Capitolo 1

Preliminari

1.1 Notazioni

Nelle sezioni seguenti sono raggruppate alcune delle notazioni adoperate nel seguito del testo.

1.1.1 Notazioni insiemistiche

Gli insiemi vengono solitamente rappresentati con lettere maiuscole: $E, F, \dots$ ed i loro elementi con lettere minuscole: $x, y, \dots$. Un insieme contenente gli oggetti $a, b, c, \dots$ si può indicare con $\{a, b, c, \dots\}$; inoltre, se E è un insieme assegnato e se, per ogni $x \in E$ è assegnata anche una proprietà $\mathcal{P}(x)$, l'insieme degli elementi di E per cui la proprietà è vera si denota con $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$.

Se in particolare viene assegnata una proprietà che non è soddisfatta da alcun elemento di E (ad esempio, $P(x) =$"x non è un elemento di E), si ottiene un insieme privo di elementi, che viene denominato *insieme vuoto* e denotato con $\emptyset$. L'insieme vuoto $\emptyset$ è caratterizzato dal fatto di non avere elementi.

Inoltre, si assumono le seguenti notazioni:

$\in$ Simbolo di *appartenenza*. La notazione "$x \in E$" afferma che l'oggetto x appartiene all'insieme (oppure è elemento di E). La negazione di tale circostanza si esprime scrivendo "$x \notin E$".

$\subset$ Simbolo di *inclusione*. La notazione "$E \subset F$" afferma che l'insieme E è contenuto nell'insieme (oppure è un sottoinsieme di) F, cioè gli elementi di E sono anche elementi di F. La negazione di tale circostanza si esprime scrivendo "$E \not\subset F$".

$\cap$ Simbolo di *intersezione*. La notazione "$E \cap F$" denota l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad E che ad F. Più in generale, se I è un insieme e per ogni $i \in I$ è assegnato un insieme E_i, l'insieme intersezione costituito dagli elementi che appartengono a tutti gli insiemi E_i viene denotato con $\displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$.

$\cup$ Simbolo di *unione*. La notazione "$E \cup F$" denota l'insieme costituito dagli elementi che appartengono o ad E oppure ad F (cioè ad almeno uno dei due insiemi). Inoltre, se per ogni $i \in I$ è assegnato un insieme E_i, l'insieme unione costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi E_i viene denotato con $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i$.

$\complement$ Simbolo di *complementare*. Se E è un sottoinsieme di F, la notazione "$\complement_F(E)$" denota l'insieme costituito dagli elementi di F che *non* appartengono ad E.

$\smallsetminus$ Simbolo di *differenza di insiemi*. La notazione "$F \smallsetminus E$" denota l'insieme costituito dagli elementi di F che *non* appartengono ad E. Si ha ovviamente $F \smallsetminus E = \complement_F(E \cap F)$.

Se x ed y sono oggetti distinti, l'insieme $\{x, y\}$ viene denominato *coppia non ordinata* (se $x = y$, si ottiene l'insieme $\{x\}$ ridotto al solo elemento x). Per quanto riguarda l'insieme $\{x, y\}$, non ha alcuna rilevanza l'ordine con il quale compaiono i due elementi x ed y; invece nella *coppia ordinata* (x, y) di prima coordinata x e seconda coordinata y l'ordine in cui compaiono gli elementi diventa di importanza sostanziale (precisamente, si potrebbe porre $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ per differenziare il ruolo dei due elementi, ma nel seguito si preferirà basarsi su una definizione intuitiva).

Pertanto, si ha $(a, b) = (c, d)$ se e solo se $a = c$ e $b = d$.

In modo del tutto analogo, assegnati tre oggetti x, y e z, si può definire la terna ordinata (x, y, z). Nel caso in cui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano n oggetti ($n \geq 2$), si definisce con lo stesso metodo la n-pla ordinata di prima coordinata x_1, di seconda coordinata x_2, ..., ed n-esima coordinata x_n.

Se E ed F sono due insiemi, si può considerare l'insieme di tutte le coppie ordinate con prima coordinata in E e seconda coordinata in F. Tale insieme viene denominato *insieme prodotto* di E per F e viene denotato con il simbolo $E \times F$; se $E = F$, si può anche scrivere E^2 anziché $E \times E$.

Il prodotto cartesiano $E \times F$ può essere rappresentato geometricamente indicando gli elementi dell'insieme E su un segmento disposto orizzontalmente e gli elementi di F su un segmento disposto verticalmente; gli elementi del prodotto (coppie ordinate) sono allora rappresentati come elementi del rettangolo in Figura 1.1.

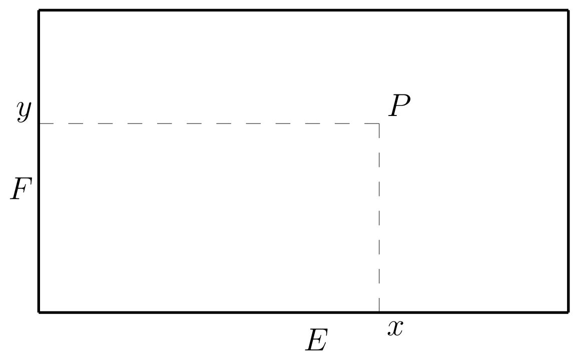

Figura 1.1: *Rappresentazione del prodotto cartesiano di due insiemi.*

Si osservi che se l'insieme E è formato da n elementi distinti e l'insieme F è formato da m elementi distinti, allora il prodotto cartesiano $E \times F$ possiede esattamente $n \cdot m$ elementi distinti.

In modo analogo si considera il prodotto cartesiano $E \times F \times G$ di tre insiemi E, F e G; esso è l'insieme delle terne ordinate la cui prima coordinata è un elemento di E, la seconda coordinata è un elemento di F e la terza coordinata è un elemento di G.

Più in generale, se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono n insiemi ($n \geq 2$), si può definire il prodotto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ come l'insieme delle n-ple ordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ tali che $x_1 \in E_1, \ldots x_n \in E_n$. Anche in questo caso, se $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, si utilizza il simbolo E^n per denotare il prodotto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

1.1.2 Notazioni logiche

Gli enunciati considerati in matematica (denominati anche proprietà, proposizioni o affermazioni) sono asserzioni di senso compiuto che possono essere o veri o falsi e vengono rappresentati con lettere corsive maiuscole; ad esempio: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots$.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono enunciati, si scrive $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ("$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$") per denotare l'enunciato vero nei casi in cui $\mathcal{A}$ sia falso oppure, supposto vero l'enunciato $\mathcal{A}$, risulta vero anche l'enunciato $\mathcal{B}$; conseguentemente, "$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$" risulta falso solo nel caso in cui $\mathcal{A}$ è vero e $\mathcal{B}$ è falso.

Inoltre, si scrive $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ("$\mathcal{A}$ equivale a $\mathcal{B}$") per denotare l'enunciato vero se e solo se gli enunciati $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono entrambi veri oppure entrambi falsi.

$\forall$ *Quantificatore universale "per ogni".* Per esprimere la circostanza in cui una proprietà $\mathcal{P}$ (assegnata per ogni elemento x di un insieme E) sia sempre verificata, si scrive

$$\forall\, x \in E : \; \mathcal{P}(x)$$

(si legge "per ogni x in E si ha $\mathcal{P}(x)$)". Il simbolo ":" ha la funzione di abbreviazione linguistica e si legge "si ha che" oppure "risulta che".

$\exists$ *Quantificatore esistenziale "esiste".* Per esprimere la circostanza in cui una proprietà $\mathcal{P}$ (assegnata per ogni elemento x di un insieme E) sia verificata per almeno un elemento, si scrive

$$\exists\, x \in E \text{ t.c. } \mathcal{P}(x)$$

(si legge "esiste x in E tale che $\mathcal{P}(x)$)". Il simbolo "t.c." ha la funzione di abbreviazione linguistica e si legge "tale che". In molti casi viene utilizzato anche il simbolo $\ni'$ come abbreviazione di *tale che.* Nel caso in cui esista esattamente un unico elemento di $x \in E$ per cui $\mathcal{P}(x)$ sia vera si scrive $\exists | x \in E$ t.c. $\mathcal{P}(x)$ (si legge "esiste un unico x in E tale che $\mathcal{P}(x)$)".

1.1.3 Notazioni numeriche

$\mathbb{N}$ Insieme dei numeri naturali: 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Z}$ Insieme dei numeri interi relativi: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Q}$ Insieme dei numeri razionali, che possono cioè essere espressi nella forma

$$\frac{m}{n}, \qquad \text{dove} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{ed} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Un numero razionale q si può rappresentare in forma decimale:

$$q = a_0, a_1 \dots a_r \overline{a_{r+1} \dots a_{r+s}}$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \dots a_{r+s} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ e la parte periodica $\overline{a_{r+1} \dots a_{r+s}}$ è da intendersi ripetuta infinite volte.

$\mathbb{R}$ Insieme dei numeri reali, che in forma decimale hanno la seguente rappresentazione

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 a_2 a_3 \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ e non vi è necessariamente una parte periodica.

$\mathbb{C}$ Insieme dei numeri complessi, che in forma geometrica hanno la rappresentazione

$$z = (a, b)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. (In forma algebrica, il numero complesso $z = (a, b)$ si scrive $z = a + ib$ dove i denota l'unità immaginaria definita come soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.)

Nel seguito sarà utile utilizzare la convenzione di scrivere un asterisco in alto a destra ad un insieme per denotare lo stesso insieme privato del numero 0, ed il segno + (oppure −) per denotare gli elementi positivi (oppure negativi) dell'insieme. Pertanto, ad esempio

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}.$$

Un'altra convenzione riguarda la somma e il prodotto di un numero finito di elementi di un insieme numerico: assegnati i numeri $a_1, \ldots, a_n$ si pone

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots a_n \ , \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdots a_n \ .$$

Per quanto riguarda i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, avranno particolare rilevanza i seguenti sottoinsiemi denominati *intervalli*:

- *Intervalli limitati.* Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Si pone:

  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervallo limitato chiuso di estremi a e b);

  $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervallo limitato aperto di estremi a e b);

  $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervallo limitato semichiuso a sinistra (oppure semiaperto a destra) di estremi a e b);

  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervallo limitato semiaperto a sinistra (oppure semichiuso a destra) di estremi a e b);

- *Intervalli illimitati.* Sia $c \in \mathbb{R}$. Si pone:

  $[c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid c \leq x\}$ (intervallo illimitato a destra chiuso di estremo c);

  $]c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\}$ (intervallo illimitato a destra aperto di estremo c);

$]-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$ (intervallo illimitato a sinistra chiuso di estremo c);

$]-\infty, c[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$ (intervallo illimitato a destra aperto di estremo c).

Le notazioni $[c, \rightarrow [$ e $] \leftarrow, c]$ sono equivalenti a $[c, +\infty[$ e $]-\infty, c]$.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, si denomina *intervallo centrato aperto* (rispettivamente, *chiuso*) di centro x_0 e raggio δ, l'intervallo aperto $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (rispettivamente, l'intervallo chiuso $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$). Nel seguito, sarà opportuno ricorrere alle seguenti notazioni:

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ , \quad I_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta[\ , \quad I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta, x_0]\ . \tag{1.1.1}$$

Inoltre, ogni sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo centrato di centro x_0 viene denominato *intorno* di x_0; analogamente, ogni sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ per cui esista $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $I_\delta^+(x_0) \subset I$ (rispettivamente, $I_\delta^-(x_0) \subset I$) viene denominato *intorno destro* (rispettivamente, *intorno sinistro*) di x_0.

L'insieme degli intorni di x_0 viene denotato con il simbolo $\mathcal{I}(x_0)$; inoltre, l'insieme degli intorni destri (rispettivamente, sinistri) di x_0 viene denotato con $\mathcal{I}^+(x_0)$ (rispettivamente, $\mathcal{I}^-(x_0)$).

Per convenzione, inoltre, si denominerà *intorno* di $+\infty$ (rispettivamente, di $-\infty$) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo illimitato a destra (rispettivamente, a sinistra) ed il loro insieme verrà denotato con $\mathcal{I}(+\infty)$ (rispettivamente, $\mathcal{I}(-\infty)$).

Infine, si dice che $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è un *punto di accumulazione* per un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ se, per ogni intorno I di x_0,

$$X \cap I \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \tag{1.1.2}$$

(quindi, in ogni intorno di x_0 vi sono elementi di X diversi da x_0). Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e la condizione precedente è verificata per ogni intorno destro (rispettivamente, sinistro) di x_0, si dice che x_0 è un *punto di accumulazione a destra* (rispettivamente, *a sinistra*) per X.

Per semplificare l'esposizione di alcuni argomenti, può essere utile introdurre l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\ . \tag{1.1.3}$$

che viene denominato *insieme ampliato dei numeri reali* oppure più brevemente $\mathbb{R}$ *ampliato*; per denotarlo, possono essere usati anche i simboli: $\widehat{\mathbb{R}}$ oppure $\widetilde{\mathbb{R}}$.

1.2 Alcune proprietà degli insiemi numerici

In questa sezione sono raccolte alcune delle proprietà degli insiemi numerici che verranno utilizzate frequentemente nel seguito.

1.2.1 Principio di induzione

Per quanto riguarda l'insieme dei numeri naturali, si richiama la seguente proprietà, la cui dimostrazione è basata sulle proprietà della relazione d'ordine di $\mathbb{N}$ di cui si è evitato l'approfondimento.

Proposizione 1.2.1 (Principio di induzione completa) *Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che*

$$\begin{cases} 1) & 0 \in A\,, \\ 2) & n \in A \;\Rightarrow\; n+1 \in A\,, \end{cases}$$

allora $A = \mathbb{N}$.

Si supponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia assegnata una proprietà $\mathcal{P}(n)$; applicando il principio di induzione all'insieme $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n)\}$, si riconosce che se $\mathcal{P}(0)$ è vera e se, supposta vera $\mathcal{P}(n)$ per un fissato $n \in \mathbb{N}$, risulta vera anche $\mathcal{P}(n+1)$, allora la proprietà $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Naturalmente, se anzichè considerare 0 come punto iniziale si considera un numero naturale p, si avrà che la proprietà $\mathcal{P}(n)$ sarà vera per ogni $n \geq p$.

1.2.2 Formula del binomio di Newton

Il principio di induzione completa consente di riconoscere agevolmente la seguente formula del binomio di Newton. È necessario tuttavia introdurre alcune notazioni preliminari.

