f è positiva, la funzione

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

è monotona crescente e quindi esiste (finito o no) il

$$(6.4.19) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt,$$

che possiamo calcolare per valori interi di x considerando la successione $(\int_0^n f(t) dt)$. Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ consideriamo la suddivisione $P_n = \{0, 1, \dots, n-1, n\}$ dell'intervallo $[0, n]$ e le relative somme integrali inferiore e superiore, detta (s_n) la successione delle ridotte della serie $\sum_k f(k)$, risulta

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^n f(k) = s_n - f(0) \leq \int_0^n f(x) dx \leq S(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = s_{n-1},$$

sicché il limite in (6.4.19) è finito se e solo se la successione (s_n) converge. $\boxed{QED}$

Vediamo come il precedente criterio si possa applicare in due casi particolari importanti, già visti in altro modo.

Esempi 6.4.18 In quest'esempio discutiamo due famiglie di serie che sono utili anche come riferimento per i teoremi di confronto.

1. Sappiamo dall'Esempio 3.2.8.2 che la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$. Per ogni $\alpha > 0$ si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.

2. Sappiamo dall'Esempio 3.2.8.2 che la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^{\alpha} k}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$. Per ogni $\alpha > 0$ si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x \log^{\alpha} x}$ e concludere, in base all'esempio 6.4.10, che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.