

Capitolo 3

Alcuni metodi di risoluzione di equazioni e disequazioni

Siano X ed Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali. Un'equazione si presenta nella forma seguente

$$f(x) = g(x) .$$

Risolvere la precedente equazione significa determinare l'insieme

$$S := \{x \in X \cap Y \mid f(x) = g(x)\} .$$

In maniera analoga, una disequazione si presenta in una delle seguenti forme

$$f(x) \leq g(x) , \quad f(x) \geq g(x) , \quad f(x) < g(x) , \quad f(x) > g(x)$$

e risolverla significa determinare l'insieme degli elementi di $X \cap Y$ per cui la diseuguaglianza indicata risulta vera.

3.1 Equazioni e disequazioni razionali intere

Un tipo molto semplice di equazioni e disequazioni é costituito da quelle di tipo algebrico. Esse si presentano nella forma

$$P(x) = 0$$

oppure, rispettivamente,

$$P(x) \leq 0 , \quad P(x) \geq 0 , \quad P(x) < 0 , \quad P(x) > 0 ,$$

con P polinomio.

In precedenza ci si è soffermati sulle soluzioni delle equazioni polinomiali e pertanto ora si prenderanno in considerazione soprattutto le disequazioni; ovviamente, queste hanno senso solo per polinomi a coefficienti reali in quanto in $\mathbb{C}$ non si possono considerare disequazioni. Passando, se necessario, alla disequazione opposta, nel seguito si potrà supporre, qualora lo si ritenga conveniente, che il coefficiente della potenza di grado massimo del polinomio sia strettamente positivo.

Si studiano dapprima i casi più semplici in cui il grado del polinomio P è 0, 1 oppure 2 e poi si passa al caso generale.

Si supponga dapprima che P sia un polinomio di grado 0, cioè $P(x) = a_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $a_0 \neq 0$. In questo caso, se $a_0 > 0$, le disequazioni $P(x) \leq 0$ e $P(x) < 0$ non sono mai soddisfatte per cui $S = \emptyset$, mentre le disequazioni $P(x) \geq 0$ e $P(x) > 0$ sono sempre soddisfatte per cui $S = \mathbb{R}$; il caso $a_0 < 0$ si discute in maniera analoga.

Si considera ora il caso in cui P sia un polinomio di grado 1, cioè $P(x) = mx + n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $m, n \in \mathbb{R}$ ed $m > 0$; in questo caso, è facile vedere che le disequazioni in esame hanno rispettivamente come soluzioni i seguenti intervalli: $S =]-\infty, -n/m]$, $S = [-n/m, +\infty[$, $S =]-\infty, -n/m[$, $S =]-n/m, +\infty[$. Ad esempio, la disequazione $2x+3 \geq 0$, ha come soluzioni l'insieme $S =]-3/2, +\infty[$, mentre la disequazione $3 - 4(5-x) \leq 2x+5$ ha come soluzioni l'insieme $S =]-\infty, 11]$.

Sia ora $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio di secondo grado con $a, b, c \in \mathbb{R}$ ed $a > 0$. In questo caso bisogna tener presente che:

- Se $\Delta > 0$, denotate con x_1 e x_2 le due radici distinte di P con $x_1 < x_2$, risulta $P(x) \geq 0$ in $] -\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$ e $P(x) \leq 0$ in $[x_1, x_2]$ (se $a < 0$, si ha ovviamente $P(x) \geq 0$ in $[x_1, x_2]$ e $P(x) \leq 0$ in $] -\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$).
- Se $\Delta = 0$, risulta sempre $P(x) \geq 0$ e P si annulla solo nell'unica radice $x_0 = -b/2a$ (se $a < 0$, risulta sempre $P(x) \leq 0$ e P si annulla solo nell'unica radice x_0).
- Se $\Delta < 0$, risulta sempre $P(x) > 0$ (se $a < 0$, risulta sempre $P(x) < 0$).

Da quanto osservato si deduce facilmente l'insieme delle soluzioni di ognuna delle disequazioni in esame. Ad esempio, la disequazione $2x^2 - 2x + 1 \leq 0$ non è mai soddisfatta il quanto il polinomio $2x^2 - 2x + 1$ ha $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ ed è quindi sempre strettamente positivo. Invece, la disequazione $x^2 - x - 6 > 0$ è soddisfatta in $] -\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ in quanto il polinomio $x^2 - x - 6$ ha due radici reali -2 e 3 .

