Capitolo 2

Numeri complessi e polinomi

2.1 Proprietà generali dei numeri complessi

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è possibile risolvere tutte le equazioni algebriche; ad esempio, l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ammette alcuna soluzione reale. L'insieme dei numeri complessi permetterà di risolvere in modo definitivo tale problema nel senso che, in tale insieme, tutte le equazioni algebriche ammetteranno almeno una soluzione. Tuttavia in tale estensione si perdono alcune proprietà importanti di $\mathbb{R}$, come quelle relative alla relazione d'ordine: nell'insieme dei numeri complessi non è possibile definire una relazione d'ordine totale compatibile con le operazioni algebriche.

Partendo proprio dall'equazione $x^2 + 1 = 0$, se si vuole che essa ammetta almeno una soluzione, bisogna ammettere l'esistenza di un elemento il cui quadrato sia -1. Tale elemento, che non può essere un numero reale in quanto i quadrati dei numeri reali sono sempre positivi, verrà denotato con i e verrà denominato *unità immaginaria*. Quindi il 'numero' i è caratterizzato dalla proprietà:

$$i^2 = -1 \; . \tag{2.1.1}$$

Assunta l'esistenza del numero i, anche l'equazione più generale $x^2 + b^2 = 0$ ($b \in \mathbb{R}$) ammetterà le soluzioni $i \cdot b$ e $-i \cdot b$; più in generale, le equazioni di secondo grado della forma $(x - a)^2 + b^2 = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ ammetteranno le soluzioni $a \pm i \cdot b$ (si può riconoscere facilmente che tutte le equazioni di secondo grado con discriminante $\Delta < 0$ si possono scrivere in tale forma). Tuttavia, bisogna tener presente che le operazioni di addizione e moltiplicazione utilizzate nel simbolo $a + i \cdot b$ non sono state compiutamente definite ma presuppongono un'estensione delle proprietà algebriche dei numeri reali. Per rendere più precisa tale estensione, conviene innanzitutto osservare che tali numeri sono caratterizzati dalla coppia (a, b) di numeri reali. In questo modo, è possibile trasferire lo studio di tali operazioni algebriche nell'insieme già noto $\mathbb{R}^2$. In $\mathbb{R}^2$ l'addizione viene definita ponendo, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \ . \tag{2.1.2}$$

Tale addizione verifica le proprietà associativa e commutativa, e inoltre l'elemento neutro 0 è dato dalla coppia (0,0); infine, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'opposto di (a,b), che si denota con $-(a,b)$, è la coppia $(-a,-b)$.

La moltiplicazione di $\mathbb{R}^2$ viene invece definita nel seguente modo, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \tag{2.1.3}$$

Anche per la moltiplicazione è facile riconoscere la validità delle proprietà associativa e commutativa, l'esistenza dell'elemento neutro 1 dato dalla coppia (1,0) e, per ogni $(a,b) \neq (0,0)$, l'esistenza dell'elemento inverso (reciproco di (a,b)) che si denota con $(a,b)^{-1}$ oppure con $\dfrac{1}{(a,b)}$, ed è dato dalla coppia

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

L'insieme $\mathbb{R}^2$, munito dell'addizione e della moltiplicazione definite rispettivamente dalla (2.1.2) e dalla (2.1.3) viene denominato *insieme dei numeri complessi* e denotato con il simbolo $\mathbb{C}$.

Se $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, il numero (reale) a viene denominato *parte reale* di z e denotato con $\mathrm{Re}\, z$, mentre il numero (reale) b viene denominato *parte immaginaria* di z e denotato con il simbolo $\mathrm{Im}\, z$. In questo modo un numero complesso z può essere rappresentato come $z = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$. La coppia $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ viene anche denominata *forma geometrica* di z.

Partendo da una discussione riguardante la possibilità di ottenere delle soluzioni di opportune equazioni algebriche, si è così giunti ad introdurre l'insieme $\mathbb{C}$, i cui elementi sono stati individuati mediante coppie di numeri reali. In tale corrispondenza, l'unità immaginaria i è rappresentata ovviamente dalla coppia (0,1). Inoltre un numero reale a è rappresentato dalla coppia $(a,0)$; in questo senso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere considerato come un sottoinsieme di $\mathbb{C}$, in quanto può essere identificato con il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito da tutti gli elementi di $\mathbb{C}$ aventi parte immaginaria nulla. Tenendo presente tale identificazione, si ottiene, per ogni $(a,b) \in \mathbb{C}$,

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,0) + i \cdot (b,0) = a + i \cdot b \ ;$$

si ottiene così un'espressione diversa del numero complesso z, detta *forma algebrica* di z.