Innanzitutto, conviene richiamare la definizione di *fattoriale* di un numero naturale:

$$0! := 1\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} :\ (n+1)! := (n+1)\cdot n!\,. \tag{1.2.1}$$

Si possono definire ora i coefficienti binomiali. Se $n \in \mathbb{N}$ e $k = 0, \dots, n$, si definisce *coefficiente binomiale* n su k, e si denota con $\binom{n}{k}$, il seguente numero naturale:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,. \tag{1.2.2}$$

Il motivo per cui tale numero viene denominato coefficiente binomiale risulterà chiaro dallo studio della formula del binomio di Newton.

Si possono elencare le seguenti proprietà elementari dei coefficienti binomiali.

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$.

2. Per ogni $n \geq 2$ e $k = 1, \ldots, n-1$, si ha
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} .$$

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k = 0, \ldots, n$
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} .$$

4. Per ogni $n \geq 1$ e $k = 1, \ldots, n$, si ha
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} .$$

Infatti, dalla definizione,
$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} . \end{aligned}$$

Proposizione 1.2.2 (Formula del binomio di Newton) *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n \geq 1$, si ha:*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

DIMOSTRAZIONE. Se $n = 1$, la tesi è ovvia. Si supponga ora che la tesi sia vera per un numero naturale $n \geq 1$. Allora, dalle proprietà dei coefficienti binomiali,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = a \cdot (a+b)^n + b \cdot (a+b)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^h b^{n-h+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} ,
\end{aligned}$$

e quindi la tesi è vera per il numero naturale $n+1$. Dal principio di induzione (Proposizione 1.2.1), si ottiene la tesi.

1.2.3 Cenni di calcolo combinatorio

Si introducono ora alcune definizioni di carattere combinatorio.

Definizione 1.2.3 *Siano $a_1, \ldots, a_n$ oggetti distinti. Se k è un intero compreso tra 1 ed n, si definisce* disposizione semplice *degli n oggetti a k a k, ogni k-pla $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ formata da k oggetti distinti tra gli n assegnati.*

Pertanto due disposizioni di n oggetti a k a k possono differire o per un oggetto oppure anche per l'ordine in cui gli oggetti vengono considerati.

Il numero delle disposizioni di n oggetti a k a k viene indicato con $D_{n,k}$. Tenendo presente che il primo dei k oggetti può essere scelto tra tutti gli n oggetti, che il secondo può essere scelto tra i rimanenti $n-1$ oggetti e così via, il numero delle disposizioni di n oggetti a k a k risulta essere:

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) .$$

Nel caso particolare in cui $k = n$, si preferisce parlare di *permutazioni* di n oggetti (distinti) anziché di disposizione di n oggetti ad n ad n. Conviene osservare che due permutazioni possono differire solamente per l'ordine degli

n oggetti in quanto contengono tutti gli n oggetti disponibili. Indicato con P_n il numero di permutazioni di n oggetti, si ha quindi

$$P_n = n! \; .$$

Il numero P_n quindi indica il numero di modi possibili in cui si possono ordinare n oggetti distinti.

Si può fornire a questo punto la definizione di combinazione semplice.

Definizione 1.2.4 *Siano $a_1, \ldots, a_n$ oggetti distinti. Se k è un intero compreso tra 1 ed n, si definisce* combinazione semplice *degli n oggetti a k a k, ogni insieme $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}\}$ formato da k oggetti distinti tra gli n assegnati.*

A differenza delle disposizioni, due combinazioni distinte di n oggetti a k a k devono differire per almeno un oggetto (l'ordine in cui gli oggetti vengono considerati in questo caso non ha importanza).

Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti a k a k viene indicato con $C_{n,k}$. Tenendo presente che k oggetti possono differire per l'ordine in P_k modi distinti e che una combinazione individua quindi P_k disposizioni distinte, si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \binom{n}{k} \; .$$

Tale numero rappresenta il numero di tutti i sottoinsiemi formati da k elementi in un insieme di n elementi.

Fino ad ora sono stati considerati sempre oggetti distinti. In molte applicazioni, tuttavia, è consentito avere la possibilità di ripetere più volte uno stesso oggetto. In tali casi si fa ricorso alle definizioni seguenti.

Definizione 1.2.5 *Siano $a_1, \ldots, a_n$ oggetti distinti. Se $k \geq 1$, si definisce* disposizione con ripetizione *degli n oggetti a k a k, ogni k-pla $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ formata da k oggetti non necessariamente distinti tra gli n assegnati.*

Due disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k possono differire per un oggetto, per il numero di volte in cui un oggetto compare oppure per l'ordine in cui gli oggetti vengono considerati.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k viene indicato con $D^r_{n,k}$. Questa volta, sia il primo dei k oggetti che tutti i successivi possono essere scelti tra tutti gli n oggetti, e quindi

$$D^r_{n,k} = n^k \; .$$

Anche ora, nel caso particolare in cui $k = n$, si preferisce parlare di *permutazioni con ripetizione* di n oggetti anziché di disposizione con ripetizione di n oggetti ad n ad n. Indicato con P^r_n il numero di permutazioni con ripetizione di n oggetti, si ha:

$$P^r_n = n^n \ .$$

Un'ultima definizione riguarda le combinazioni con ripetizione.

Definizione 1.2.6 *Siano $a_1, \ldots, a_n$ oggetti distinti. Se $k \geq 1$, si definisce* combinazione con ripetizione *degli n oggetti a k a k, ogni insieme formato da k oggetti non necessariamente distinti tra gli n assegnati.*

Due combinazioni con ripetizione di n oggetti a k a k possono differire per un oggetto oppure per il numero di volte in cui un oggetto viene considerato, indipendentemente però dall'ordine.

Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti a k a k viene indicato con $C^r_{n,k}$.

In questo caso, il fatto che i k oggetti non devono essere necessariamente distinti equivale a supporre che l'insieme di partenza sia formato da $n+k-1$ elementi distinti anziché da n elementi distinti e che i k oggetti debbano però essere distinti tra loro. Da ciò segue:

$$C^r_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} \ .$$

1.2.4 Valore assoluto e distanza in $\mathbb{R}$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il *valore assoluto* di x viene denotato con $|x|$ ed è definito al modo seguente

$$|x| := \begin{cases} x \ , & \text{se } x \geq 0 \ , \\ -x \ , & \text{se } x < 0 \ . \end{cases} \tag{1.2.3}$$

In base alla definizione precedente, si dimostrano facilmente le seguenti proprietà, valide per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;
3. $|-x| = |x|$;
4. $x \leq |x|$;
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

6. $|x+y| \leq |x| + |y|$;

   (infatti, se $x + y \geq 0$, dalla proprietà 4., $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$, mentre, se $x + y < 0$, sempre dalle 4. e 3., $|x + y| = -x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$).

7. $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$;

   (infatti, se $|x| - |y| \geq 0$, dalla proprietà 6. si ha $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$ e quindi $|\,|x| - |y|\,| = |x| - |y| \leq |x - y|$; se $|x| - |y| < 0$, si procede allo stesso modo invertendo i ruoli di x e y.)

Nello studio delle disequazioni che coinvolgono il valore assoluto risultano inoltre particolarmente utili le proprietà seguenti, in cui il valore assoluto viene confrontato con un numero reale a.

8. i) se $a < 0$, la diseguaglianza $|x| \leq a$ non è mai soddisfatta;

   ii) se $a \geq 0$, si ha $|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$.

9. i) se $a \leq 0$, la diseguaglianza $|x| < a$ non è mai soddisfatta;

   ii) se $a > 0$, si ha $|x| < a$ se e solo se $-a < x < a$.

10. i) se $a \leq 0$, la diseguaglianza $|x| \geq a$ è sempre soddisfatta;

    ii) se $a > 0$, si ha $|x| \geq a$ se e solo se $x \leq -a$ oppure $x \geq a$;

11. i) se $a < 0$, la diseguaglianza $|x| > a$ è sempre soddisfatta;

    ii) se $a \geq 0$, si ha $|x| > a$ se e solo $sex < -a$ oppure $x > a$.

Il valore assoluto di un numero reale consente di definire la distanza tra due numeri reali. Precisamente, per ogni coppia di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la *distanza* di x da y viene denotata con $d(x, y)$ ed è definita ponendo

$$d(x, y) := |x - y| \; .$$

Valgono le seguenti proprietà della distanza, che seguono direttamente dalle proprietà 1., 2., 3. e 6. del valore assoluto elencate sopra.

1. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ d(x, y) \geq 0$;

2. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ d(y, x) = d(x, y)$ (proprietà simmetrica della distanza);

4. $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (proprietà triangolare della distanza).

1.2.5 Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$

Nello studio delle funzioni reali, di interesse centrale nel seguito, sarà di notevole aiuto la rappresentazione geometrica sia di $\mathbb{R}$ che di $\mathbb{R}^2$ e, per le funzioni di due variabili, anche di $\mathbb{R}^3$.

L'insieme dei numeri reali viene solitamente rappresentato come l'insieme dei punti di una retta. Infatti, sia r una retta e si fissino due punti distinti O e U di r corrispondenti ai numeri reali 0 e 1. La semiretta avente O come estremo e contenente il punto U viene denominata semiasse positivo ed indicata con r_+; analogamente, la semiretta di estremo O non contenente il punto U viene denominata semiasse negativo ed indicata con r_-. Si può allora definire una corrispondenza tra un numero reale x ed uno ed un solo elemento P della retta r prendendo il segmento OU come unità di misura e considerando il segmento OP avente lunghezza x con P in r_+ se x è positivo e P in r_- se x è negativo. Viceversa, la stessa corrispondenza consente di far corrispondere ad ogni punto P della retta uno ed un solo numero reale x. In questo modo ogni numero reale viene identificato con un punto della retta r e viceversa. Per questo motivo la retta r (o l'insieme $\mathbb{R}$) viene anche denominata *retta reale* così come gli elementi di $\mathbb{R}$ vengono spesso chiamati punti. Infine la semiretta positiva r_+ (denominata anche *semiretta positiva*) viene spesso evidenziata mediante una freccia come in Figura 1.2.

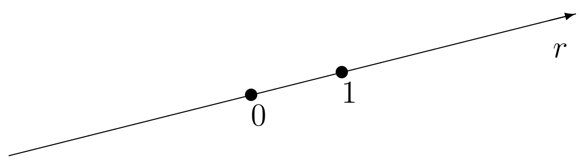

Figura 1.2: *Rappresentazione geometrica dei numeri reali.*

Si considera ora una rappresentazione del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$. In questo caso si fissano due rette r_1 ed r_2 non parallele su un piano π. Si denota con O il punto di intersezione di r_1 ed r_2 ed inoltre su ognuna delle due rette si considera un ulteriore punto distinto da O che verrà denotato con U_1 e rispettivamente U_2. In questo modo si dice che è stato assegnato un *riferimento cartesiano* ed il piano π viene anche denominato *piano cartesiano*. Ad ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si può far corrispondere una ed una sola coppia (P_1, P_2) con $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ (in quanto sulle rette r_1 ed r_2 si può considerare una rappresentazione dei numeri reali) e successivamente si può considerare il punto P del piano π ottenuto come intersezione delle rette parallele ad r_2 ed r_1 e passanti per P_1 e rispettivamente P_2 (vedasi la Figura 1.3).

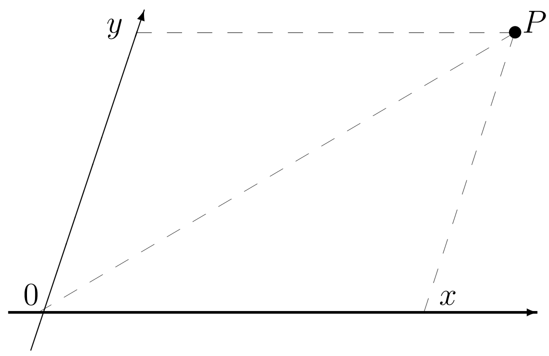

Figura 1.3: *Riferimento cartesiano non ortogonale.*

Anche ora con il procedimento inverso, ad ogni punto del piano π si può far corrispondere una ed una sola coppia di numeri reali. Quindi il piano π può essere identificato con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Il punto O viene denominato *origine* del riferimento cartesiano e corrisponde ovviamente alla coppia (0,0) (mentre i punti U_1 e U_2 corrispondono alle coppie (1,0) e rispettivamente (0,1)).

La retta r_1 viene denominata *asse delle ascisse* e la retta r_2 *asse delle ordinate*. Inoltre le coordinate della coppia (x, y) al quale corrisponde il punto P di π vengono anche denominate *ascissa* e *ordinata* di P ed il punto P di coordinate (x, y) viene indicato anche con $P(x, y)$.

Nel caso particolare in cui le due rette r_1 e r_2 siano perpendicolari, il riferimento cartesiano si dice *ortogonale*. Se, in più, i punti U_1 ed U_2 su r_1 e rispettivamente r_2 vengono fissati alla stessa distanza dall'origine O, allora il riferimento ortogonale viene denominato *ortonormale* (vedasi la Figura 1.4).

Conviene osservare che la rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ su un piano cartesiano consente di definire anche in $\mathbb{R}^2$ una distanza con le stesse proprietà di quella già precedentemente introdotta in $\mathbb{R}$. Infatti, per ogni coppia $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ di elementi di $\mathbb{R}^2$ la *distanza* di x da y viene indicata con $d(x, y)$ ed è definita ponendo

$$d(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\ .$$

$\triangleright$ La rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^3$ si può ottenere in maniera del tutto analoga a quella discussa considerando tre rette non complanari r_1, r_2 ed r_3 nello spazio Σ, che si intersecano in un punto 0. Su ognuna delle rette

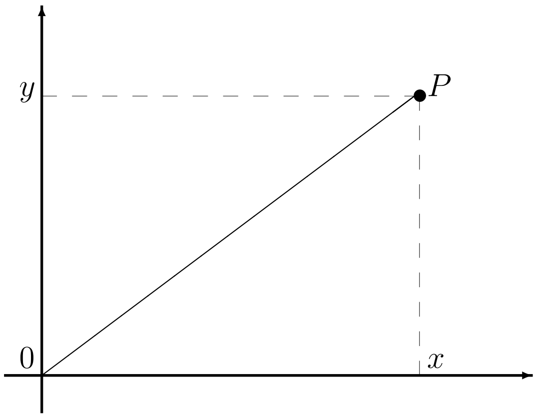

Figura 1.4: *Riferimento cartesiano ortonormale.*

r_1, r_2 ed r_3, che per semplicità vengono supposte perpendicolari tra loro, viene fissato un ulteriore punto distinto da O e che viene denotato rispettivamente con U_1, U_2 e U_3. Il piano contenente le rette r_1, r_2 viene spesso denominato *piano* xy, quello contenente le rette r_1, r_3 viene denominato *piano* xz ed infine il piano contenente le rette r_2, r_3 viene denominato *piano* yz.