Si considera, infine, il caso generale. Siano $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ e si consideri il polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Essendo a coefficienti reali, il polinomio P si può decomporre come segue (vedasi la Sezione 2.5.2, formula (2.5.7))

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{h_1} \dots (x - x_p)^{h_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \dots (x^2 + b_qx + c_q)^{k_q},$$

dove $x_1, \dots, x_p$ sono le radici reali di P aventi rispettivamente molteplicità $h_1, \dots, h_p$, e $k_1, \dots, k_q$ sono le molteplicità delle radici complesse coniugate dei termini $x^2 + b_1x + c_1, \dots, x^2 + b_qx + c_q$ con $\Delta_1 = b_1^2 - 4c_1 < 0, \dots, \Delta_q = b_q^2 - 4c_q < 0$. Poiché la somma di tutte le molteplicità deve essere n , si deve infine avere

$$h_1 + \dots + h_p + 2(k_1 + \dots + k_q) = n.$$

Per ottenere tale decomposizione, si può procedere in modo diretto per i polinomi di grado minore o uguale di 2 (oppure anche per quelli di grado 3 e 4), oppure utilizzare la regola di Ruffini per i polinomi di grado superiore. La decomposizione del polinomio è il punto di partenza per lo studio delle disequazioni algebriche. Una volta ottenuta tale decomposizione, si può studiare il segno di ogni fattore e dedurre poi il segno del prodotto tenendo presente che il prodotto di un numero dispari di numeri negativi è negativo e il prodotto di un numero pari di numeri negativi è un numero positivo. Inoltre, poiché i fattori di secondo grado hanno tutti discriminante negativo, tali fattori hanno tutti segno costante strettamente positivo (in quanto il coefficiente di x^2 è $1 > 0$). Per rendere più chiaro lo studio dei segni dei singoli fattori, ci si può avvalere di uno schema grafico utilizzando per ogni fattore un tratto continuo per rappresentare gli intervalli in cui è positivo e tratteggiato per gli intervalli in cui è negativo; ad esempio, il segno del fattore $x - 1$ viene rappresentato come segue

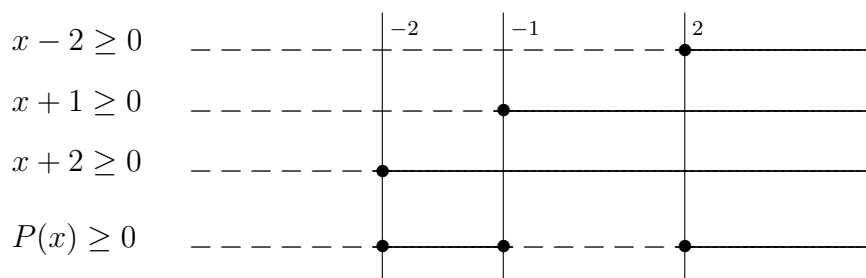
$$x - 1 \geq 0 \quad \text{-----} \bullet \text{-----}$$

e quello del fattore $x^2 - 2x - 3$ nel modo seguente

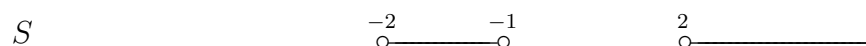
$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad \text{-----} \bullet \text{-----} \bullet \text{-----}$$

In questo modo, il segno del polinomio sarà positivo negli intervalli in cui vi è un numero pari di fattori negativi e negativo negli intervalli in cui vi è un numero dispari di fattori negativi. Alla fine, si considerano gli intervalli corrispondenti al tipo di disequazione richiesta.

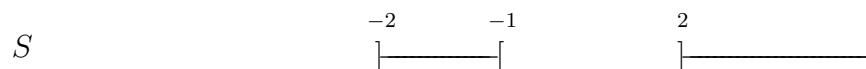
Ad esempio, si consideri la disequazione $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0$; il polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ si può decomporre utilizzando la regola di Ruffini come segue $P(x) = (x-2)(x+1)(x+2)$; nello schema seguente si rappresenta il segno di ogni fattore e quello del prodotto:



Poiché si vuole che il segno di P sia strettamente positivo, alla fine vanno considerate le soluzioni date dall'insieme $S :=]-2, -1[\cup]2, +\infty[$; nella seguente rappresentazione geometrica si è convenuto di rappresentare con un cerchietto pieno gli estremi inclusi nell'insieme, o in cui è soddisfatta la diseuguaglianza in esame, e con un cerchietto vuoto i rimanenti estremi.