La forma geometrica dei numeri complessi rende possibile la loro rappresentazione come elementi di un piano, sul quale sia stato fissato un sistema di assi cartesiani; in tal caso si preferisce parlare di *piano complesso* anziché di piano cartesiano e di *asse reale* e *asse immaginario* anziché di asse delle ascisse e rispettivamente delle ordinate; tale denominazione è giustificata dal fatto che tutti e soli i numeri reali considerati come numeri complessi aventi parte immaginaria nulla vengono così a trovarsi sull'asse reale, mentre tutti e soli i numeri complessi aventi parte reale nulla vengono a trovarsi sull'asse immaginario (gli elementi dell'asse immaginario vengono anche per questo denominati spesso numeri immaginari puri). L'unità di $\mathbb{C}$ rappresenta l'unità sull'asse reale mentre l'unità immaginaria rappresenta l'unità sull'asse immaginario. Naturalmente, anziché parlare di ascissa ed ordinata di un numero complesso si preferisce utilizzare le definizioni già introdotte di parte reale e di parte immaginaria.

La possibilità di considerare diverse forme di un numero complesso è utile in quanto il grado di difficoltà nello svolgere le varie operazioni in $\mathbb{C}$ dipende spesso dalla forma che si sta adoperando. Inoltre, è chiara la possibilità di passare in modo immediato dalla forma algebrica a quella geometrica e viceversa. Si è già visto, ad esempio, che l'unità immaginaria i si scrive (0,1) in forma geometrica; come ulteriore esempio, si osserva che l'elemento nullo 0 corrisponde alla coppia (0,0) e l'elemento unità 1 alla coppia (1,0). Si riconsiderano ora le operazioni descritte sopra utilizzando la forma algebrica. Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$ elementi di $\mathbb{C}$. Allora

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \ ,$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

e quindi l'addizione e la moltiplicazione in forma algebrica seguono le regole classiche della somma e del prodotto di due binomi. Inoltre, $-z = -a+i(-b)$ e, se $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \ .$$

Conviene tenere presente, inoltre, che calcolando le potenze dell'unità immaginaria i, si ottiene

$$i^0 = 1 \ , \quad i^1 = i \ , \quad i^2 = -1 \ , \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \ , \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \ , \quad \dots \ ;$$

come si vede, le potenze di i si ripetono di quattro in quattro, cioè vale la proprietà $i^{p+4} = i^p$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Due numeri complessi in forma algebrica o geometrica coincidono se e solo se coincidono sia le loro parti reali che le loro parti immaginarie.

Si è visto nelle considerazioni iniziali che le soluzioni delle equazioni di secondo grado a coefficienti reali sono del tipo $a \pm ib$; assegnato, quindi, un numero complesso $z = a + ib$, ha un ruolo sicuramente importante il numero complesso $w = a - ib$, che ha la stessa parte reale di z, ma parte immaginaria opposta; esso viene denominato numero complesso *coniugato* di z e denotato con il simbolo $\overline{z}$.

Infine, come si vede dal calcolo del reciproco di un numero complesso diverso da 0, è anche utile definire, per ogni numero complesso $z = a + ib$, il numero reale $\sqrt{a^2 + b^2}$, il quale prende il nome di *modulo* di z e viene denotato con il simbolo $|z|$ (l'uso dello stesso simbolo che rappresenta il valore assoluto di un numero reale non dà luogo ad equivoci in quanto, se si considera un numero reale $a \in \mathbb{R}$ come numero complesso della forma $z = a + i \cdot 0$, si ha $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$).

Nel piano complesso, il coniugato di un numero complesso z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale mentre il modulo rappresenta la distanza di z dall'origine.

Seguono ora alcune proprietà del coniugato e del modulo di un numero complesso.

Proposizione 2.1.1 *Per ogni $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $w = c + id \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà:*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\ , \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\ .$
2. $\overline{\overline{z}} = z\ .$
3. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z\ , \quad z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\, z\ .$
4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2\ .$
5. $|-z| = |z|\ .$
6. $|\overline{z}| = |z|\ .$
7. $\mathrm{Re}\, z \le |z|\ , \quad \mathrm{Im}\, z \le |z|\ .$
8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|\ .$
9. *Se $z \neq 0$, allora* $|z^{-1}| = |z|^{-1}\ .$
10. $|z + w| \le |z| + |w||;.$
11. $||z| - |w|| \le |z - w|\ .$

Le proprietà precedenti possono tutte essere verificate direttamente usando le definizioni adottate.

È opportuno osservare che non si può considerare in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale (in cui cioè due qualsiasi elemento siano confrontabili) compatibile con le operazioni algebriche. Infatti, se una tale relazione d'ordine $\leq$ esistesse, si avrebbe $z > 0$ oppure $z < 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$ e quindi, dalla compatibilità con le operazioni algebriche, $z^2 > 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$; in particolare $-1 = i^2 > 0$, da cui una contraddizione.

Si considerano ora altre forme in cui possono essere espressi i numeri complessi; è necessario, per questo, un sistema diverso di coordinate nel piano cartesiano.

2.2 Coordinate polari

Si è visto in precedenza che gli elementi di un piano rappresentano geometricamente gli elementi di $\mathbb{R}^2$; ora se ne studia una diversa rappresentazione, utile soprattutto in questa fase per poter esprimere i numeri complessi in una forma alternativa.