Anche in questo caso si dice che è stato assegnato un *riferimento cartesiano* nello spazio Σ, che viene denominato *spazio euclideo.* Ad ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si può far corrispondere una ed una sola terna (P_1, P_2, P_3) con $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2$ e $P_3 \in r_3$ e successivamente si può considerare il punto P di Σ ottenuto come intersezione dei piani paralleli ai piani yz, xz e xy e passanti rispettivamente per i punti P_1, P_2 e P_3 (vedasi la Figura 1.5).

Il procedimento inverso fa corrispondere ad ogni punto di Σ una ed una sola terna di numeri reali. Quindi lo spazio Σ può essere identificato con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^3$.

Anche ora il punto O viene denominato *origine* del riferimento cartesiano e corrisponde ovviamente alla terna (0,0,0) (mentre i punti U_1, U_2 e U_3 corrispondono alle terne (1,0,0), (0,1,0) e rispettivamente (0,0,1)).

La retta r_1 viene denominata *asse delle ascisse*, la retta r_2 *asse delle ordinate* e infine la retta r_3 *asse delle altezze*.

Inoltre le coordinate della terna (x, y, z) alla quale corrisponde il punto P di Σ vengono anche denominate *ascissa*, *ordinata* e *altezza* (oppure *quota*) di P ed il punto P di coordinate (x, y, x) viene indicato anche con $P(x, y, z)$.

Per $n \geq 4$ non è possibile una rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^n$; tuttavia, è ancora possibile considerare una distanza che verifica le stesse proprietà

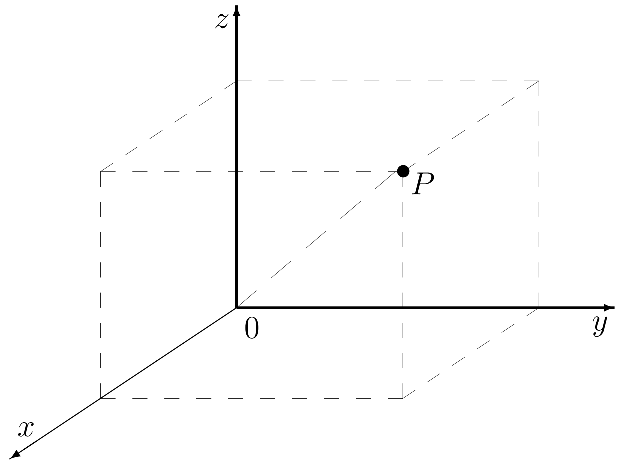

Figura 1.5: *Riferimento cartesiano dello spazio.*

di quella introdotta in $\mathbb{R}$.

Si supponga infatti $n \geq 3$. Per ogni coppia di n-ple $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ di elementi di $\mathbb{R}^n$, infatti, si può definire la *distanza* $d(x, y)$ di x da y ponendo

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \ .$$

1.3 Proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Nella presente sezione si richiamano alcune nozioni relative ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che verranno utilizzate in seguito per definire altrettante proprietà delle funzioni reali.

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Valgono le seguenti definizioni.

- **Sottoinsiemi limitati.** Si dice che X è *limitato superiormente* (rispettivamente, *limitato inferiormente*) se

  $$\exists\ M \in \mathbb{R}\ \text{ t.c. } \forall\ x \in X :\ x \leq M \quad (\text{rispettivamente, } M \leq x\ ). \tag{1.3.1}$$

  Ogni elemento $M \in \mathbb{R}$ verificante la (1.3.1) viene denominato *maggiorante* (rispettivamente, *minorante*) di X. Infine, si dice che X è *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se

  $$\exists\ m, M \in \mathbb{R}\ \text{ t.c. } \forall\ x \in X :\ m \leq x \leq M\ . \tag{1.3.2}$$

Gli intervalli illimitati a sinistra sono particolari esempi di sottoinsiemi limitati superiormente di $\mathbb{R}$, gli intervalli illimitati a destra sono esempi di sottoinsiemi limitati inferiormente di $\mathbb{R}$ ed infine gli intervalli limitati sono sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$. Viceversa, ogni sottoinsieme limitato superiormente di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di un intervallo illimitato a sinistra, ogni sottoinsieme limitati inferiormente è un sottoinsieme di un intervallo illimitato a destra ed ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di un intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

- **Sottoinsiemi dotati di massimo e minimo.** Si dice X è *dotato di massimo* (rispettivamente, *dotato di minimo*) se

$$\exists\ M \in X \text{ t.c. } \forall\ x \in X:\ x \leq M \quad (\text{rispettivamente, } M \leq x\ ). \tag{1.3.3}$$

(A differenza dei maggioranti e minoranti in cui $M \in \mathbb{R}$, questa volta si pretende $M \in X$.) L'elemento M verificante la (1.3.3), univocamente determinato dalla condizione $M \in X$, viene denominato *massimo* di X (rispettivamente, *minimo* di X) e denotato con uno dei seguenti simboli:

$$\max X\ ,\quad \max_{x\in X} x\ ,\qquad (\text{rispettivamente, } \min X\ ,\quad \min_{x\in X} x\ ).$$

Gli intervalli semichiusi a destra sono particolari esempi di sottoinsiemi dotati di massimo e quelli semichiusi a sinistra di sottoinsiemi dotati di minimo.

- **Sottoinsiemi dotati di estremi.** Si dice X è *dotato di estremo superiore* (rispettivamente, *dotato di estremo inferiore*) se esiste un elemento $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1) & \forall\ x \in X:\ x \leq \ell \quad (\text{rispettivamente, } \ell \leq x\ ); \\ 2) & m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in X:\ x \leq m\ \Rightarrow\ \ell \leq m \\ & (\text{rispettivamente, } \forall\ x \in X:\ m \leq x\ \Rightarrow\ m \leq \ell\ ). \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Anche in questo caso l'elemento ℓ verificante la (1.3.4) è unico, viene denominato *estremo superiore* di X (rispettivamente, *estremo inferiore* di X) e viene denotato con

$$\sup X\ ,\quad \sup_{x\in X} x\ ,\qquad (\text{rispettivamente, } \inf X\ ,\quad \inf_{x\in X} x\ ).$$

.

La seconda proprietà in (1.3.4) si può esprimere in maniera equivalente come segue

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists\ x \in X \text{ t.c. } \ell - \varepsilon < x \quad (\text{rispettivamente, } x < \ell + \varepsilon\ ). \tag{1.3.5}$$

Una proprietà notevole dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è la seguente.

Proposizione 1.3.1 (Seconda forma dell'assioma di completezza)[1] *Ogni sottoinsieme limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente) di $\mathbb{R}$ è dotato (in $\mathbb{R}$) di estremo superiore (rispettivamente, estremo inferiore).*

Nel caso in cui un insieme non sia limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente), esso non è dotato di estremo superiore (rispettivamente, inferiore); in tal caso, si scriverà per convenzione

$$\sup X = +\infty\ , \qquad (\text{rispettivamente, } \inf X = -\infty\ ). \tag{1.3.6}$$

1.4 Funzioni

Rinunciando ad un'esposizione precisa del concetto di funzione, bisogna tener presente che intuitivamente assegnare una funzione vuol dire assegnare tre oggetti: un *insieme di partenza* (denominato anche *insieme di definizione* oppure *dominio* di f), un *insieme di arrivo* ed il *grafico* della funzione, cioè una 'corrispondenza' che ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa uno ed un solo elemento dell'insieme di arrivo. Una *funzione* f che ha E come insieme di partenza ed F come insieme di arrivo viene indicata con $f : E \to F$ (oppure talvolta con $E \xrightarrow{f} F$ oppure con $x \mapsto f(x)$). Il *valore*

[1] Tale proprietà costituisce la differenza sostanziale tra gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$; in $\mathbb{Q}$, ad esempio, l'insieme limitato $\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}$ non è dotato di estremo superiore (appartenente a $\mathbb{Q}$).

Nella *prima forma dell'assioma di completezza*, equivalente a quella esposta, vengono considerati *sottoinsiemi separati* di $\mathbb{R}$; se $A, B \subset \mathbb{R}$, si dice che A e B sono separati se sono non vuoti e verificano una delle seguenti proprietà:

$$\forall\, a \in A\ \forall\, b \in B :\ a \le b \quad \text{oppure} \quad \forall\, a \in A\ \forall\, b \in B :\ b \le a\ .$$

Un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice *elemento separatore* di due sottoinsiemi separati A e B se

$$\forall\, a \in A\ \forall\, b \in B :\ a \le \lambda \le b \quad \text{oppure} \quad \forall\, a \in A\ \forall\, b \in B :\ b \le \lambda \le a\ .$$

La prima forma dell'assioma di completezza asserisce allora che due sottoinsiemi separati di $\mathbb{R}$ ammettono sempre almeno un elemento separatore.

Infine, si osserva che l'elemento separatore non è in generale unico, a meno che non si supponga che i sottoinsiemi A e B, oltre d essere separati, siano anche *contigui*, cioè verifichino l'ulteriore condizione:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^* :\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \text{ t.c. } 0 \le b - a < \varepsilon \quad \text{oppure} \quad 0 \le a - b < \varepsilon\ .$$

che una funzione f assume in un elemento $x \in E$ viene denotato con $f(x)$ e rappresenta l'unico elemento di F associato ad x mediante la funzione f.

Il grafico G_f di una funzione $f : E \to F$ viene definito come l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $x \in E$ e $y = f(x)$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} . \tag{1.4.1}$$

Sia ora $f : E \to F$ una funzione di E in F. Se A è un sottoinsieme di E, si denomina *immagine diretta di* A mediante f, e la si denota con $f(A)$, il seguente sottoinsieme di F:

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists\, x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\} . \tag{1.4.2}$$

L'immagine diretta di E mediante f viene denominata semplicemente *immagine di* f (oppure *insieme dei valori di* f) e denotata anche con $\mathrm{Im}(f)$.

Si osservi che l'immagine di f non coincide necessariamente con tutto l'insieme F. Nel caso in cui ciò accada, si dice che la funzione f è *suriettiva* (o anche *surgettiva*; quindi, f è suriettiva se è verificata la seguente condizione:

$$\forall\, y \in F\ \exists\, x \in E \text{ t.c. } f(x) = y . \tag{1.4.3}$$

Al contrario, se è assegnato un sottoinsieme B di F, si definisce *immagine reciproca* (oppure *immagine indiretta* o *controimmagine*) di B mediante f, e la si denota con $\overset{-1}{f}(B)$, il seguente sottoinsieme di E:

$$\overset{-1}{f}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} . \tag{1.4.4}$$

Se si considera $y \in F$, la controimmagine $\overset{-1}{f}(\{y\})$ viene anche denotata con $\overset{-1}{f}(y)$. Si osservi che $\overset{-1}{f}(y)$ risulta vuota se la funzione f non assume il valore y in alcun elemento $x \in E$ (tale circostanza non si verifica se la funzione è suriettiva). Inoltre, qualora $\overset{-1}{f}(y)$ sia non vuota, non è detto che essa sia costituita da un solo elemento $x \in E$; se quest'ultima condizione è soddisfatta, la funzione f viene denominata *iniettiva* (o anche *ingettiva*. Quindi f è iniettiva se verifica la seguente condizione:

$$x, y \in E, f(x) = f(y) \ \Rightarrow x = y . \tag{1.4.5}$$

Infine, una funzione $f : E \to F$ viene denominata *biiettiva* (o anche *bigettiva*) se essa è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. Dalle (1.4.3) e (1.4.5), la proprietà di biiettività si caratterizza come segue:

$$\forall\, y \in F\ \exists | x \in E \text{ t.c. } f(x) = y . \tag{1.4.6}$$

La proprietà di biiettività consente quindi di considerare una nuova funzione $g : F \to E$ definita ponendo, per ogni $y \in F$,

$$g(y) := x \;, \qquad \text{dove } x \in E \text{ e } f(x) = y \tag{1.4.7}$$

(si osservi che x è univocamente determinato dalle condizioni $x \in E$ e $f(x) = y$). La funzione g viene denominata *inversa di* f e denotata con il simbolo f^{-1}.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà delle funzioni inverse:

$$\forall\, x \in E: \; f^{-1}(f(x)) = x \;, \qquad \forall\, y \in F: \; f(f^{-1}(y)) = y \;. \tag{1.4.8}$$

Una funzione $f : E \to F$ per cui esiste la funzione inversa (cioè la funzione f^{-1} verificante le (1.4.8)) viene denominata *invertibile*. Da quanto sopra, segue che ogni funzione biiettiva è invertibile; anche il viceversa come si può verificare direttamente dalle definizioni e quindi le funzioni biiettive sono tutte e sole quelle invertibili.

Un'ulteriore operazione importante tra funzioni è quella di funzione composta.

Siano assegnati E, F e G insiemi e siano $f : E \to F$ una funzione di E in F e $g : F \to G$ una funzione di F in G. Si denomina funzione composta di f e g, e la si denota con $g \circ f$ "g cerchietto f" la funzione avente E come insieme di partenza, G come insieme di arrivo e tale che, per ogni $x \in E$,

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \;. \tag{1.4.9}$$

In realtà, la funzione composta può essere definita in circostanze più generali, in cui non è necessario che l'insieme di arrivo di f coincida con l'insieme di partenza di g; è sufficiente, infatti, che l'insieme di arrivo di f sia un sottoinsieme di F affinchè continui ad avere senso la definizione (1.4.9).

In molte circostanze, una funzione verifica una determinata proprietà (per esempio, quella di essere iniettiva oppure biiettiva) non su tutto l'insieme di partenza, ma su di un particolare sottoinsieme di esso. In tali casi, può risultare utile ricorrere al seguente concetto di restrizione di una funzione.

Siano assegnati una funzione $f : E \to F$ ed un sottoinsieme A di E.

Si denomina *restrizione di* f all'insieme A, e si denota con $f_{|A}$, la funzione da A in F definita ponendo, per ogni $x \in A$,

$$f_{|A}(x) := f(x) \;. \tag{1.4.10}$$

Quindi i valori della restrizione sono gli stessi della funzione; la restrizione $f_{|A}$ tuttavia risulta definita nel sottoinsieme A anziché nell'intero insieme E.