Anziché utilizzare i simboli $\bullet$ e $\circ$ spesso si ricorre ai simboli $[$ e $]$ con le stesse convenzioni che riguardano gli intervalli; pertanto, l'insieme S si può anche rappresentare nel modo seguente.



3.2 Equazioni e disequazioni razionali fratte

Si considerano ora equazioni e disequazioni in cui sono coinvolte funzioni razionali fratte. Si ricorda che una funzione $R : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ si dice *funzione razionale fratta* (oppure semplicemente *funzione razionale*) se esistono due polinomi P e Q , con Q non nullo, tali che

$$X := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

e inoltre, per ogni $x \in X$,

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Poiché il polinomio Q ha sempre un numero finito di radici, le funzioni razionali non sono definite al più in un numero finito di punti.

Per quanto riguarda le equazioni con funzioni razionali, esse si riducono a quelle polinomiali. Infatti, si ha $R(x) = 0$ se e solo se $P(x) = 0$ e $Q(x) \neq 0$; bisogna quindi trovare le radici del polinomio P e verificare che in esse non si annulli anche il denominatore, nel qual caso la funzione razionale non risulterebbe definita. Ad esempio l'equazione

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-x} = 0$$

ha come unica radice l'elemento 2, in quanto l'altra radice 1 del numeratore annulla anche il denominatore e quindi non ha senso considerare l'equazione in tale punto. Anche lo studio delle disequazioni razionali fratte viene condotto in modo molto simile a quello delle disequazioni razionali intere. Bisogna innanzitutto decomporre entrambi i polinomi P e Q in fattori di primo e secondo grado con discriminante minore di 0 e successivamente studiare il segno di ogni fattore (sia del numeratore che del denominatore); infine si tiene presente che il segno della funzione razionale sarà, come nel caso delle disequazioni razionali intere, positivo negli intervalli in cui vi è un numero pari di fattori negativi e negativo negli intervalli in cui vi è un numero dispari di segni negativi. Rispetto al caso polinomiale, nel considerare gli intervalli corrispondenti alla disequazione richiesta, bisogna comunque escludere i punti in cui si annulla il polinomio Q al denominatore.

Ad esempio, si consideri la disequazione

$$\frac{x-2}{x-1} \leq 2;$$

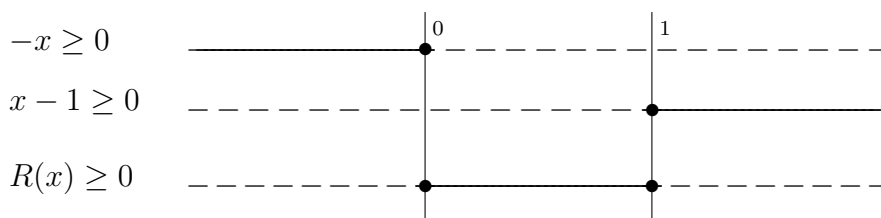
essa è equivalente a

$$\frac{x-2}{x-1} - 2 \leq 0,$$

e quindi, considerando il minimo comune multiplo,

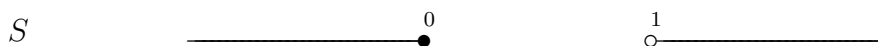
$$\frac{-x}{x-1} \leq 0.$$

Pertanto, bisogna studiare i segni di $-x$ e $x-1$, da cui si ottiene



dove $R(x)$ denota la funzione razionale $-x/(x-1)$.

Poiché nel caso in esame si vuole che $R(x) \leq 0$, le soluzioni sono date dall'insieme $S :=]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, che si può rappresentare nel modo seguente.



3.3 Sistemi di equazioni e disequazioni

Nelle sezioni successive, si studieranno alcuni casi in cui le equazioni o disequazioni in esame possono essere ricondotte ad una o più equazioni o disequazioni di tipo più semplice. Quando, in generale, si hanno più equazioni (rispettivamente, disequazioni) che devono essere soddisfatte contemporaneamente si preferisce parlare di *sistemi di equazioni* (rispettivamente, *sistemi di disequazioni*) e raggruppare le disequazioni con una parentesi graffa. Un sistema di equazioni (rispettivamente, disequazioni) si presenta nella forma

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) , \\ f_2(x) = g_2(x) , \\ \vdots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

(rispettivamente,

$$\begin{cases} f_1(x) \leq g_1(x) , \\ f_2(x) \leq g_2(x) , \\ \vdots \\ f_n(x) \leq g_n(x) , \end{cases}$$

con $f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_n : Y_n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali assegnate.