Sia assegnato un piano π e si fissi su di esso un riferimento cartesiano ortonormale; quindi ogni elemento $P \in \pi$ può essere univocamente individuato mediante una coppia (x, y). Si osservi ora che se il punto P non coincide con l'origine, esso può essere individuato in modo alternativo assegnando la sua distanza ρ dall'origine e l'arco di circonferenza unitaria θ compreso tra il semiasse positivo dell'asse reale e la semiretta uscente dall'origine e passante per P. Gli elementi ρ e θ così definiti vengono denominati *coordinate polari* del punto P. Il numero ρ viene denominato *modulo* (oppure *raggio vettore*) di P, mentre il numero θ viene denominato *argomento* (oppure *anomalia*) di P. Bisogna osservare che l'argomento non è individuato univocamente; infatti se θ è un argomento di P, ogni altro numero del tipo $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, è ancora un argomento di P. Tuttavia, esiste sicuramente uno ed un solo argomento θ di P che verifica le condizioni $-\pi < \theta \leq \pi$; tale argomento viene denominato *argomento principale* di P. Per quanto riguarda l'origine, essa è individuata univocamente dalla condizione $\rho = 0$; per convenzione, all'origine si può attribuire un argomento arbitrario. Se si conoscono le coordinate cartesiane (x, y) di un punto P diverso dall'origine, il modulo ρ di P si ottiene dalla formula

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \tag{2.2.1}$$

mentre un argomento θ di P può essere individuato dalle condizioni

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}\ , \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}\ ; \tag{2.2.2}$$

in particolare, se $x = 0$, l'argomento principale è

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 \, , & \text{se } y > 0 \, , \\ -\pi/2 \, , & \text{se } y < 0 \, ; \end{cases}$$

se invece $x \neq 0$, l'argomento principale è

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} \, , & \text{se } x > 0 \, , \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} \, , & \text{se } x < 0, \; y \geq 0 \, , \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} \, , & \text{se } x < 0, \; y < 0 \, . \end{cases}$$

Viceversa, se sono note le coordinate polari (ρ, θ) di P, si possono ricavare facilmente le coordinate cartesiane di P ponendo

$$\begin{cases} x = \rho \; \cos\theta \, , \\ y = \rho \; \sin\theta \, , \end{cases} \tag{2.2.3}$$

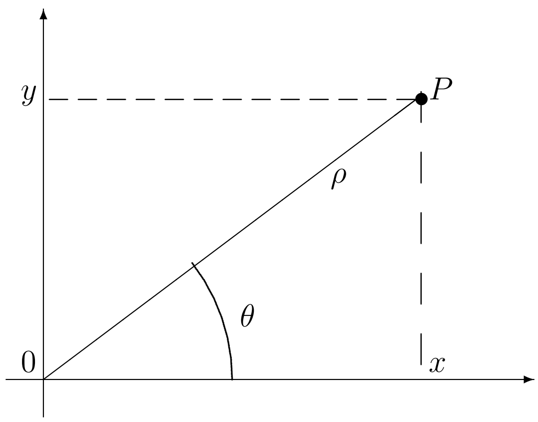

Figura 2.1: *Coordinate polari.*

2.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi

La forma trigonometrica di un numero complesso z si ottiene semplicemente considerando le coordinate polari del punto P del piano complesso corrispondente a z.

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$; essendo (a, b) la forma geometrica di z, le coordinate polari si possono ottenere dalle (2.2.1)–(2.2.2) ponendo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e considerando θ soddisfacente le relazioni $\cos\theta = x/\rho$ e $\sin\theta = y/\rho$; tenendo presenti le (2.2.3), il numero z si potrà quindi scrivere nella forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta)\ , \tag{2.3.1}$$

che viene appunto denominata *forma trigonometrica* di z. Ad esempio, $1 = \cos 0 + i \sin 0$, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$, $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.

Dalle considerazioni svolte riguardanti le coordinate polari, si ricava che la forma trigonometrica di z non è univocamente determinata; gli argomenti di z sono del tipo $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; in particolare, il numero 0 ha modulo 0 e argomento arbitrario. Tuttavia, l'argomento di un numero complesso diverso da 0 risulta univocamente determinato se si considera quello principale compreso nell'intervallo $]-\pi, \pi]$. Come conseguenza di ciò, si ottiene il seguente principio di uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica.

Proposizione 2.3.1 *Siano $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ due numeri complessi in forma trigonometrica diversi da 0. Si ha $z = w$ se e solo se $\rho = \sigma$ ed esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta = \varphi + 2k\pi$.*

Inoltre, se θ è l'argomento principale di z e φ è l'argomento principale di w, si ha $z = w$ se e solo se $\rho = \sigma$ e $\theta = \varphi$.

Si studiano a questo punto le varie operazioni algebriche in forma trigonometrica. Le operazioni di somma e differenza di due numeri complessi non sono immediate in forma trigonometrica e per tali operazioni conviene utilizzare soprattutto la forma algebrica o geometrica. Al contrario, si fa vedere ora che le operazioni di prodotto, reciproco, quoziente, potenza e radice si possono eseguire in modo molto semplice utilizzando proprio la forma trigonometrica.