Il concetto di restrizione risulta utile soprattutto nei casi in cui si voglia ottenere una funzione iniettiva partendo da una funzione arbitraria; in tali casi infatti si considera un particolare sottoinsieme in cui la proprietà di iniettività è soddisfatta.

D'altra parte, è sempre possibile ottenere una funzione suriettiva partendo da una qualsiasi funzione; infatti, se $f : E \to F$ è una funzione da E in F, si può considerare la *ridotta* di f, che si denota con $f_\#$, ed è definita in E, ha $f(E)$ come insieme di arrivo e inoltre, per ogni $x \in E$,

$$f_\#(x) := f(x) \ . \tag{1.4.11}$$

1.5 Funzioni reali

Lo studio delle funzioni reali (aventi cioè $\mathbb{R}$ come insieme di arrivo) è l'obiettivo principale dello studio seguente.

Nella prima parte saranno considerate funzioni reali definite in un intervallo di $\mathbb{R}$ (oppure nell'unione di intervalli di $\mathbb{R}$) mentre nella seconda parte si considereranno funzioni reali definite più in generale in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1.5.1 Operazioni con le funzioni reali

Per le funzioni reali, valgono tutti i concetti introdotti nella sezione precedente. Inoltre, la struttura di $\mathbb{R}$ consente di prendere in considerazione le seguenti operazioni.

1. **Somma.** Siano X ed Y insiemi e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali. Si definisce *funzione somma di* f e g, la funzione $f+g : X\cap Y \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X \cap Y$,

   $$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \ . \tag{1.5.1}$$

   Dalle proprietà della somma dei numeri reali, seguono analoghe proprietà della somma di funzioni reali, come quella associativa e commutativa. La *funzione nulla* è la funzione $0 : X \to \mathbb{R}$ definita ponendo $0(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Più in generale, se $c \in \mathbb{R}$, si continua a denotare con c la funzione costante di costante valore c (per ogni $x \in \mathbb{R}$, $c(x) = c$); con tale convenzione, si può dare un significato alla somma $f + c$.

2. **Funzione opposta.** Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, la sua *opposta*, che si denota con $-f$, è la funzione $-f : X \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X$, $f(x) = -f(x)$.

3. **Prodotto.** Siano X ed Y insiemi e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali. Si definisce *funzione prodotto di* f e g, la funzione $f \cdot g : X \cap Y \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X \cap Y$,
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \,. \tag{1.5.2}$$
Anche in questo caso valgono le proprietà associativa e commutativa. Inoltre, la *funzione unità* è la funzione $1 : X \to \mathbb{R}$ definita ponendo $1(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Con le stesse convenzioni relative alla funzione somma, si può ora considerare il prodotto $c \cdot f$ di un numero reale per una funzione.

4. **Funzione reciproca.** Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale non costantemente nulla e si consideri l'insieme $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. La *funzione reciproca* di f, che si denota con $\frac{1}{f}$ (*non* con f^{-1}), è la funzione $\frac{1}{f} : X_0 \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X_0$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

5. **Funzione quoziente.** Siano X ed Y insiemi e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali, con g non costantemente nulla. Si definisce *funzione quoziente di* f e g, e si denota con $\frac{f}{g}$, la funzione $f \cdot \frac{1}{g}$ (prodotto di f con la reciproca di g). Ovviamente, la funzione quoziente è definita in $\{x \in X \cap Y \mid g(x) \neq 0\}$.

6. **Funzione inversa.** Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Si è già visto che se f è biiettiva, si può considerare la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to X$. Tuttavia, per le funzioni reali, è possibile estendere tale definizione anche al caso in cui f sia solamente iniettiva. Infatti, in tale circostanza, si può considerare la funzione ridotta $f_\#$ di f (vedasi la (1.4.11)) la quale risulta biiettiva e quindi ammette un'inversa $(f_\#)^{-1} : f(X) \to X$. Si estende ora l'insieme di arrivo all'intero $\mathbb{R}$ (per ottenere una funzione reale) considerando la funzione $f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $y \in f(X)$, $f^{-1}(y) = (f_\#)^{-1}$. Tale funzione viene ancora denominata *funzione inversa di* f e, per come è definita, in ogni $y \in f(X)$ assume come valore l'unico elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$. Si osservi che, al pari di f, la funzione f^{-1} risulta essere iniettiva.

   Tale procedimento verrà applicato in particolare per ottenere le funzioni inverse delle funzioni elementari (in qualche caso bisognerà inoltre considerare opportune restrizioni (vedasi la (1.4.10)) in modo da ottenere una funzione iniettiva.

7. **Funzione composta.** Se X ed Y sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali, si è già visto in generale che la funzione composta $g \circ f$ può essere considerata supponendo $f(X) \subset Y$ (vedasi la (1.4.9)).

1.5.2 Estremi di funzioni reali

Tutte le proprietà esposte nella Sezione 1.3 possono essere riferite alle funzioni reali applicandole all'immagine della funzione, che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Pertanto, se X è un insieme[2] ed $f : X \in \mathbb{R}$ è una funzione reale, si ottengono le seguenti definizioni:

- **Funzioni limitate.** Si dice che f è *limitata superiormente* (rispettivamente, *limitata inferiormente*) se $f(X)$ è un sottoinsieme limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente) di $\mathbb{R}$, cioè se

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ \text{ t.c. } \forall\, x \in X : \ f(x) \leq M \quad (\text{rispettivamente, } M \leq f(x)\ ) \tag{1.5.3}$$

  (si è tenuto conto del fatto che per ogni $y \in f(X)$ esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$).

  Ogni elemento $M \in \mathbb{R}$ verificante la (1.5.3) viene ovviamente denominato *maggiorante* (rispettivamente, *minorante*) di f. Infine, si dice che f è *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente.

- **Funzioni dotate di massimo e minimo.** Si dice f è *dotata di massimo* (rispettivamente, *dotata di minimo*) se se tale è il sottoinsieme $f(X)$ di $\mathbb{R}$, e quindi se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1) & \exists x \in X \text{ t.c. } f(x_0) = M\ ; \\ 2) & \forall\, x \in X : \ f(x) \leq M \quad (\text{rispettivamente, } M \leq f(x)\ ). \end{cases} \tag{1.5.4}$$

  L'elemento M verificante la (1.5.4) è unico e viene denominato *massimo* di f (rispettivamente, *minimo* di f) e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\max f\ , \quad \max_{x \in X} f(x)\ , \qquad (\text{rispettivamente, } \min X\ , \quad \min_{x \in X} f(x)\ ).$$

  .

[2] In tutto il seguito, l'insieme di definizione di una funzione verrà implicitamente supposto non vuoto, anche se non precisato esplicitamente.

Spesso a tale elemento M si attribuisce anche la denominazione di *massimo assoluto* (rispettivamente, *minimo assoluto* di f per distinguerlo dai massimi e minimi relativi di cui si tratterà di seguito.

Al contrario, l'elemento $x_0 \in X$ previsto in 1) non è necessariamente unico. Ogni elemento $x_0 \in X$ verificante la condizione 1) precedente viene denominato *punto di massimo* (rispettivamente, *punto di minimo* per f.

Accanto alle definizioni precedenti, conviene a questo punto introdurre la seguente.

Definizione 1.5.1 *Siano $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $x_0 \in X$. Si dice che x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f se esite un numero reale $\delta > 0$ tale che:*[3]

$$\forall\ x \in X \cap I_\delta(x_0) \smallsetminus \{x_0\} :\ f(x) \le f(x_0) \quad (\textit{rispettivamente},\ f(x_0) \le f(x)\ ). \tag{1.5.5}$$

Se la (1.5.5) vale con una diseguaglianza stretta ("<" al posto di "≤"), il punto di massimo (rispettivamente, di minimo) per f viene denominato *proprio.*

Il valore $f(x_0)$ che la funzione assume in un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f, viene denominato *massimo relativo* (rispettivamente, *minimo relativo*) di f.

In Figura 1.6 viene raffigurata geometricamente una funzione che ha il massimo assoluto M assunto nel punto m ed ulteriori punti di massimo relativo p e q, con valori P e rispettivamente Q.

- **Funzioni dotate di estremi.** Si dice f è *dotata di estremo superiore* (rispettivamente, *dotata di estremo inferiore*) se tale è il sottoinsieme $f(X)$ di $\mathbb{R}$, e quindi se esiste un elemento $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1) & \forall\ x \in X :\ f(x) \le \ell \quad (\text{rispettivamente, } \ell \le f(x)\ ); \\ 2) & m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in X :\ f(x) \le m\ \Rightarrow\ \ell \le m \\ & (\text{rispettivamente, } \forall\ x \in X :\ m \le f(x)\ \Rightarrow\ m \le \ell\ ). \end{cases} \tag{1.5.6}$$

L'elemento ℓ verificante la (1.5.6) è unico, viene denominato *estremo superiore* di f (rispettivamente, *estremo inferiore* di f) e viene denotato con uno dei seguenti simboli:

$$\sup f\ ,\quad \sup_{x \in X} f(x)\ ,\qquad (\text{rispettivamente, } \inf X\ ,\quad \inf_{x \in X} f(x)\ ).$$

[3]Si ricorda che $I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (vedasi la (1.1.1) a pag. 6).

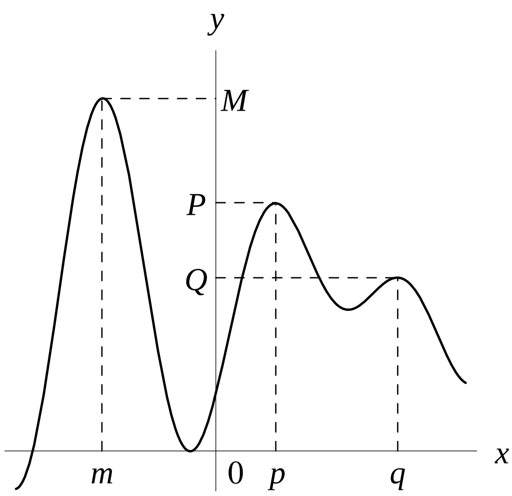

Figura 1.6: *Esempio di massimo assoluto e relativo.*

.

Anche ora naturalmente la seconda proprietà in (1.5.6) si può esprimere in maniera equivalente come segue

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+\ \exists x \in X \text{ t.c. } \ell - \varepsilon < f(x) \quad (\text{rispettivamente, } f(x) < \ell + \varepsilon\ ). \tag{1.5.7}$$

Dalla seconda forma dell'assioma di completezza (Proposizione 1.3.1) segue che ogni funzione limitata superiormente è dotata di estremo superiore ed analogamente ogni funzione limitata inferiormente è dotata di estremo inferiore.

Se f non è limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente), si scriverà per convenzione

$$\sup f = +\infty\ , \qquad \inf f = -\infty\ .$$

1.5.3 Proprietà di monotonia

Le proprietà considerate nella presente sezione sono molto importanti per lo studio qualitativo del grafico di una funzione reale.

Definizione 1.5.2 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è crescente (rispettivamente, strettamente crescente,* *decrescente, strettamente decrescente) se:*

$$\forall\, x, y \in X:\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) \le f(y) \tag{1.5.8}$$

$$(\textit{rispettivamente}, \forall\, x, y \in X:\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)\ , \tag{1.5.9}$$

$$\forall\, x, y \in X:\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) \ge f(y)\ , \tag{1.5.10}$$

$$\forall\, x, y \in X:\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)\ ). \tag{1.5.11}$$

Inoltre, f si dice monotona se verifica una qualsiasi delle condizioni precedenti e viene denominata strettamente monotona se invece verifica la (1.5.9) *oppure la* (1.5.11).

Infine, se A è un sottoinsieme di X, si dice che f è crescente (rispettivamente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente) in A se la restrizione $f_{|A}$ di f al sottoinsieme A verifica tale proprietà.

In Figura 1.7 viene mostrato un esempio di una funzione strettamente crescente in un intervallo I e strettamente decrescente in un intervallo J.

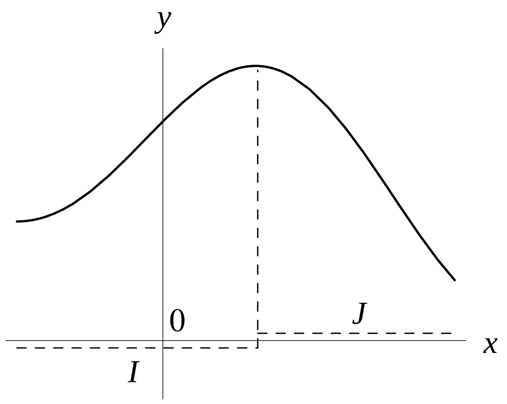

Figura 1.7: *Funzione strettamente crescente (decrescente) in un intervallo.*

Proposizione 1.5.3 *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ risulta strettamente monotona se e solo se è monotona e iniettiva.*

Dimostrazione. Se f è strettamente monotona essa è ovviamente monotona. Inoltre, se $x, y \in X$ e $x \neq y$, si può supporre $x < y$ a meno di uno scambio di notazioni. Se f verifica la (1.5.9) allora $f(x) < f(y)$, mentre se f verifica la (1.5.11) si ha $f(y) < f(x)$; in ogni caso risulta $f(x) \neq f(y)$ e ciò dimostra che f è iniettiva.

Si supponga ora f monotona; se f non fosse strettamente monotona dalle (1.5.9) e (1.5.11) esisterebbero $x, y \in X$ con $x < y$ e $f(x) = f(y)$, il che contraddirebbe l'iniettività di f. $\square$

Anche ora conviene prendere in considerazione una nozione locale di monotonia, che nel seguito per le funzioni derivabili potrà essere messa in relazione con il segno della derivata prima.

Definizione 1.5.4 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale e $x_0 \in X$. Si dice che f è crescente (rispettivamente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente) in x_0 se esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\begin{cases} \forall\, x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: & f(x) \leq f(x_0)\ , \\ \forall\, x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: & f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$$

(rispettivamente,

$$\begin{cases} \forall\, x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: & f(x) < f(x_0)\ , \\ \forall\, x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: & f(x_0) < f(x)\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall\, x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: & f(x) \geq f(x_0)\ , \\ \forall\, x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: & f(x_0) \geq f(x)\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall\, x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: & f(x) > f(x_0)\ , \\ \forall\, x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: & f(x_0) > f(x)\ ). \end{cases}$$

In Figura 1.8, viene mostrato geometricamente un punto a in cui una funzione è strettamente crescente ed un punto b in cui è strettamente decrescente.