Le soluzioni di un sistema di equazioni (rispettivamente, disequazioni) sono date dall'insieme

$$S := \{x \in X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_n \mid f_1(x) = g_1(x), \dots, f_n(x) = g_n(x)\}$$

(rispettivamente,

$$S := \{x \in X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_n \mid f_1(x) \leq g_1(x), \dots, f_n(x) \leq g_n(x)\} .$$

Quindi, per determinare l'insieme S si determinano separatamente gli insiemi $S_1, \dots, S_n$ di ognuna delle equazioni (rispettivamente, disequazioni) del

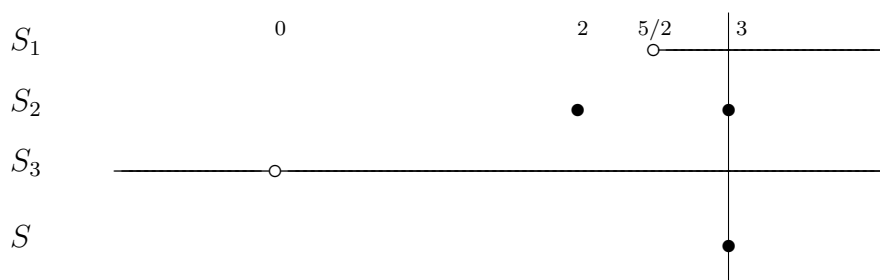
sistema. Allora l'insieme S é dato da $S_1 \cap \cdots \cap S_n$. Quanto osservato vale anche per i sistemi misti, che contengono sia equazioni che disequazioni.

Ad esempio, si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x > 5, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

La prima disequazione ha come soluzioni l'insieme $S_1 =]5/2, +\infty[$; la seconda equazione l'insieme $S_2 = 2, 3$ e la terza l'insieme $\mathbb{R}^*$. Quindi l'insieme S delle soluzioni del sistema é dato da $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{3\}$.

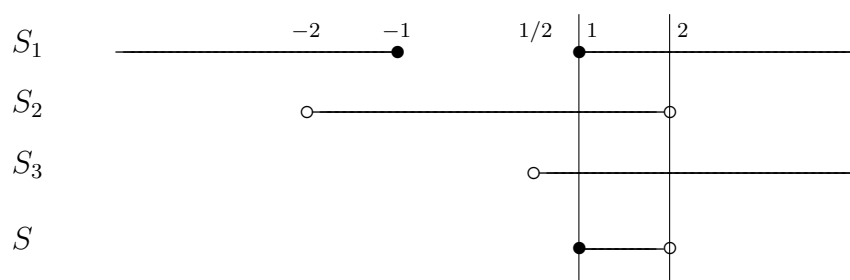
L'intersezione può essere facilmente determinata graficamente considerando i punti comuni agli insiemi delle soluzioni di ogni disequazione o equazione.



Si consideri ora il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 5 \leq 2x^2 + 4, \\ x^4 - 16 < 0, \\ 2x - 1 > 0. \end{cases}$$

L'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione é dato da $S_1 :=] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$, l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda disequazione é dato da $S_2 :=] - 2, 2[$ ed infine l'insieme S_3 delle soluzioni della terza disequazione é dato da $S_3 :=]1/2, +\infty[$. Pertanto, le soluzioni del sistema sono date dall'insieme $S := S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [1, 2[$, come si riconosce anche dal grafico seguente.



3.4 Equazioni e disequazioni irrazionali

Si considerano innanzitutto equazioni irrazionali del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) .$$

Se n è pari, sia la funzione f che la funzione g devono essere positive, la prima in quanto argomento della radice n -esima, la seconda in quanto deve soddisfare l'uguaglianza prevista; una volta che ciò sia stato imposto, si possono elevare primo e secondo membro alla potenza n -esima ed ottenere un'equazione in cui non figura più la radice n -esima. Se n invece è dispari, non è necessario imporre la positività delle funzioni f e g e quindi si possono elevare direttamente alla potenza n -esima entrambi i membri dell'equazione. Si conclude che l'equazione in esame è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 , \\ g(x) \geq 0 , \\ f(x) = g(x)^n , \end{cases}$$

se n è pari, altrimenti è equivalente all'equazione

$$f(x) = g(x)^n$$

se n è dispari.