Siano, infatti, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ due numeri complessi. Poiché la forma algebrica di z e w è data da $z = (\rho\cos\theta) + i(\rho\sin\theta)$, $w = (\sigma\cos\varphi) + i(\sigma\sin\varphi)$ il prodotto $z \cdot w$ è dato da

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho \cdot \sigma((\cos\theta\ \cos\varphi - \sin\theta\ \sin\varphi) + i(\cos\theta\ \sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)) \\ &= \rho \cdot \sigma(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))\ . \end{aligned}$$

Quindi si conclude che il prodotto in forma trigonometrica di due numeri complessi z e w ha come modulo il prodotto dei moduli di z e di w e come argomento la somma degli argomenti di z e di w:

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))\ . \tag{2.3.2}$$

Tuttavia, in generale, conviene tener presente che se θ e φ sono gli argomenti principali di z e rispettivamente di w, non è detto che $\theta + \varphi$ sia l'argomento principale di $z \cdot w$; per ottenerlo, potrebbe infatti essere necessario aggiungere o sottrarre 2π.

Sia ora $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ un numero complesso diverso da 0; si verifica facilmente che il reciproco di z è dato da

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \tag{2.3.3}$$

Pertanto, il reciproco di un numero complesso diverso da 0 ha come modulo il reciproco del modulo di z e come argomento quello opposto all'argomento di z.

Da tale regola, si ricava anche la regola sul quoziente di due numeri complessi. Infatti, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $w \neq 0$, allora, dalle (2.3.2) e (2.3.3),

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{\rho}{\sigma}(\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)) \ . \tag{2.3.4}$$

Si conclude che il quoziente di z e w ha come modulo il quoziente dei moduli di z e di w e come argomento la differenza degli argomenti di z e di w

Come conseguenza della regola sul prodotto, si ottiene facilmente anche il calcolo delle potenze di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ponendo $w = z$ nella (2.3.2) si ha infatti $z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$ e più in generale, procedendo per induzione, per ogni $n \geq 1$,

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \ . \tag{2.3.5}$$

La formula (2.3.5) precedente viene denominata *formula di De Moivre*.

Viene considerato infine, il calcolo delle radici n-esime ($n \geq 2$) di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Una radice di z è definita come un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ che verifica la proprietà $w^n = z$. Si riconosce in modo immediato che l'unica radice di 0 è il numero 0. Si supponga quindi che $z \neq 0$. Se si pone $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dalla (2.3.5) si ricava $w^n = \sigma^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, e quindi, imponendo l'uguaglianza $w^n = z$, dal principio di uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica (Proposizione 2.3.1) segue:

$$\rho = \sigma^n \ , \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z};$$

quindi $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ e $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k \in \mathbb{Z}$; si osserva a questo punto che, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, gli argomenti $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ non danno tutti luogo a numeri complessi distinti, in quanto, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi \ ;$$

quindi si possono considerare solo n argomenti distinti corrispondenti ai valori $k = 0, \ldots, n-1$ e tali argomenti forniscono tutte le possibili radici n-esime di z, che sono date quindi da:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\theta + 2k\pi n) \ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \quad (2.3.6)$$

Quindi ogni numero complesso z diverso da 0 ammette esattamente n radici distinte. Dalla formula precedente, si ricava che le radici n-esime di z si trovano tutte su una stessa circonferenza con centro nell'origine e raggio uguale alla radice n-esima del modulo di z e formano i vertici di un poligono regolare con n lati (geometricamente, quindi, è sufficiente individuare uno dei vertici che ha argomento uguale alla n-esima parte dell'argomento di z).

Nella Figura 2.2 si rappresenta un esempio di radici terze e quinte di un numero complesso z.