Nell'osservazione seguente si considera per brevità una funzione crescente; con ovvie modifiche, analoghe proprietà possono essere stabilite nel caso in cui f sia strettamente crescente, decrescente o strettamente decrescente.

Osservazione 1.5.5 Dalle definizioni adottate, segue subito che:

1. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è crescente, allora f è crescente in x_0 per ogni $x_0 \in X$.*

2. *Se X è un intervallo, allora $f : X \to \mathbb{R}$ è crescente se e solo se f è crescente in ogni $x_0 \in X$.*

   Infatti, tenendo conto della proprietà precedente, bisogna solo dimostrare che se f è crescente in ogni punto $x_0 \in X$, allora f è crescente. Infatti, in tal caso, siano $x, y \in X$ tali che $x < y$. Poiché X è un intervallo, si ha $[x, y] \subset X$ e quindi si può considerare l'insieme $A := \{t \in [x, y] \mid f(x) \leq f(t)\}$. L'insieme A è non

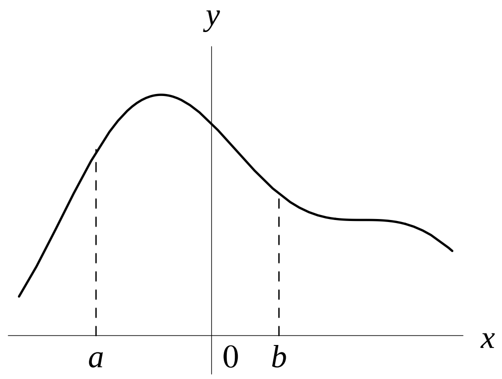

Figura 1.8: *Funzione strettamente crescente (decrescente) in un punto.*

vuoto (infatti $x \in A$) e limitato superiormente (in quanto contenuto in $[x, y]$); dalla seconda forma dell'assioma di completezza, esso è dotato di estremo superiore $x_0 \in [x, y]$. Poiché f è crescente in x_0, esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ verificante le proprietà previste nella Definizione 1.5.4. Dalla seconda proprietà dell'estremo superiore, si può trovare $t \in A$ tale che $x_0 - \delta < t \leq x_0$, da cui segue $f(x) \leq f(t) \leq f(x_0)$; quindi $x_0 \in A$. Inoltre, non può essere $x_0 < y$ altrimenti, considerato $t \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[\cap]x_0, y]$, si avrebbe $f(x_0) \leq f(t)$ e conseguentemente anche $f(x_0) \leq f(t)$; ciò comporterebbe $t \in A$ in contraddizione con il fatto che $x_0 < t$ e che $x_0 = \sup A$. Si è così dimostrato che $y = x_0 \in A$ e quindi, dalla definizione di A, $f(x) \leq f(y)$. Dall'arbitrarietà di $x, y \in X$ tali che $x < y$ segue che f è crescente.

In generale, la parte 1) dell'osservazione precedente non si può invertire nel caso in cui X non sia un intervallo.

Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = -1/x$ è strettamente crescente in ogni punto, ma non è strettamente crescente (le sue restrizioni agli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ sono chiaramente strettamente crescenti ma, ad esempio, si ha $-1 < 1$ e $f(-1) > f(1)$).

La nozione di crescenza o decrescenza in un punto non va confusa con quella di crescenza o decrescenza in un intervallo aperto contenente tale punto. Infatti, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x + 1\,, & x < 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \\ x - 1\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

è strettamente decrescente in 0, mentre è strettamente crescente in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

1.5.4 Proprietà di simmetria e periodicità

Anche le proprietà seguenti sono utili per lo studio qualitativo del grafico di una funzione reale in quanto consentono di limitare lo studio della funzione a quello di una sua opportuna restrizione.

Definizione 1.5.6 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è pari (rispettivamente, dispari) se è verificata la seguente condizione:*

$$\begin{cases} 1) & \forall\, x \in X: \ -x \in X\,, \\ 2) & \forall\, x \in X: \ f(-x) = f(x) \quad (\textit{rispettivamente},\ f(-x) = -f(x)\ ). \end{cases}$$

Le proprietà 1) precedente si esprime anche dicendo che X è simmetrico. Innanzitutto, quindi, è importante verificare tale condizione, senza la quale non ha senso chiedersi se la funzione è pari o dispari.

Diversi esempi di funzioni pari o dispari saranno considerati in seguito quando saranno studiate le funzioni elementari.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, si può studiare una funzione pari o dispari dapprima in $X \cap \mathbb{R}_+$ (oppure in $X \cap \mathbb{R}_-$ e poi si può ricavare il comportamento nella parte rimanente dell'insieme di definizione in base alle proprietà di simmetria.

A questo punto si passa a studiare la proprietà di periodicità, anch'essa utile per ridurre lo studio di una funzione a quello di una sua opportuna restrizione.

Definizione 1.5.7 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, f: $X \to \mathbb{R}$ una funzione reale e $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Si dice che f è periodica di periodo ω (oppure, brevemente, ω-periodica) se è verificata la seguente condizione:*

$$\begin{cases} 1) & \forall\, x \in X: \ x - \omega \in X\,, \quad x + \omega \in X\,, \\ 2) & \forall\, x \in X: \ f(x - \omega) = f(x) = f(x + \omega)\,. \end{cases}$$

La proprietà 1) precedente si esprime anche dicendo che X è ω-periodico.

Gli esempi più importanti di funzioni periodiche saranno le funzioni trigonometriche; si vedrà che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, mentre le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π.

Come segue dalla condizione 2) della Definizione 1.5.7, il grafico di una funzione ω-periodica si ripete ad intervalli di periodo ω. Pertanto, è sufficiente studiare tali funzioni in un intervallo di ampiezza ω.

Se, in più, una funzione è anche pari o dispari, si può scegliere l'insieme simmetrico $[-\omega/2, \omega/2]$ come intervallo di ampiezza ω e quindi ridurre lo studio della funzione al sottoinsieme $X \cap [0, \omega/2]$ (oppure $X \cap [-\omega/2, 0]$) a causa della proprietà di simmetria.

1.6 Successioni

Una funzione $f : \mathbb{N} \to E$ viene denominata *successione di elementi di E*.

Nel caso in cui $E = \mathbb{R}$ si userà la denominazione di *successione reale*.

L'insieme dei valori di una successione viene denominato *insieme degli elementi* della successione.

Pertanto, tutte le definizioni e le proprietà delle funzioni reali possono essere applicate al caso delle successioni di numeri reali, riguardando queste come particolari funzioni aventi $\mathbb{N}$ come insieme di definizione.

Per le successioni, tuttavia, si adopera una terminologia ed una notazione particolare. Così, anzichè utilizzare le notazioni tipiche delle funzioni, per le successioni si preferisce utilizzare la notazione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ evidenziando in tal modo il 'valore' a_n che la successione assume in un generico elemento $n \in \mathbb{N}$.

A titolo di esempio, si passano ora in rassegna alcune delle definizioni viste in generale per le funzioni traducendole nel caso delle successioni.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni reali, la *somma* e il *prodotto* delle due successioni sono definite al modo seguente:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \,, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata superiormente* (rispettivamente, limitata inferiormente) se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M \qquad (\text{rispettivamente, } \forall\, n \in \mathbb{N} :\ M \le a_n\ ).$$

Se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente), l'estremo superiore (rispettivamente, inferiore) ℓ di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} 1) & \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le \ell \quad (\text{rispettivamente, } \ell \le a_n\ ); \\ 2) & m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le m \ \Rightarrow\ \ell \le m \\ & (\text{rispettivamente, } \forall\, n \in \mathbb{N} :\ m \le a_n \ \Rightarrow\ m \le \ell\ ) \end{cases}$$

e viene denotato con il simbolo $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (rispettivamente, $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente), si scriverà $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$ (rispettivamente, $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty$).

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *crescente* se:[4]

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \ .$$

In modo analogo si considerano le definizioni di successione *strettamente crescente*, *decrescente*, e *strettamente decrescente*.

Per le successioni è spesso importante stabilire le *proprietà definitive*, che sono cioè vere da un certo indice n in poi. Così, ad esempio, si dice che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *definitivamente crescente* se:

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu :\ a_n \leq a_{n+1} \ .$$

Analogamente, si dice che gli elementi di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono definitivamente minori o uguali di quelli di una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o, più brevemente, che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente minore o uguale di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, si abbia $a_n \leq b_n$.

In base a quanto sopra, in generale potrebbe non interessare il comportamento di una successione in un numero finito di elementi e addirittura la successione (si continua a denominare tale) potrebbe essere definita solo da un certo numero naturale p in poi, nel qual caso si adopera la notazione $(a_n)_{n\geq p}$.

Si conclude la presente sezione con un esempio molto importante di successione che consente di definire il numero di Nepero.

1.6.1 Numero di Nepero

Si consideri la successione reale definita ponendo, per ogni $n \geq 1$,

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

[4] È facile riconoscere che tale condizione è equivalente alla seguente

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} : n < m \ \Rightarrow\ a_n \leq a_m \ .$$

Infatti, è ovvio che la implichi. Per stabilire il viceversa, si può procedere per induzione completa sul numero naturale $p = m - n$ (vedasi la Proposizione 1.2.1).

Si osservi che $e_1 = 2$ e inoltre, dalla formula del binomio di Newton (Proposizione 1.2.2), si ha, per ogni $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \qquad (1.6.1) \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Pertanto, 2 è il minimo della successione $(e_n)_{n\geq 1}$.

Proposizione 1.6.1 *La successione $(e_n)_{n\geq 1}$ è limitata superiormente.*

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 2$, dalle (1.6.1) segue

$$e_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} ;$$

inoltre, poichè $2^{k-1} \leq k!$ per ogni $k \geq 2$ (tale diseguaglianza si stabilisce facilmente per induzione completa (vedasi la Proposizione 1.2.1), si ottiene

$$e_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{2^h} = 1 + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{2^h} .$$

A questo punto, ricordando che

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \; a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

(anche questa uguaglianza si stabilisce direttamente per induzione completa), si conclude

$$e_n \leq \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

□

In base alla proposizione precedente, si può considerare l'estremo superiore della successione $(e_n)_{n\geq 1}$, il quale viene denominato *numero di Nepero* e denotato con e:

$$e := sup_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \qquad (1.6.2)$$

Dalle osservazioni precedenti si ha $2 < e \leq 3$; un'analisi più precisa permette di riconoscere che $e \sim 2,718281828945\ldots$. Si può dimostrare inoltre, ma non si approfondisce tale aspetto, che e è un numero irrazionale.

Un'ulteriore proprietà importante della successione $(e_n)_{n\geq 1}$, che consentirà di scrivere il numero di Nepero come limite della successione $(e_n)_{n\geq 1}$, viene invece stabilita di seguito.

Proposizione 1.6.2 *La successione $(e_n)_{n\geq 1}$ è strettamente crescente.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per ogni $n \geq 1$, dalle (1.6.1), si ha

$$\begin{aligned} e_n &< 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\ &< 2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = e_{n+1} .\square \end{aligned}$$

1.7 Funzioni elementari

Vengono a questo punto considerate alcune tra le più importanti funzioni reali; esse vengono denominate *funzioni elementari* in quanto le funzioni reali di cui ci si occuperà in seguito si otterranno in generale da esse mediante operazioni algebriche oppure di composizione tra funzioni. Le proprietà e il grafico di tali funzioni si riveleranno molto utili nei capitoli successivi.

1.7.1 Funzioni potenza ad esponente intero positivo

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la *funzione potenza ad esponente intero positivo* n è la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n .$$

Dalle proprietà elementari delle potenze di numeri reali, si ricavano facilmente le seguenti proprietà delle funzioni f_n:

1. $f_n(0) = 0 , \quad f_n(1) = 1 .$

2. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x < y$, allora $f_n(x) < f_n(y)$.

   Tale proprietà può essere dimostrata facilmente utilizzando il principio di induzione completa. Se $n = 1$, la proprietà è ovviamente vera. Si supponga che sia vera per n e siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq x < y$. Dall'ipotesi di induzione si ha $f_n(x) < f_n(y)$, cioè $x^n < y^n$ e da qui si ricava $x^{n+1} = x^n \cdot x < y^n \cdot x < y^n \cdot y = y^{n+1}$, cioè $f_{n+1}(x) < f_{n+1}(y)$. Quindi la proprietà è vera per $n + 1$. Lo schema della presente dimostrazione, fornita a titolo di esempio, si applica anche a diverse proprietà successive.

3. Se $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq 1$, allora $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq 1$.

4. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 1$, allora $1 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}1(x)$.

5. f_n è una funzione pari se n è pari ed è una funzione dispari se n è dispari.

Tenendo presente le proprietà precedenti, si può ora tracciare approssimativamente il grafico delle funzioni potenza con esponente pari e dispari. Tali grafici sono utili anche perché riassumono in modo geometrico le proprietà enunciate sopra.

Nelle Figure 1.9–1.10, il grafico continuo rappresenta la funzione potenza n-esima, mentre quello tratteggiato rappresenta la potenza $(n+2)$-esima. In Figura 1.9 viene illustrato il grafico tipico delle funzioni potenza nel caso n pari, mentre in Figura 1.10 quello nel caso n dispari.

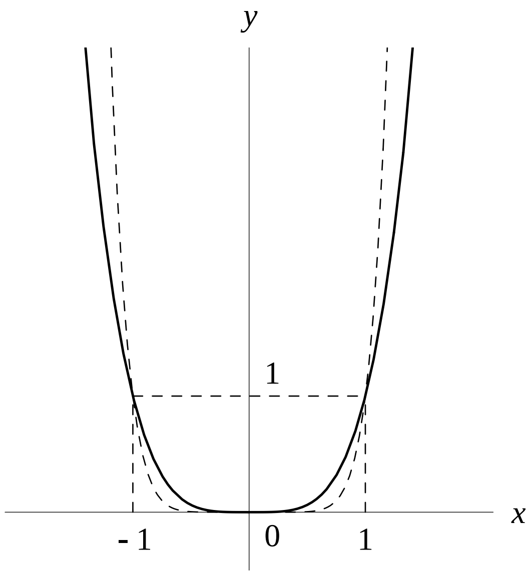

Figura 1.9: *Funzione potenza ad esponente pari (≥ 2).*

1.7.2 Funzioni radice

Innanzitutto si osserva che, come conseguenza dell'assioma di completezza, per ogni $n \geq 2$ e per ogni $b \in \mathbb{R}_+$ esiste uno ed un solo $a \in \mathbb{R}_+$ tale che $a^n = b$ (l'elemento a, infatti, può essere definito come estremo superiore dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n < b\}$). Tale elemento viene denominato *radice* n-esima di b e denotato con uno dei seguenti simboli:

$$\sqrt[n]{b}\,, \qquad b^{1/n}\;;$$

nella notazione $\sqrt[n]{b}$ si può omettere l'indice n nel caso $n = 2$.