Per quanto riguarda le disequazioni irrazionali conviene considerare separatamente i seguenti due casi:

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) , \quad f(x) \leq \sqrt[n]{g(x)}$$

(le diseuguaglianze strette $<$ al posto di $\leq$ vengono trattate in maniera analoga). Se n è dispari entrambi i tipi di disequazioni sono equivalenti a quelle che si ottengono elevando entrambi i membri alla potenza n -esima. Se n è

pari, con ragionamento analogo a quello svolto per le equazioni, si riconosce che la prima disequazione in esame é equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x)^n, \end{cases}$$

mentre la seconda é equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x)^n \leq g(x), \end{cases}$$

nel senso che le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Ad esempio, si consideri la disequazione

$$\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 1.$$

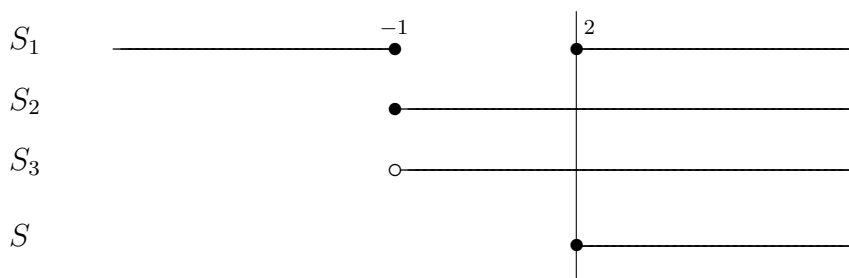
In base alla discussione precedente, essa é equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0, \\ x^2 - x - 2 < x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

denotati con S_1 , S_2 e rispettivamente S_3 gli insiemi delle soluzioni della prima, seconda e rispettivamente terza disequazione, si ottiene facilmente

$$S_1 =] - \infty, -1[\cup [2, +\infty[, \quad S_2 = [-1, +\infty[, \quad S_3 =] - 1, +\infty[$$

e conseguentemente la disequazione assegnata é soddisfatta nell'insieme $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [2, +\infty[$.



Al contrario, la disequazione opposta

$$\sqrt{x^2 - x - 2} > x + 1$$

é equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x + 1 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0, \\ x^2 - x - 2 > x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

in base alla discussione precedente, si riconosce facilmente che il primo sistema ha come soluzioni l'insieme $S' =]-\infty, -1[$, mentre il secondo sistema non é mai soddisfatto ($S'' = \emptyset$); allora le soluzioni della disequazione sono date da $S = S' \cup S'' =]-\infty, -1[$ (si osservi che in questo caso alla fine viene considerata l'unione delle soluzioni dei due sistemi).

Come ulteriore esempio, si consideri la disequazione

$$2 - x < \sqrt{x^2 - 1};$$

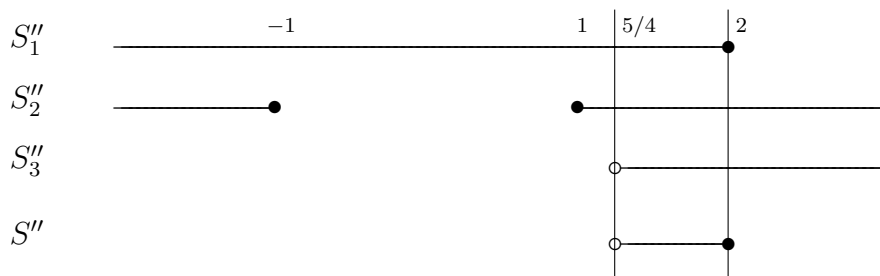
essa é ancora una volta equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} 2 - x < 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - 4x + x^2 < x^2 - 1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il primo sistema, la prima disequazione é soddisfatta in $S'_1 =]2, +\infty[$ e la seconda in $S'_2 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, per cui le soluzioni del primo sistema sono date dall'insieme $S' =]2, +\infty[$.



Il secondo sistema ha invece come soluzioni l'insieme $S'' =]5/4, 2]$, in quanto la prima disequazione é soddisfatta in $S''_1 =]-\infty, 2]$, la seconda in $S''_2 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e la terza in $S''_3 =]5/4, +\infty[$.