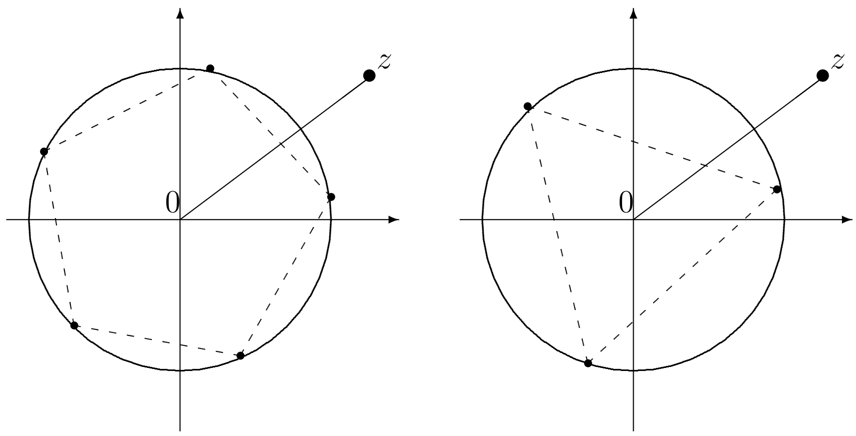

Figura 2.2: *Radici terze e quinte di un numero complesso.*

Dalla 2.3.6 è facile constatare che le radici quadrate di un numero complesso sono l'una l'opposta dell'altra (in quanto i loro argomenti differiscono di π); in particolare, le due radici complesse di un numero reale positivo sono una reale positiva (che coincide con la radice quadrata aritmetica) e l'altra reale negativa (l'opposta della prima); se, invece, si considera un numero reale strettamente negativo, le due radici complesse saranno immaginarie pure l'una l'opposta dell'altra). Per quanto riguarda le radici terze complesse di un numero reale, si può osservare che esse sono una reale (coincidente con la radice terza aritmetica) e due tra loro complesse coniugate.

2.4 Forma esponenziale dei numeri complessi

Se $z = x + iy$ è un numero complesso, si pone innanzitutto

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \; ; \tag{2.4.1}$$

si osservi che $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi le funzioni a secondo membro sono quelle già note nel caso reale. In particolare, se $\theta \in \mathbb{R}$, si ha

$$e^{i\,q} = \cos\theta + i \sin\theta \; ; \tag{2.4.2}$$

conseguentemente, se si conosce la forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ di un numero complesso z si può scrivere

$$z = \rho e^{i\,\theta} \; . \tag{2.4.3}$$

La (2.4.3) viene denominata forma esponenziale di z. Dalla forma esponenziale è anche immediato passare alla forma trigonometrica e viceversa utilizzando la (2.4.2). Inoltre, dalle (2.4.1) e (2.4.2) si ottengono facilmente le seguenti proprietà di e^z, che valgono per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$;
2. $e^z \neq 0$;
3. $|e^{i\,\theta}| = 1$;
4. $e^{z+2k\pi i} = e^z$;
5. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$;
6. $e^z = e^{\mathrm{Re}\, z}(\cos(\mathrm{Im}\, z) + i \sin(\mathrm{Im}\, z))$.

Dalla (2.4.2) si ottiene anche, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\,\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$ e tale formula, unita alla (2.4.2) permette di ricavare le cosiddette *formule di Eulero*:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2i} \; , \quad \cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2i} \; . \tag{2.4.4}$$

2.5 Polinomi ed equazioni algebriche

2.5.1 Polinomi e relative radici

Le funzioni elementari che si possono considerare più semplici dal punto di vista del calcolo esplicito sono sicuramente le funzioni potenza ad esponente intero positivo. In questa sezione vengono considerate combinazioni lineari di tali funzioni. Esse verranno definite in tutto l'insieme dei numeri complessi, per studiarne alcune proprietà generali; si eviterà di enunciare o approfondire proprietà che, sebbene di interesse generale, non verranno utilizzate esplicitamente nel seguito.

Definizione 2.5.1 *Sia $n \in \mathbb{N}$. Si dice polinomio di grado n ogni funzione $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ per cui esistono $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n =\neq 0$ tali che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \ . \tag{2.5.1}$$

Il *grado* di un polinomio è, quindi, il più grande dei numeri naturali k per cui il coefficiente della potenza z^k è diverso da 0. Il grado di un polinomio P viene indicato spesso con il simbolo $\deg(P)$.

Il coefficiente a_0 del termine di grado 0 di un polinomio viene spesso denominato *termine noto* del polinomio.

Si denomina *zero* (oppure *radice*, oppure *soluzione*) del polinomio P ogni numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$. Nel seguito avranno particolare interesse i polinomi per cui i coefficienti $a_0, \dots, a_n$ sono numeri reali. Essi verranno denominati *polinomi a coefficienti reali.*

Conviene osservare che se P è un polinomio a coefficienti reali allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ è anch'esso un numero reale; in tale circostanza, quindi, il polinomio P può essere anche riguardato come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sarà chiaro dal contesto, nel seguito, se tali polinomi vengono considerati definiti in $\mathbb{R}$ (come funzioni reali) oppure in $\mathbb{C}$.

Si considera ora qualche esempio. In base alla definizione adottata, un polinomio di grado 0 è una funzione costante $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di costante valore un numero $a_0 \in \mathbb{C}^*$. Un polinomio di grado 0 ovviamente non ammette alcuna radice. Invece, la funzione costante di costante valore 0 viene denominata *polinomio nullo*; per definizione di grado di un polinomio, il grado del polinomio nullo non può essere zero: si assume, per convenzione, che il grado del polinomio nullo sia -1. In effetti, il polinomio nullo è l'unico ad avere infinite radici, come afferma il seguente risultato. Quindi se un polinomio P ammette infinite radici, allora P è il polinomio nullo. Da tale affermazione segue il *principio di identità* di due polinomi, che è utile in molte circostanze.