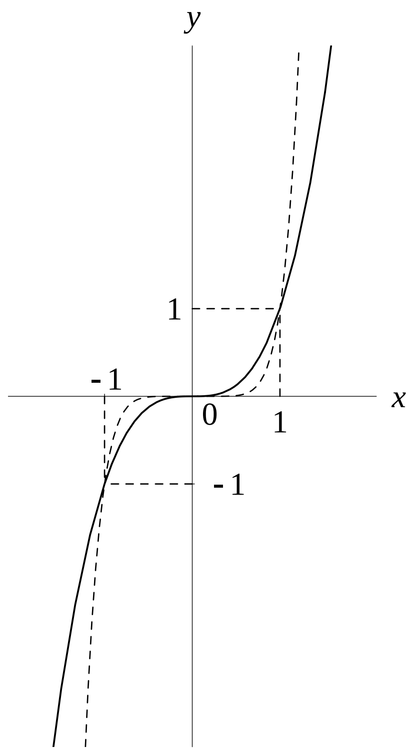

Figura 1.10: *Funzione potenza ad esponente dispari (≥ 3).*

Tale risultato consente ora di definire la funzione radice. Sia $n \geq 2$; se n è pari, la *funzione radice* $f_{1/n} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_{1/n}(x) := \sqrt[n]{x} \,. \tag{1.7.1}$$

Se n è dispari, la funzione radice può essere definita in tutto $\mathbb{R}$ (ciò dipende dal fatto che, se $b \in \mathbb{R}_-$, allora l'elemento $a := -\sqrt[n]{-b}$ è l'unico numero reale (negativo) verificante la condizione $a^n = b$). Quindi, la funzione radice n-esima in questo caso è la funzione $f_{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_{1/n}(x) := \begin{cases} \sqrt[n]{x} \,, & \text{se } x \geq 0 \,; \\ -\sqrt[n]{-x} \,, & \text{se } x < 0 \,. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

Alternativamente, la funzione radice n-esima può essere definita tenendo presente quanto osservato nella Sezione 1.5.1, considerando l'inversa della restrizione di f_n ad $\mathbb{R}_+$ nel caso n pari, e l'inversa di f_n nel caso n dispari. Dalla (1.4.7), infatti, tale inversa assume come valore in x proprio l'unico numero reale y tale che $y^n = x$ e quindi coincide con la funzione sopra definita.

Seguono, a titolo di esempio, alcune delle proprietà delle radici n-esime.

1. $f_{1/n}(0) = 0\ ,\quad f_{1/n}(1) = 1$.
2. Se $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{1/n}(x) \geq 0$.
3. Se $x, y \in \mathbb{R}_+$ e $x < y1$, allora $f_{1/n}(x) < f_{1/n}(y)$.

   Infatti, se fosse $\sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x}$, elevando alla potenza n-esima, dalle proprietà delle potenze seguirebbe $y \leq x$, in contraddizione con le ipotesi.
4. Se $x \in]0, 1[$, allora $f_{1/n}(x) < f_{1/(n+1)}(x)$.
5. Se $x \in]1, +\infty[$, allora $f_{1/(n+1)}(x) < f_{1/n}(x)$.
6. Se n è dispari, la funzione radice n-esima risulta una funzione dispari (mentre se n è pari non ha senso chiedersi se la funzione radice n-esima sia simmetrica in quanto essa è definita in un insieme non simmetrico).

Nelle Figure 1.11–1.12, approssimativamente il grafico delle funzioni radice nei casi n pari ed n dispari; viene usato il tratto continuo per la radice n-esima, e tratteggiato per la radice $(n+2)$-esima.

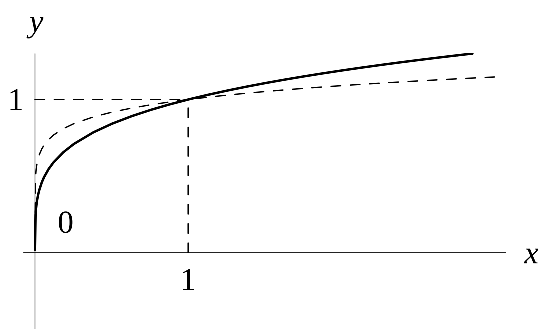

Figura 1.11: *Funzione radice con indice pari.*

1.7.3 Funzione potenza ad esponente intero negativo

Si fissi ora un numero naturale $n \geq 2$ e si consideri la funzione reale $f_{-n} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_{-n}(x) := \frac{1}{x^n}\ . \tag{1.7.3}$$

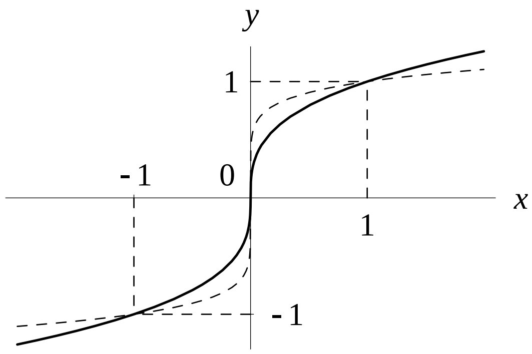

Figura 1.12: *Funzione radice con indice dispari.*

Tale funzione viene denominata *funzione potenza ad esponente intero negativo* n. Dalla definizione adottata, tale funzione non è altro che la funzione reciproca della funzione potenza ad esponente intero positivo n.

Dalla definizione adottata e dalle proprietà già viste delle funzioni potenza ad esponente intero positivo, si possono ricavare altrettante proprietà della funzione f_{-n}, che per brevità vengono omesse.

Si conclude pertanto con le Figure 1.13–1.14, nelle quali viene tracciato approssimativamente il grafico delle funzioni potenza ad esponente intero negativo nei casi n pari ed n dispari; viene usato il tratto continuo per la funzione f_{-n}, e tratteggiato per la funzione $f_{(}-n-2)$.

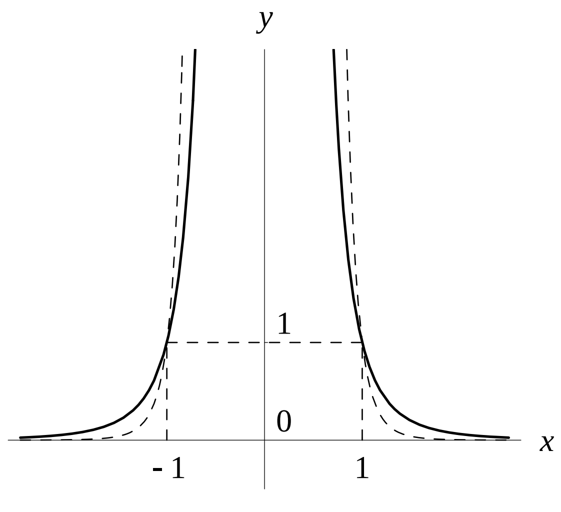

Figura 1.13: *Funzione potenza ad esponente intero negativo pari.*

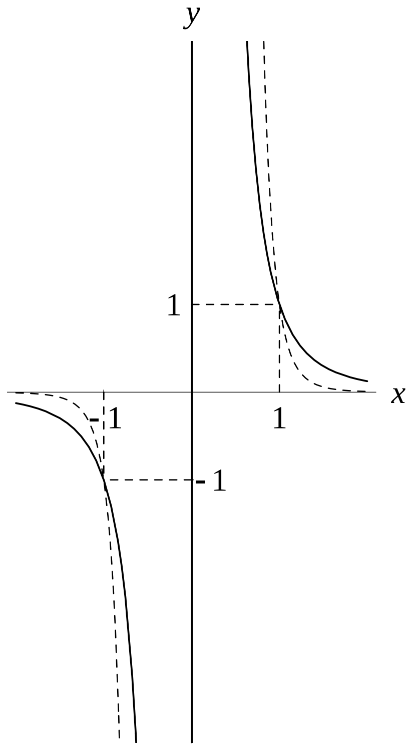

Figura 1.14: *Funzione potenza ad esponente intero negativo dispari.*

1.7.4 Funzioni potenza ad esponente razionale e reale

Si vuole ora studiare il caso delle funzioni potenza in cui l'esponente sia un numero razionale oppure reale.

Nel caso di un esponente razionale $q \in \mathbb{Q}$, si possono considerare $m \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}$ tali che $n \neq 0$ e $q = m/n$. Per ogni numero reale strettamente positivo x, ha senso considerare la *potenza ad esponente razionale* x^q che si definisce ponendo

$$x^q := (x^m)^{1/n} \qquad (= \sqrt[n]{x^m}) \ ;$$

se $q > 0$, tale definizione può essere estesa ad $x = 0$ ponendo $0^q = 0$. Conviene subito osservare che se si considera un'altra rappresentazione del numero razionale q del tipo $q = m'/n'$, si ha $(x^{m'})^{1/n'} = (x^m)^{1/n}$ in quanto $m' \cdot n = m \cdot n'$ e conseguentemente $x^{m' \cdot n} = x^{m \cdot n'}$. Pertanto il numero x^q non dipende dalla particolare rappresentazione del numero razionale q.

Si fissi un numero reale arbitrario r e sia x un numero reale strettamente positivo. Per ogni numero razionale $q < r$ ha senso considerare, per quanto visto sopra, la potenza x^q; allora la potenza ad esponente reale x^r viene definita ponendo

$$x^r := \begin{cases} \inf_{q\in\mathbb{Q},q<r} x^q \,, & \text{se } 0 < x < 1 \,; \\ \sup_{q\in\mathbb{Q},q<r} x^q \,, & \text{se } x \geq 1 \,. \end{cases} \tag{1.7.4}$$

Alternativamente, si potrebbero considerare i numeri razionali $q > r$ e porre

$$x^r := \begin{cases} \sup_{q\in\mathbb{Q},q>r} x^q \,, & \text{se } 0 < x < 1 \,; \\ \inf_{q\in\mathbb{Q},q>r} x^q \,, & \text{se } x \geq 1 \,. \end{cases}$$

Si può dimostrare che le due definizioni sono equivalenti. Se $r > 0$, si pone inoltre $0^r = 0$.

A questo punto, si considera la *funzione potenza ad esponente reale*. Precisamente, se $r > 0$, si considera la funzione $f_r : \mathbb{R}_+ rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_r(x) := x^r \,.$$

Se $r \leq 0$, la funzione potenza ad esponente reale $f_r : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ viene definita allo stesso modo, ma non è definita in 0 e quindi ha come insieme di definizione l'insieme $\mathbb{R}^*_+$.

Se $q \in \mathbb{Q}$, le proprietà della funzione f_q possono essere ricavate tenendo presente contemporaneamente le proprietà delle funzioni ad esponente intero e delle funzioni radice; conseguentemente, dalla (1.7.4), si possono considerare le propriet̀delle funzioni potenza ad esponente reale. Per brevità, ci si limita ad osservare che l'andamento grafico di tali funzioni è quello tipico di una funzione potenza ad esponente intero positivo nel caso $r > 1$, di una funzione radice nel caso $0 < r < 1$ e di una funzione potenza ad esponente intero negativo nel caso $q < 0$.

Nella Figura 1.15, sono riportati i grafici generali delle funzioni potenza ad esponente reale.

1.7.5 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Nel paragrafo precedente si è attribuito un significato alla potenza avente come base un numero reale strettamente positivo e come esponente un numero reale arbitrario. Fissato poi un numero reale arbitrario r, si è studiata la funzione potenza f_r, cioè il comportamento della potenza x^r al variare della base.

Si vuole invece ora studiare la funzione ottenuto fissando la base della potenza ad esponente reale e facendo variare l'esponente. Si deve osservare

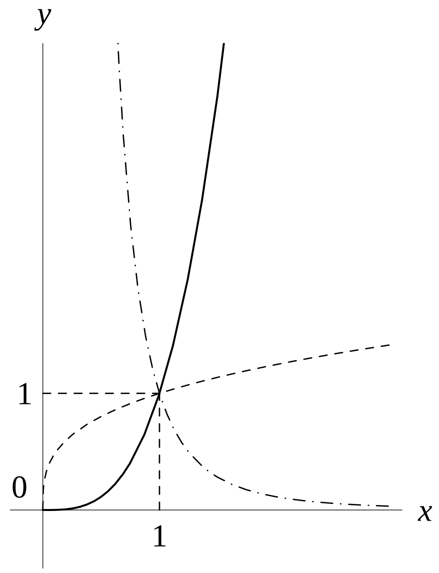

Figura 1.15: *Funzione potenza con esponente razionale o reale.*

che la base deve essere un numero strettamente positivo, mentre l'esponente può essere un numero reale qualsiasi. Sia pertanto $a \in \mathbb{R}_+^*$ e si supponga, per evitare casi banali, $a \neq 1$. Si consideri la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp_a(x) := a^x \ . \tag{1.7.5}$$

Tale funzione prende il nome di *funzione esponenziale* di base a. Le proprietà di tale funzione sono conseguenza delle proprietà delle potenze ad esponente reale. Si osservi che la funzione esponenziale è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed assume valori strettamente positivi. Nel caso particolare in cui a sia il numero e di Nepero (vedasi la (1.6.2)), la funzione esponenziale viene denominata semplicemente *funzione esponenziale* e denotata con il simbolo exp (quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) := e^x$).

Il comportamento della funzione esponenziale dipende dai casi $0 < a < 1$ oppure $a > 1$. Si può osservare tuttavia che in ogni caso $\exp_a(0) = 1$ e $\exp_a(1) = a$; inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x = (1/a)^{-x} = \exp_{1/a}(-x)$; quindi i grafici di $\exp_a$ e $\exp_{1/a}$ risultano simmetrici tra di essi rispetto all'asse delle ordinate; si osservi anche che se $a > 1$ allora $0 < 1/a < 1$ e viceversa. Si può inoltre riconoscere che nel caso in cui $a > 1$, la funzione $\exp_a$ è strettamente crescente, mentre se $0 < a < 1$, la funzione $\exp_a$ è strettamente decrescente.