Si conclude che le soluzioni della disequazione assegnata sono date dall'insieme $S = S_1 \cup S_2 =]5/4, +\infty[$.



3.5 Equazioni e disequazioni con valore assoluto

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il valore assoluto $|x|$ di x è definito ponendo

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Un'equazione del tipo

$$|f(x)| = g(x),$$

con f e g funzioni reali assegnate, può essere ricondotta facilmente ad un sistema di equazioni e disequazioni in cui non compare più il valore assoluto. Infatti, tenendo presente che deve essere necessariamente $g(x) \geq 0$, le soluzioni sono date dai due sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Ad esempio, l'equazione

$$|x^2 + x + 1| = x^2 - 3x + 2$$

ha come soluzioni quelle dei due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 + x + 1 = x^2 - 3x + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 + x + 1 = -(x^2 - 3x + 2). \end{cases}$$

Il primo di essi è soddisfatto in $S_1 = (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) \cap \{1/4\} = \{1/4\}$; il secondo invece non ha soluzioni in quanto l'equazione $x^2 + x + 1 = -(x^2 - 3x + 2)$, equivalente a $2x^2 - 2x + 3 = 0$ non è mai soddisfatta. Si conclude che l'equazione assegnata ammette come unica soluzione il punto $x = \{1/4\}$.

Si considerano ora le disequazioni che coinvolgono il valore assoluto.

Anche in questo caso conviene considerare separatamente quelle che si presentano nella forma

$$|f(x)| \leq g(x) ,$$

da quelle del tipo

$$f(x) \leq |g(x)|$$

(nel caso di disequaglianze strette i metodi di risoluzione sono del tutto analoghi e pertanto per brevità vengono omessi).

Tenendo presente che la disequazione $|x| \leq a$ non è mai soddisfatta se $a < 0$ ed è soddisfatta per $-a \leq x \leq a$ se $a \geq 0$, la prima disequazione è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 , \\ -g(x) \leq f(x) , \\ f(x) \leq g(x) , \end{cases}$$

in cui non è più coinvolto il valore assoluto.

Analogamente, tenendo presente che la disequazione $a \leq |x|$ è sempre soddisfatta se $a < 0$ ed è soddisfatta sia per $x \geq a$ che per $x \leq -a$ se $a \geq 0$, allora la seconda disequazione in esame è equivalente ai seguenti tre sistemi (nel senso che l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione degli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi)

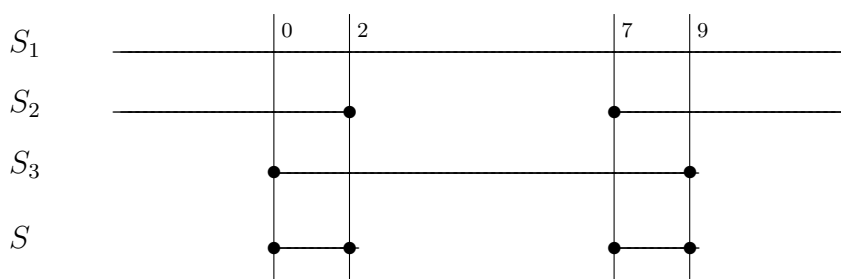
$$\begin{cases} f(x) < 0 , \\ x \in X_g ; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 , \\ g(x) \geq f(x) ; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 , \\ g(x) \leq -f(x) , \end{cases}$$

dove nel primo sistema si è denotato con X_g l'insieme di definizione della funzione g (infatti la condizione $f(x) < 0$ assicura la validità di $f(x) \leq |g(x)|$ purché anche la funzione g sia definita in x).

Ad esempio, si consideri la disequazione $|x^2 - 9x + 7| \leq 7$. Da quanto osservato, essa si riconduce al sistema

$$\begin{cases} 7 \geq 0 , \\ x^2 - 9x + 7 \leq 7 , \\ -7 \leq x^2 - 9x + 7 . \end{cases}$$

La prima disequazione è sempre soddisfatta ($S_1 = \mathbb{R}$). La seconda si può scrivere $x^2 - 9x + 14 \geq 0$; poiché $\Delta = 25$, si hanno due radici $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$ e la disequazione è soddisfatta per $x \leq 2$ o per $x \geq 7$, cioè in $S_2 =] - \infty, 2] \cup [7, +\infty[$. L'ultima disequazione si scrive come $x^2 - 9x \leq 0$ e quindi è soddisfatta in $S_3 = [0, 9]$. Quindi la disequazione assegnata ha come soluzioni l'insieme $S = [0, 2] \cup [7, 9]$.