Proposizione 2.5.2 (Principio di identità dei polinomi) *Siano P e Q due polinomi. Se P e Q coincidono in infiniti punti, allora $P = Q$.*

Dimostrazione. Infatti, il polinomio $P - Q$ ammette infinite radici e quindi $P - Q = 0$. □

In effetti, se n é il grado massimo dei due polinomi, é sufficiente che i due polinomi coincidano in $n+1$ punti per essere uguali (infatti, in tal caso la differenza dei due polinomi avrebbe un numero di zeri superiore al proprio grado e ciò, come si vedrà in seguito, può valere solamente per il polinomio nullo).

Dalla Proposizione 2.5.2 precedente segue anche che i coefficienti di un polinomio sono univocamente determinati nel senso che se, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$ e $P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ con $b_m \neq 0$, allora $n = m$ e, per ogni $k = 0, \ldots, n$, $a_k = b_k$.

Riprendendo gli esempi, un polinomio di grado 1 è una funzione $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ del tipo $P(z) = a_0 + a_1 z$ $(z \in \mathbb{C})$, con $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_1 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$. Un polinomio di grado 1 ammette sempre un'unica radice data da $c = -a_0/a_1$. Nel caso in cui le costanti a_0 e a_1 siano reali, esse vengono indicate solitamente con n e rispettivamente m; nel piano cartesiano l'equazione $y = mx + n$ $(x \in \mathbb{R})$ fornisce l'equazione della retta di coefficiente angolare m ed ordinata all'origine n. Ad esempio, il polinomio $P(z) = iz + 3i - 3$ è un polinomio di grado 1; la sua unica radice è data da $c = -3 - 3i$.

Un polinomio di grado 2 è del tipo $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, con $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_1 \in \mathbb{C}$, $a_2 \in \mathbb{C}$, $a_2 \neq 0$. I coefficienti a_0, a_1 e a_2 vengono indicati di solito con c, b e rispettivamente a. Nel caso in cui tali coefficienti siano reali, l'equazione di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola nel piano cartesiano. Per determinare gli zeri di un polinomio $P(z) = az^2 + bz + c$ di grado 2 è importante il seguente numero $\Delta = b^2 - 4ac (\in \mathbb{C})$, denominato *discriminante* (o brevemente *delta*) del polinomio $P(z) = az^2 + bz + c$. Infatti, l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ si può scrivere

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \; .$$

Dall'equazione precedente segue che, denotate con w_1 e w_2 le radici (complesse) del numero complesso Δ, gli zeri del polinomio P sono forniti da

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} \; , \qquad z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

e il polinomio si può scrivere come $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$. I numeri complessi w_1 e w_2, in quanto radici del numero complesso Δ, devono essere l'uno opposto dell'altro. Quindi, le radici z_1 e z_2 possono essere espresse scrivendo

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,,$$

dove Δ denota una qualsiasi delle due radici complesse di Δ. Da ciò segue che i numeri complessi z_1 e z_2 sono caratterizzati dalle condizioni seguenti

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}\,, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{b}{a}\,.$$

Le radici z_1 e z_2 coincidono solo nel caso in $\Delta = 0$; se ciò accade, l'unica radice è data da $z_0 = -b/2a$ e si può scrivere $P(z) = a(z - z_0)^2$ (si dice in questo caso che z_0 è una radice di molteplicità 2.

Se il polinomio di secondo grado è a coefficienti reali, cioè se $a, b, c \in \mathbb{R}$, anche Δ è un numero reale. Nel caso in cui $\Delta > 0$, si ha $w_1 = \sqrt{\Delta}$ e $w_2 = -\sqrt{\Delta}$ e quindi il polinomio P ammette le due radici reali distinte

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,,$$

e si può scrivere come $P(z) = a(z - x_1)(z - x_2)$.

Se $\Delta = 0$, P ammette un'unica radice reale data da $x_0 = -b/(2a)$ e si ha $P(z) = a(z - x_0)^2$.

Infine, se $\Delta < 0$, le radici complesse di Δ sono $w_1 = -i\sqrt{-Delta}$ e $w_2 = i\sqrt{-\Delta}$; quindi il polinomio P ammette due radici complesse coniugate date da

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,.$$

Per i polinomi di grado 3 oppure 4 esistono delle formule esplicite per la determinazione degli zeri. Invece, per i polinomi di grado superiore a 4, si dimostra che non è possibile stabilire un procedimento generale che consenta di ottenerne gli zeri.

Si considera ora la divisione di due polinomi. Si ha innanzitutto il seguente risultato di cui si omette per brevità la dimostrazione.

Proposizione 2.5.3 *Siano P_1 un polinomio di grado n e P_2 un polinomio non nullo di grado m. Allora esistono, e sono unici, due polinomi Q ed R tali che*

$$P_1 = Q \cdot P_2 + R\,, \qquad \deg(R) < m\,.$$

Inoltre, se $m \leq n$ si ha $\deg(Q) = n - m$, mentre se $m > n$ si ha $Q = 0$ e $R = P_1$.

I polinomi Q ed R previsti nella proposizione precedente vengono denominati rispettivamente *polinomio quoziente* e *polinomio resto* di P_1 e P_2.