Riassumendo, l'andamento del grafico delle funzioni esponenziali è del tipo tracciato nelle Figura 1.16. Come si può notare, il comportamento della funzione esponenziale dipende dai casi $0 < a < 1$ oppure $a > 1$; la curva continua rappresenta il grafico di una funzione esponenziale con base $a > 1$, mentre quella tratteggiata il grafico di una funzione esponenziale con base $0 < a < 1$.

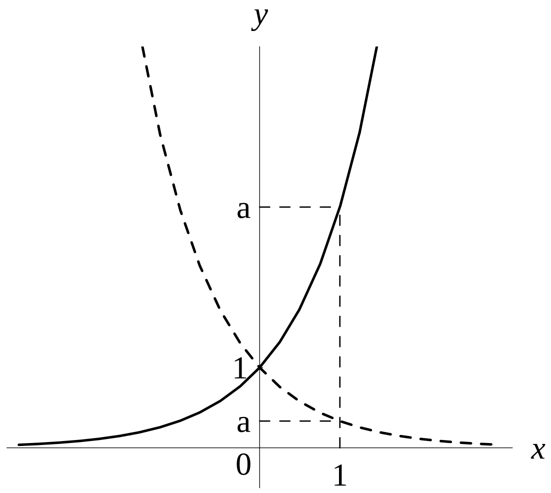

Figura 1.16: *Funzione esponenziale.*

Si osservi che la funzione esponenziale exp_a è strettamente monotona e quindi iniettiva. Pertanto, tenendo presente quanto osservato nella Sezione 1.5.1, si può considerare l'inversa di $\exp_a$, che viene denominata *funzione logaritmo* di base a e denotata con $\log_a$. Tenendo presente che l'immagine di $\exp_a$ è $\mathbb{R}^*_+$, la funzione logaritmo è definita in $\mathbb{R}^*_+$ (ed a valori in $\mathbb{R}$): $\log_a : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$; inoltre, dalla (1.4.7), per ogni $x \in \mathbb{R}^*_+$, $\log_a(x)$ è l'unico numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $\exp_a(y) = x$.

Anche ora, se $a = e$, la funzione logaritmo viene denominata semplicemente *funzione logaritmo* e denotata con il simbolo $\log_a$ (quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}^*_+$, $\log(x) := log_e(x)$).

Le proprietà di tale funzione sono conseguenza delle proprietà generali delle funzioni inverse e dipendono da quelle delle funzioni esponenziali. Ad esempio, si ha

1. $\log_a(1) = 0$, $\quad \log_a(a) = 1$.

2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\log_a(\exp_a(x)) = x$.

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\exp_a(\log_a(x)) = x$.

Altre proprietà derivano da quelle generali dei logaritmi; per comodità, si richiamano di seguito quelle di più frequente utilizzo (la verifica di tali proprietà è diretta usando la definizione di logaritmo e le proprietà delle funzioni esponenziali). Nelle proprietà successive, i numeri a e b che figurano come base dei logaritmi devono chiaramente intendersi strettamente positivi e diversi da 1.

4. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
5. Per ogni $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.
6. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
7. Per ogni $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Anche il comportamento della funzione logaritmo dipende dai casi $0 < a < 1$ oppure $a > 1$ (questa volta i grafici di $\log_a$ e $log_{1/a}$ risultano simmetrici tra di essi rispetto all'asse delle ascisse).

Il grafico delle funzioni logaritmo è del tipo tracciato nella Figura 1.17.

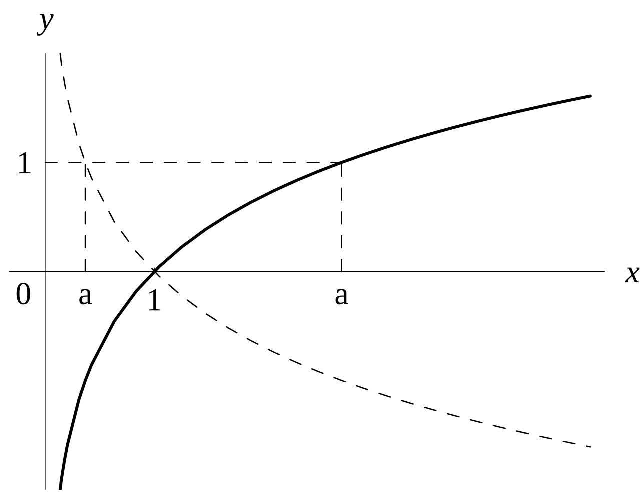

Figura 1.17: *Funzione logaritmo.*

1.7.6 Richiami di trigonometria e funzioni trigonometriche

Si premettono alcuni richiami di trigonometria elementare che non costituiscono una trattazione esauriente, ma sono utili per fissare le notazioni e per evidenziare le relazioni che saranno più frequentemente adoperate. Si richiama innanzitutto il concetto di *circonferenza trigonometrica*, che è da intendersi come una circonferenza nel piano cartesiano avente centro nell'origine degli assi e raggio uguale ad uno; tale circonferenza inoltre viene dotata di un verso positivo che per convenzione è quello antiorario e di un punto iniziale, che per convenzione è il punto A di intersezione di tale circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse (vedasi la Figura 1.18).

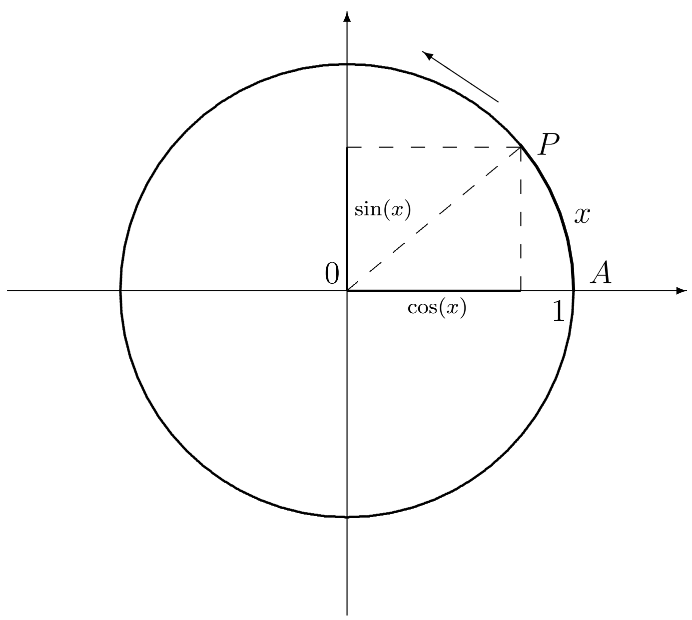

Figura 1.18: *Circonferenza trigonometrica.*

Inoltre, si assume per convenzione di denotare con il numero π la lunghezza della semicirconferenza unitaria (risulta all'incirca $\pi = 3,1415\ldots$; si dimostra, però, che π è un numero irrazionale uguale anche all'area del cerchio unitario). Il fatto di aver fissato un punto iniziale, un verso sulla circonferenza trigonometrica ed un'unità di misura permette di far corrispondere ad ogni numero reale un elemento della circonferenza trigonometrica. Precisamente, assegnato un numero reale x, si può considerare l'arco di circonferenza che ha un estremo nel punto iniziale A, lunghezza uguale al valore assoluto di x e verso antiorario se x è positivo, altrimenti orario. Si può quindi individuare il punto P sulla circonferenza trigonometrica che rappresenta il secondo estremo dell'arco suddetto (se il numero reale assegnato è maggiore di 2π in valore assoluto, la circonferenza trigonometrica viene ripercorsa più volte). Ora, assegnato il numero reale x, si consideri il punto P sulla circonferenza trigonometrica costruito come descritto sopra.

Si definisce seno di x, e lo si denota con $\sin(x)$, l'ordinata del punto P, mentre si definisce *coseno* di x, e lo si denota con $\cos(x)$, l'ascissa del punto P; se non vi è possibilità di equivoci, le parentesi che racchiudono la x vengono omesse e si scrive semplicemente $\sin x$ e $\cos x$. Poiché i numeri reali $\sin x$ e $\cos x$ sono stati definiti per qualsiasi valore di x, si possono ora considerare la *funzione seno* e la *funzione coseno*, che verranno denotate rispettivamente con sin e cos, e fanno corrispondere ad ogni numero reale x, i numeri $\sin x$ e $\cos x$ appena definiti. Dalle definizioni adottate segue subito che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \ , \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \ .$$

In particolare, quindi, le funzioni seno e coseno sono limitate. Inoltre, utilizzando il teorema di Pitagora, si ricava la seguente relazione tra il seno ed il coseno, valida anch'essa per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(il simbolo $\sin^2 x$ è da intendersi come $(\sin x)^2$; la stessa convenzione vale per il coseno e, più in generale, per tutte le funzioni trigonometriche definite di seguito).

Si descrivono ora alcune proprietà del seno e del coseno di un qualsiasi numero reale x la cui dimostrazione è una immediata conseguenza delle definizioni adottate.

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

   Tale proprietà esprime il fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.

2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \ , \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \ , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

4. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + \pi) = -\sin x \ , \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$.

Accanto alla proprietà di periodicità del seno e del coseno conviene tener presente anche che la funzione seno è una funzione dispari mentre la funzione coseno è una funzione pari (infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$). Le proprietà precedenti conseguono tutte dalle seguenti *formule di addizione* del seno e del coseno. La dimostrazione di tali formule per brevità verrà omessa. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

5. $\sin(x + y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y$.

6. $\sin(x - y) = \sin x \, \cos y - \cos x \, \sin y$.

7. $\cos(x + y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$.

8. $\cos(x - y) = \cos x \, \cos y + \sin x \, \sin y$.

Considerando, in particolare, $x = y$ nelle proprietà 5. e 7. precedenti si ottengono le seguenti ulteriori formule, note con il nome di *formule di moltiplicazione*.

9. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin 2x = 2 \sin x \, \cos x$.

10. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Considerando $x/2$ al posto di x nell'ultima uguaglianza, si ottiene $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1$, dalla quale si ottengono le seguenti *formule di bisezione*.

11. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$.

12. Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$.

Infine, addizionando e sottraendo a due a due le 5.–6. e le 7.–8., si ottengono le cosiddette *formule di prostaferesi*, che consentono di esprimere il prodotto di due funzioni seno e/o coseno nella somma di due di tali funzioni.

13. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$.

14. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y$.

15. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$.

16. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$.

Le formule precedenti possono essere scritte in forma diversa ponendo $x = (\alpha + \beta)/2$ e $y = (\alpha - \beta)/2$; se ne lascia per esercizio la trascrizione con tali posizioni.

Si passa ora ad elencare alcuni valori delle funzioni seno e coseno in alcuni archi particolari che si possono dedurre facilmente da proprietà geometriche sulla circonferenza trigonometrica. In base a tali valori ed alle proprietà precedenti, si potrà poi tracciare il grafico delle funzioni seno e coseno con sufficiente precisione.

$$\sin 0 = 0\ , \qquad \cos 0 = 1\ .$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ .$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1\ , \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0\ .$$

Utilizzando le proprietà 1.–4, dagli archi noti precedenti possono esserne ricavati altri come, ad esempio,

$$\frac{3}{4}\pi\ , \quad \frac{5}{6}\pi\ , \quad \pi\ , \quad \frac{7}{6}\pi\ , \quad \frac{5}{4}\pi\ , \quad \frac{4}{3}\pi\ , \quad \frac{3}{2}\pi\ , \quad \frac{5}{3}\pi\ , \quad \frac{7}{4}\pi\ , \quad \frac{11}{6}\pi\ .$$

Usando poi la periodicità delle funzioni seno e coseno si ricavano archi noti non appartenenti a $[0, 2\pi[$.

Il grafico delle funzioni seno e coseno è tracciato approssimativamente nella Figura 1.19.

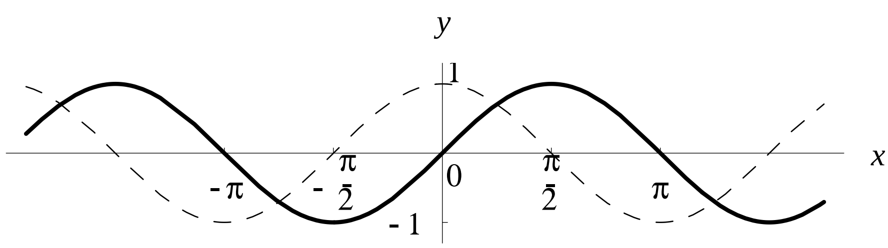

Figura 1.19: *Funzioni seno e coseno.*

A questo punto si possono definire ulteriori funzioni trigonometriche. Si osserva che la funzione coseno si annulla nell'insieme $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ e quindi la funzione quoziente tra le funzioni seno e coseno è definita in $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tale funzione quoziente prende il nome di *funzione tangente* e viene denotata con tan; dunque $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ è definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,. \tag{1.7.6}$$

Utilizzando la similitudine dei triangoli di vertici OBP e OAQ rappresentati in Figura 1.20, si deduce facilmente l'interpretazione geometrica della tangente. Essa è utile in numerose circostanze per ricavare alcune proprietà della funzione tangente.

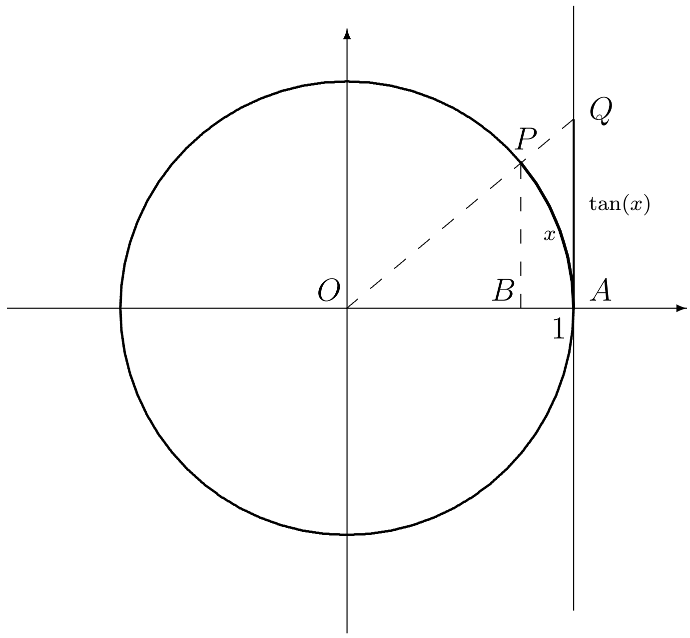

Figura 1.20: *Interpretazione geometrica della tangente.*

Ad esempio, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, si ottiene $\tan(x+\pi) = \tan(x) = \tan(x-\pi)$, e quindi la funzione tangente è periodica di periodo π. Inoltre, $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-senx}{\cos x} = -\tan x$ e quindi la funzione tangente è dispari (si osservi che il suo insieme di definizione è simmetrico). Altre proprietà della funzione tangente possono essere ricavate dalle analoghe proprietà delle funzioni seno e coseno. Nello stesso modo è possibile ricavare i valori della tangente in alcuni archi particolari.