Si consideri ora la disequazione

$$x + 1 < |x^2 - 3x - 8| ,$$

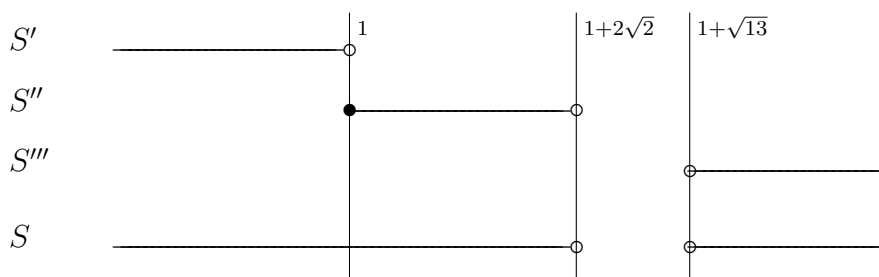
che in base alla discussione effettuata, si riconduce ai tre sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 < 0 , \\ x^2 - 3x - 8 < -x - 1 , \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 1 \geq 0 , \\ x^2 - 3x - 8 < x + 1 . \end{array} \right.$$

Il primo sistema ha come soluzioni l'insieme $S' =] - \infty, -1[$.

Per quanto riguarda il secondo sistema, la disequazione $x + 1 \geq 0$ è soddisfatta per $x \geq -1$, e la disequazione $x^2 - 3x - 8 < -x - 1$ è equivalente a $x^2 - 2x - 7 < 0$; si hanno due soluzioni $x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ e $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ e la disequazione è soddisfatta per $1 - 2\sqrt{2} < x < 1 + 2\sqrt{2}$; pertanto il secondo sistema ha come soluzioni l'insieme $S'' = [-1, 1 + 2\sqrt{2}[$.

Infine, la prima disequazione $x + 1 \geq 0$ del terzo sistema è soddisfatta per $x \geq -1$; la seconda disequazione $x + 1 < x^2 - 3x - 8$ è equivalente a $x^2 - 4x - 9 > 0$; si hanno due soluzioni $x_3 = 2 - \sqrt{13}$ e $x_4 = 2 + \sqrt{13}$, e quindi la disequazione è soddisfatta per $x < 2 - \sqrt{13}$ e per $x > 2 + \sqrt{13}$; pertanto il terzo sistema ha come soluzioni l'insieme $S''' =]2 + \sqrt{13}, +\infty[$. Concludendo, le soluzioni della disequazione iniziale sono date da $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =] - \infty, 1 + 2\sqrt{2}[\cup]2 + \sqrt{13}, +\infty[$.



3.6 Metodo grafico

Si considerano ora alcuni tipi di equazioni e disequazioni in cui sono coinvolte funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse.

Uno dei metodi più semplici per la risoluzione di tali equazioni consiste nel confrontare i grafici delle funzioni che compaiono al primo ed al secondo membro della disequazione in esame e dedurre da tale grafico l'insieme delle soluzioni della disequazione; per tale confronto bisogna comunque sempre imporre che le funzioni siano definite nei punti considerati.

Il confronto grafico può essere effettuato molto facilmente nei casi in cui una delle funzioni sia una retta o, più in particolare, una retta orizzontale, nel qual caso uno dei membri della disequazione è costante.

Si considera qualche esempio, al fine di illustrare più chiaramente il metodo descritto.

Si consideri la disequazione

$$\log x < 1 .$$

Confrontando il grafico della funzione $\log$ con la retta orizzontale passante per il punto $(0, 1)$, si deduce in maniera immediata che la disequazione è soddisfatta nell'insieme $S =]0, e[$ (vedasi la Figura 3.1).

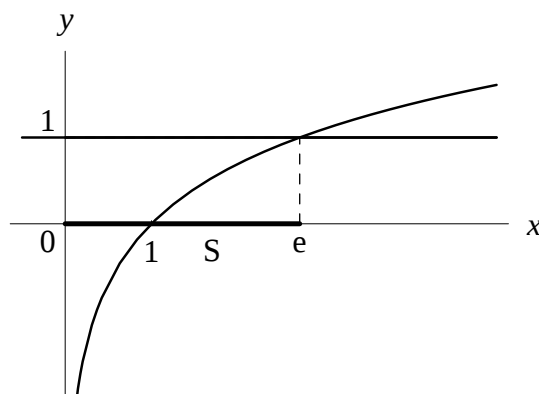


Figura 3.1: Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 1

Si consideri ora la disequazione

$$\sin x > \frac{1}{2} .$$

Confrontando il grafico della funzione $\sin$ con la retta orizzontale passante per il punto $(0, 1/2)$, si deduce subito che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, la disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_0 =]\pi/6, 5\pi/6[$ (vedasi la Figura 3.2).