Si osservi che se P_1 e P_2 sono polinomi a coefficienti reali, anche il quoziente ed il resto lo sono. Un caso particolarmente rilevante si ottiene quando il resto della divisione tra due polinomi è il polinomio nullo.

Definizione 2.5.4 *Siano P_1 e P_2 polinomi con P_2 non nullo. Si dice che P_1 è divisibile per P_2 (oppure che P_2 divide P_1) se il polinomio resto della divisione di P_1 e P_2 è il polinomio nullo e quindi se esiste un polinomio Q tale che $P_1 = Q \cdot P_2$.*

Un caso particolarmente interessante è quello in cui il polinomio P_2 è del tipo $P_2(z) = z - z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$. La divisione di un polinomio P con P_2 deve avere come resto un polinomio di grado minore di 1, cioè deve essere $R(z) = a$, con $a \in \mathbb{C}$. Inoltre, dalla relazione $P(z) = Q(z) \cdot P_2(z) + R(z) = (z - z_0) \cdot Q(z) + a$ si ricava $P(z_0) = a$ e quindi $R(z) = P(z_0)$. Dunque, il resto della divisione di un polinomio P per il polinomio $z - z_0$ è un polinomio costante di costante valore $P(z_0)$. Da ciò segue immediatamente la caratterizzazione della divisibilità per $z - z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$

Proposizione 2.5.5 *Sia P un polinomio e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) Il polinomio P è divisibile per $z - z_0$.

b) z_0 è una radice di P.

Quindi, se un polinomio P di grado $n \geq 1$ ammette una radice $z_0 \in \mathbb{C}$, esso si decompone nel prodotto

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)|; , \tag{2.5.2}$$

con Q polinomio di grado $n - 1$ in quanto il coefficiente di z^{n-1} di Q deve coincidere con il coefficiente di z^n di P.

Uno dei più importanti risultati riguardanti i polinomi e le equazioni algebriche è il fatto che i polinomi aventi grado maggiore o uguale di 1 ammettono sempre almeno una radice. Per brevità, ci si limita ad enunciare solamente tale risultato, studiandone poi qualche conseguenza.

Teorema 2.5.6 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Se P è un polinomio di grado $n \geq 1$, allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.*

Dalla (2.5.2) si ottiene la seguente conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra.

Corollario 2.5.7 *Se* $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ *è un polinomio di grado* $n \geq 1$*, allora esistono esattamente* n *elementi* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdots (z - z_n) \, . \tag{2.5.3}$$

Dimostrazione. Si procede per induzione completa sul numero naturale $n \geq 1$. Se $n = 1$, si ha $P(z) = a_0 + a_1 z$ e la tesi si verifica direttamente. Si supponga che la tesi sia vera per $n \in \mathbb{N}$ e che il grado di P sia $n + 1$, cioè $P(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_{n+1} \neq 0$. Dal Teorema 2.5.6, esiste $z_{n+1} \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_{n+1}) = 0$ e quindi, dalla (2.5.2), $P(z) = (z - z_{n+1})Q(z)$, con Q polinomio di grado n; inoltre, il coefficiente di z^n del polinomio Q è $a_{n+1} \neq 0$. Per l'ipotesi di induzione, esistono $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che $Q(z) = a_{n+1} \cdot (z - z_1 \cdots (z - z_n)$ e quindi $P(z) = a_{n+1} \cdot (z - z_1) \cdots (z - z_n) \cdot (z - z_{n+1})$; la tesi è quindi vera per il numero naturale $n + 1$. Dal principio di induzione completa segue la tesi per ogni $n \geq 1$. □

Ognuno dei numeri $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ verificanti la (2.5.3) è una radice di P; tuttavia, tali radici non sono necessariamente tutte distinte. Per tener conto di ciò, conviene dare la seguente definizione.

Definizione 2.5.8 *Sia* P *un polinomio di grado* $n \geq 1$ *e sia* $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$*. Si dice che una radice* z_0 *di* P *ha molteplicità* h *se esiste un polinomio* Q *di grado* $n - h$ *tale che* $Q(z_0) \neq 0$ *(cioè* z_0 *non deve essere una radice di* Q*) e inoltre, per ogni* $z \in \mathbb{C}$*,*

$$P(z) = (z - z_0)^h \cdot Q(z) \, . \tag{2.5.4}$$

In qualche caso, per comodità la definizione precedente può essere estesa al caso $h = 0$ convenendo di denominare di molteplicità 0 un numero che non è radice di P.

Il Corollario 2.5.7 si può esprimere dicendo che un polinomio di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici, se ognuna di esse viene contata con la propria molteplicità; se $z_1, \ldots, z_s$ sono le radici distinte di P e se $h_1, \ldots, h_s$ sono le rispettive molteplicità, si ha

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{h_1} \cdots (z - z_s)^{h_s} \tag{2.5.5}$$

con $h_1 + \ldots h_s = n$.