Il grafico della funzione tangente è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.21.

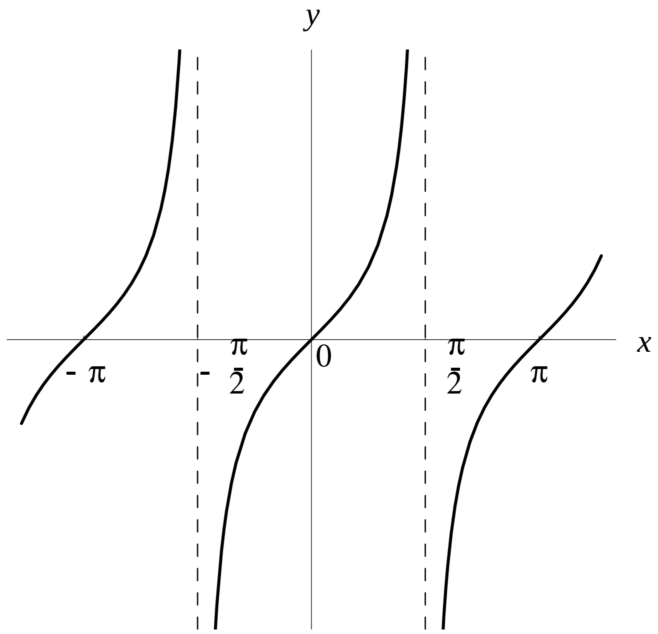

Figura 1.21: *Funzione tangente.*

In modo analogo a quanto visto per la funzione tangente, si può procedere considerando il rapporto tra la funzione coseno e quella seno. Poichè la funzione seno si annulla nell'insieme $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tale rapporto è definito in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si ottiene pertanto la *funzione cotangente* $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \ . \tag{1.7.7}$$

Anche ora, utilizzando la similitudine dei triangoli con vertici OBP e OCQ in Figura 1.22, si deduce facilmente l'interpretazione geometrica della cotangente.

Le proprietà della cotangente si discutono in maniera analoga a quanto svolto per la tangente e dipendono ancora una volta da quelle delle funzioni seno e coseno.

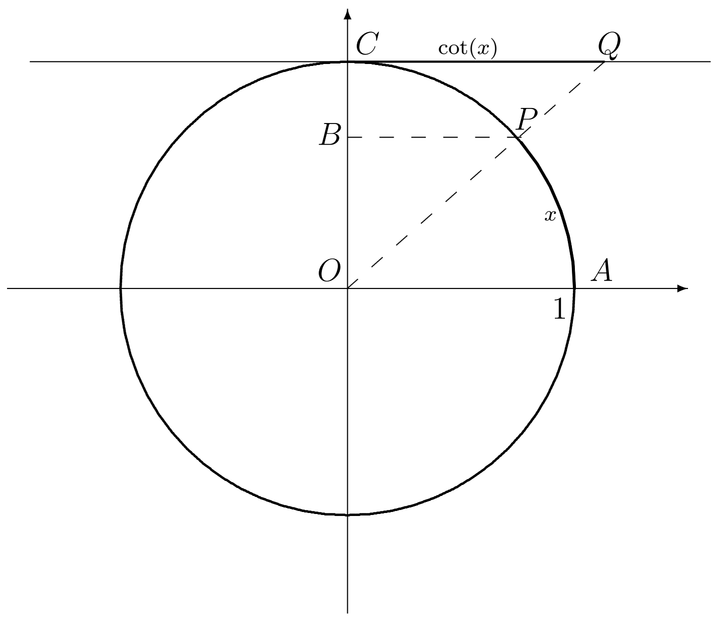

Figura 1.22: *Interpretazione geometrica della cotangente.*

Si richiama solamente l'attenzione sul fatto che la funzione cotangente è anch'essa periodica di periodo π, ma non è simmetrica.

Il grafico della funzione cotangente è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.23.

1.7.7 Funzioni trigonometriche inverse

Si è ora interessati alla possibilità di determinare una funzione inversa per le funzioni trigonometriche studiate nella sottosezione precedente.

Si considera innanzitutto la funzione seno. Al fine di ottenere una funzione iniettiva, si considera la restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$; a questo punto, tenendo presente quanto osservato nella Sezione 1.5.1, si può considerare la funzione inversa di tale restrizione, che viene denominata *funzione arcoseno* e denotata con arcsin. Tenendo presente che l'immagine di sin è $[-1, 1]$, la funzione arcoseno è definita in $[-1, 1]$; inoltre, dalla (1.4.7), $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita ponendo, per ogni $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x = y$ dove y è l'unico elemento dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che $\sin y = x$.

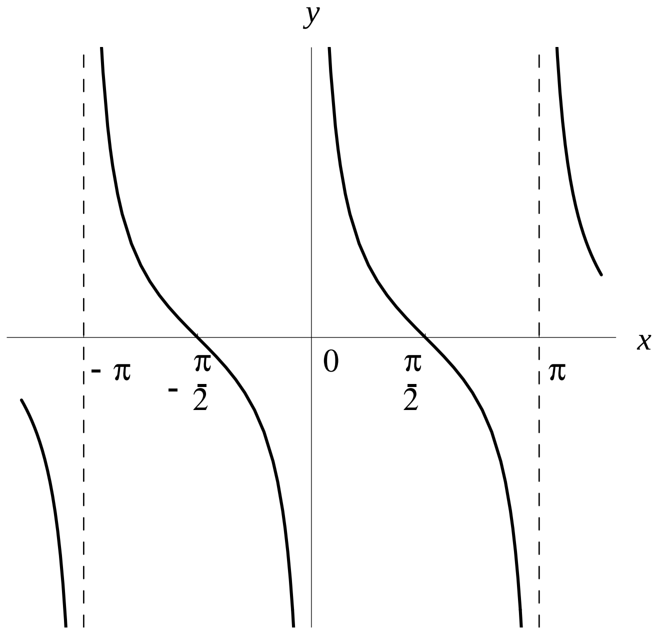

Figura 1.23: *Funzione cotangente.*

Dal calcolo del seno di alcuni archi noti, si può dedurre il valore della funzione arcoseno in altrettanti punti particolari; infatti, ad esempio,

$$\begin{aligned}
\sin 0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \arcsin 0 = 0\ ,\\
\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\ ,\\
\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Rightarrow \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\ ,\\
\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\ ,\\
\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché la funzione seno ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ continua ad essere una funzione dispari, anche la funzione arcoseno è dispari (infatti se $\arcsin x = y$, allora $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\sin y = x$, da cui segue anche $-y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\sin(-y) = -\sin y = -x$; quindi $\arcsin(-x) = -y = -\arcsin x$). Nello stesso modo si può anche riconoscere che la funzione arcoseno è strettamente crescente.

Il grafico della funzione arcoseno è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.24.

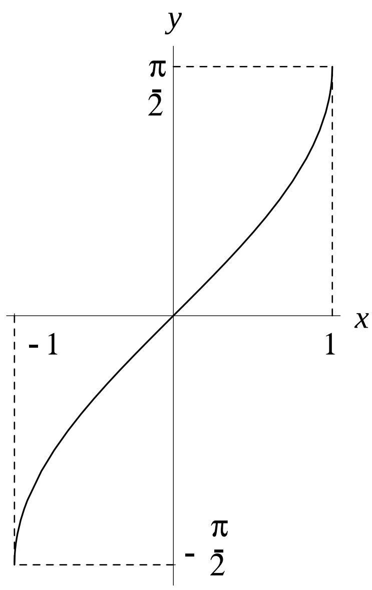

Figura 1.24: *Funzione arcoseno.*

Si procede ora in modo analogo con la funzione coseno. Questa volta si considera la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$, la quale è strettamente decrescente e quindi iniettiva. Con lo stesso procedimento adottato per la funzione arcoseno si può definire la *funzione arcocoseno* $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in [-1, 1]$, $\arccos x = y$ dove y è l'unico elemento dell'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos y = x$.

Si verifica facilmente che la funzione arcocoseno è strettamente decrescente. Inoltre, come per la funzione arcoseno, dal calcolo del coseno di alcuni archi noti, si può dedurre il valore della funzione arcocoseno in alcuni punti particolari, che in questo caso per brevità non vengono elencati.

Il grafico della funzione arcocoseno è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.25.

Anche per la funzione tangente si adopera un procedimento analogo. La restrizione della funzione tangente all'intervallo aperto $]-\pi/2, \pi/2[$ è strettamente crescente ed è quindi iniettiva. Si definisce pertanto la *funzione arcotangente* $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x = y$, dove y è l'unico elemento dell'intervallo $]0, \pi[$ tale che $\tan y = x$.

Come nei casi precedenti, si possono ottenere i valori della funzione arcotangente in alcuni punti particolari: ad esempio, $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \pi/4$

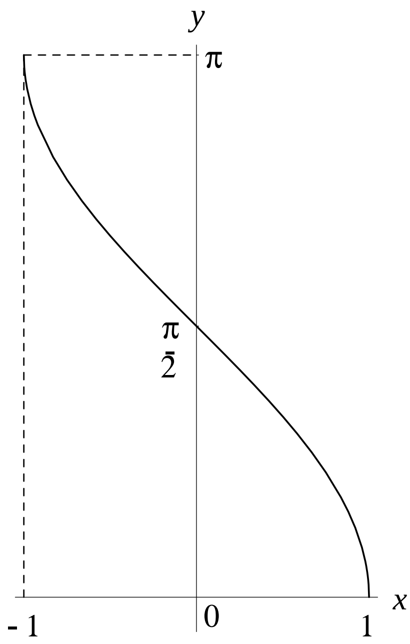

Figura 1.25: *Funzione arcocoseno.*

e $\arctan(-1) = -\pi/4$ (la determinazione di altri valori corrispondenti agli altri archi noti viene lasciata per esercizio). Si può inoltre riconoscere che la funzione arcotangente è dispari e strettamente crescente.

Il grafico della funzione arcotangente è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.26.

Infine, con procedimento esattamente analogo a quello svolto, si considera la restrizione della funzione cotangente all'intervallo aperto $]0, \pi[$, la quale risulta strettamente decrescente e quindi iniettiva. Ciò consente di definire la *funzione arcocotangente* $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arccot} x = y$, dove y è l'unico elemento di $]0, \pi[$ tale che $\cot y = x$. Tra le proprietà di questa funzione si segnala il fatto che essa è strettamente decrescente, e $\operatorname{arccot} 0 = \pi/2$, $\operatorname{arccot} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arccot}(-1) = 3\pi/4$.

Il grafico della funzione arcocotangente è approssimativamente quello tracciato nella Figura 1.27.

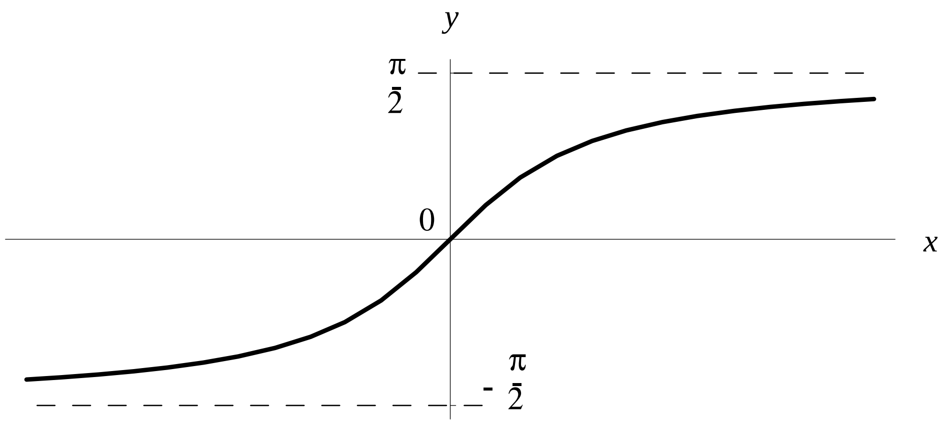

Figura 1.26: *Funzione arcotangente.*

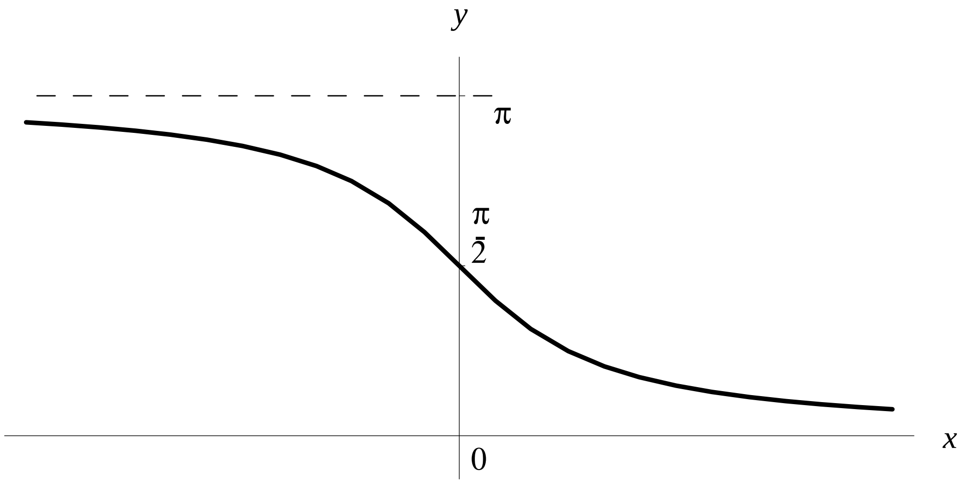

Figura 1.27: *Funzione arcocotangente.*