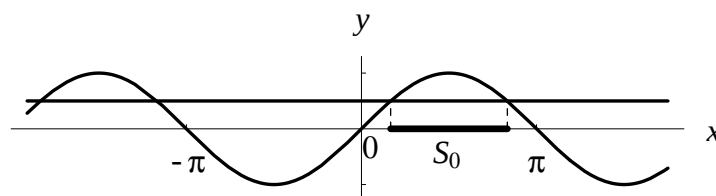


Figura 3.2: Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 2

Tenendo poi conto della periodicità della funzione seno, si ricava l'insieme S di tutte le soluzioni dato da

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[.$$

Si prende ora in esame la disequazione

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{6} .$$

Confrontando il grafico della funzione $\arcsin$ con la retta orizzontale passante per il punto $(0, \pi/6)$, si deduce subito che la disequazione è soddisfatta nell'insieme $S = [-1, 1/2[$ (vedasi la Figura 3.3).

Più generale, il metodo descritto negli esempi precedenti può essere applicato anche nei casi in cui il confronto non sia necessariamente con una retta; in tali casi l'utilizzo del calcolo differenziale può essere utile per la dimostrazione di qualche disequaglianza. Inoltre, il teorema degli zeri può anche essere utilizzato per una determinazione approssimata delle soluzioni, nei casi in cui non sia possibile descrivere le soluzioni in maniera precisa.

Ad esempio, si consideri la seguente disequazione:

$$x^4 + e^x \leq 1 .$$

Confrontando i grafici della funzione $1 - e^x$ e della funzione x^4 (vedasi la Figura 3.4), si riconosce subito che tali funzioni assumono lo stesso valore in un punto $x_0 < 0$ e in 0 e conseguentemente, le soluzioni della disequazione assegnata sono date dall'insieme $S =]x_0, 0[$. Il punto x_0 non può essere determinato in modo preciso, tuttavia esso è sicuramente compreso tra -1 e $-1/2$ in quanto nel punto $-1/2$ la disequazione è soddisfatta (come si verifica direttamente), mentre nel punto -1 non lo è.

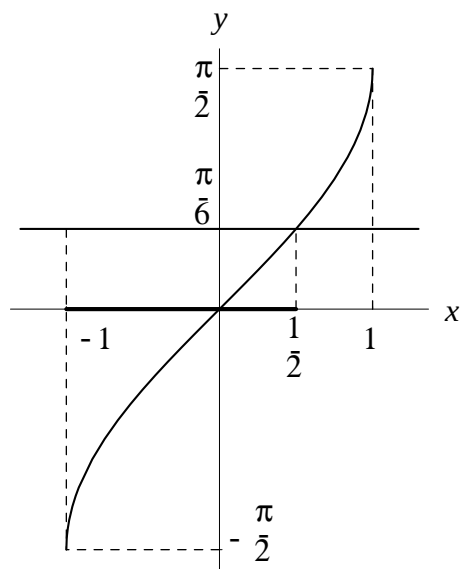


Figura 3.3: Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 3

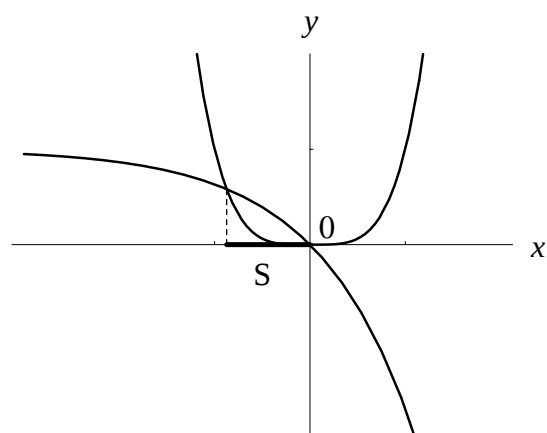


Figura 3.4: Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 4