Dalla formula precedente segue in particolare che un polinomio di grado $n \geq 1$ ha al più n radici distinte. Conseguentemente, due polinomi P e Q, entrambi di grado minore o uguale di n, che coincidono in $n+1$ punti distinti sono necessariamente uguali (infatti il polinomio $P - Q$ si annulla in $n + 1$ punti distinti).

Uno dei metodi più comunemente utilizzati per determinare le radici di un polinomio P consiste nell'applicazione della *regola di Ruffini*, che per il suo carattere elementare non viene qui approfondita.

2.5.2 Polinomi a coefficienti reali

Ci si sofferma ora maggiormente sui polinomi a coefficienti reali, in quanto per tali polinomi si possono aggiungere alcune proprietà interessanti che risulteranno particolarmente utili nel seguito.

Per esporre compiutamente tali proprietà, conviene introdurre il polinomio coniugato di un assegnato polinomio (a coefficienti complessi) e studiarne il comportamento delle radici.

Definizione 2.5.9 *Siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ e si consideri il polinomio $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$. Si denomina polinomio coniugato di P, e si denota con $\overline{P}$ il polinomio*

$$\overline{P}(z) = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} z^n.$$

Quindi il polinomio coniugato di un polinomio P ha come coefficienti i coniugati dei coefficienti di P. Se P ha grado n, anche il polinomio coniugato ha grado n. Ad esempio il coniugato del polinomio $P(z) = iz^4 - 2z^3 + (2 - i)z + 1 + i$ è il polinomio $\overline{P}(z) = -iz^4 - 2z^3 + (2 + i)z + 1 - i$.

Ovviamente, un polinomio coincide con il suo polinomio coniugato se e solo se è a coefficienti reali.

Per quanto riguarda le radici del polinomio coniugato, vale la proprietà seguente.

Proposizione 2.5.10 *Se P è un polinomio e $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P, allora il numero complesso coniugato $\overline{z_0}$ di z_0 è una radice del polinomio coniugato $\overline{P}$.*

Dimostrazione. Siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ tali che $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$. Allora, dalla Definizione 2.5.9, $\overline{P}(\overline{z_0}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z_0}^n = \overline{a_0 + \cdots + a_n z_0^n} = \overline{P(z_0)}$ e quindi si ha $\overline{P(z_0)} = 0$ se e solo se $P(z_0) = 0$ □

Si può osservare in più che $se z_1, \ldots, z_s$ sono le radici distinte di P aventi rispettivamente molteplicità $h_1, \ldots, h_s$, dalla (2.5.5) si ha $P(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{h_1} \cdots (z - z_s)^{h_s}$ con $h_1 + \ldots h_s = n$ e quindi

$$\overline{P}(z) = a_n \cdot (z - \overline{z_1})^{h_1} \cdots (z - \overline{z_s})^{h_s} \tag{2.5.6}$$

Dunque $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_s}$ sono le radici distinte del polinomio coniugato $\overline{P}$ ed hanno le stesse molteplicità $h_1, \ldots, h_s$ di $z_1, \ldots, z_s$.

Dalla proprietà precedente si è in grado di ricavare alcune proprietà delle radici di un polinomio a coefficienti reali.

Proposizione 2.5.11 *Sia P un polinomio a coefficienti reali. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P, allora anche il numero complesso coniugato $\overline{z_0}$ è una radice di P avente la stessa molteplicità di z_0.*

La dimostrazione della proposizione precedente è ovvia, tenendo presente che nel caso in esame $\overline{P} = P$.

Poiché le radici di un polinomio di grado n sono esattamente n se si tiene conto della molteplicità, si deduce che le radici complesse non reali devono essere a due a due coniugate e quindi sono in numero pari. Pertanto si ha la seguente proprietà.

Proposizione 2.5.12 *Sia P un polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 1$, con n dispari. Allora esiste almeno una radice reale di P.*

Come ulteriore conseguenza della Proposizione 2.5.11, si può ricavare un'utile decomposizione di un polinomio a coefficienti reali.

Sia $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ un polinomio con coefficienti $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dalla (2.5.5), e tenendo presente che le radici complesse sono tra loro coniugate (e quindi possono essere moltiplicate tra loro dando luogo a termini di secondo grado con $\Delta < 0$), si deduce che il polinomio P si può decomporre nel modo seguente:

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{h_1} \cdots (x-x_p)^{h_p}(x^2+b_1x+c_1)^{k_1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{k_q} \,, \quad (2.5.7)$$

dove $x_1, \ldots, x_p$ sono le radici reali di P aventi rispettivamente molteplicità $h_1, \ldots, h_p$, e $k_1, \ldots, k_q$ sono le molteplicità delle radici complesse coniugate dei termini $x^2 + b_1x + c_1, \ldots, x^2 + b_qx + c_q$ con $\Delta_1 = b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, \Delta_q = b_q^2 - 4c_q < 0$. Poiché la somma di tutte le molteplicità deve essere n, si deve infine avere

$$h_1 + \cdots + h_p + 2(k_1 + \cdots + k_q) = n \,.$$