Capitolo 4

Limiti delle funzioni reali

4.1 Definizione generale di limite

Lo studio dei limiti delle funzioni reali costituisce uno strumento utile per la conoscenza delle proprietà locali di una funzione reale assegnata.

Per comodità, viene considerato il caso di funzioni definite in sottoinsiemi arbitrari di $\mathbb{R}$; tuttavia, quando l'esposizione di alcuni argomenti potrà risultare semplificata, ci si limiterà a considerare il caso più significativo di funzioni definite in un intervallo.

Si espone dapprima la definizione generale di limite di una funzione reale in un punto e, dopo averne visto alcune proprietà, si considereranno i risultati più importanti riguardanti il calcolo dei limiti.

Definizione 4.1.1 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale definita in X, si dice che ℓ è il limite di f in x_0, oppure che f tende verso ℓ per x tendente verso x_0, e si scrive*

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

"ℓ è uguale al limite di $f(x)$ per x tendente verso x_0" se è verificata la seguente condizione:

$$\forall\ I \in \mathcal{I}(\ell)\ \exists\ J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall\ x \in X \cap J \setminus \{x_0\} :\ f(x) \in I\ . \tag{4.1.1}$$

La lettera x che compare nella notazione del limite è "muta" nel senso che essa può essere sostituita con una qualsiasi altra lettera che non sia già stata utilizzata nello stesso contesto.

Una funzione che ammette un limite $\ell \in \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ viene spesso denominata *convergente* in x_0; se, invece, ammette come limite $+\infty$ oppure $-\infty$ viene denominata *divergente* (*positivamente* oppure *negativamente*) in x_0.

Per poter considerare il limite di una funzione in un punto x_0 è dunque necessario che il punto x_0 sia di accumulazione per l'insieme di definizione della funzione. Tale ipotesi, infatti, assicura che l'intersezione $X \cap J \setminus \{x_0\}$ sia non vuota per ogni intorno J di x_0 e quindi che gli elementi $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ verificanti la (4.1.1) esistano effettivamente.

Naturalmente, se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = +\infty$, l'ipotesi che esso sia di accumulazione per X, significa esattamente che X non è limitato superiormente oppure rispettivamente inferiormente.

Nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$, inoltre, conviene precisare subito che non ha alcuna importanza, ai fini del limite, il fatto che la funzione sia definita o meno nel punto x_0; nel caso lo sia, poi, non vi è alcuna relazione tra il valore $f(x_0)$ che f assume nel punto x_0 ed il limite della funzione in tale punto (in seguito, avranno un ruolo importante le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ che in punto $x_0 \in X$ hanno limite uguale proprio ad $f(x_0)$; tali funzioni verranno denominate continue in x_0).

La definizione generale di limite vale sia nel caso in cui x_0 ed ℓ siano reali o infiniti. Nelle applicazioni, tuttavia, in cui x_0 ed ℓ sono noti, la Definizione (4.1.1) può essere precisata meglio tenendo conto della definizione adottata di intorno di un numero reale o degli elementi $+\infty$ e $-\infty$.

Nel caso in cui sia noto che $\ell \in \mathbb{R}$, gli intorni di ℓ possono essere considerati del tipo $I_\varepsilon(x_0)$ (vedasi la (1.1.1) a pag. 6) al variare di $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ (infatti, ogni $I_\varepsilon(x_0)$ è un intorno di ℓ e viceversa ogni intorno di ℓ contiene un intervallo $I_\varepsilon(x_0)$); pertanto, la condizione (4.1.1) si può scrivere come segue:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \;\exists\, J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall\, x \in X \cap J \setminus \{x_0\} :\; \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon\;.$$

Nei casi in cui $\ell = +\infty$ (rispettivamente, $\ell = -\infty$), ragionando come sopra si possono considerare intorni di ℓ del tipo $]M, +\infty[$ (e rispettivamente $]-\infty, M[$) e quindi la condizione (4.1.1) si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned}\forall\, M \in \mathbb{R}\;\exists\, J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \quad & \forall\, x \in X \cap J \setminus \{x_0\} :\; M < f(x)\\ (\text{rispettivamente,} \quad & \forall\, x \in X \cap J \setminus \{x_0\} :\; f(x) < M\;).\end{aligned}$$

Le stesse osservazioni appena svolte per l'elemento ℓ valgono anche per il punto di accumulazione x_0.

Ritornando al caso generale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, se $x_0 \in \mathbb{R}$, la condizione (4.1.1) equivale alla seguente

$$\forall\, I \in \mathcal{I}(\ell)\;\exists\, \delta \in \mathbb{R}^*_+ \text{ t.c. } \forall\, x \in X \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} :\; f(x) \in I\;,$$

mentre, se $x_0 = +\infty$ (rispettivamente, $x_0 = -\infty$), diventa

$$\forall\, I \in \mathcal{I}(\ell)\ \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \qquad \forall\, x \in X \cap]c, +\infty[\ :\ f(x) \in I\ ,$$
$$(\text{rispettivamente,} \qquad \forall\, x \in X \cap]-\infty, c[\ :\ f(x) \in I\ ).$$

Nei casi in cui siano noti sia ℓ che x_0 si possono applicare entrambe le considerazioni precedenti. Così, ad esempio, se $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ t.c. } \forall\, x \in X \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\ :\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon\ ,$$

mentre, si ha $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall\, x \in X\ :\ x < c \Rightarrow f(x) < M\ .$$

4.2 Prime proprietà dei limiti

La definizione di limite data nella sezione precedente è pienamente giustificata dal seguente teorema di unicità.

Teorema 4.2.1 (Teorema di unicità del limite)
Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Se $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1\ , \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2\ ,$$

allora necessariamente $\ell_1 = \ell_2$.

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che $\ell_1 \neq \ell_2$. Allora si possono trovare un intorno $I_1 \in \mathcal{I}(\ell_1)$ ed un intorno $I_2 \in \mathcal{I}(\ell_2)$ tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Dalle ipotesi segue da un lato l'esistenza di un intorno $J_1 \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in I_1$, e dall'altro l'esistenza di un ulteriore intorno $J_2 \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che, per ogni $x \in X \cap J_2 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in I_2$. Si consideri ora $J = J_1 \cap J_2$; tale insieme è anch'esso un intorno di x_0 e poiché x_0 è un punto di accumulazione per X, deve essere $X \cap J \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Si considera un qualsiasi elemento $\overline{x} \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha sia $\overline{x} \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, da cui $f(\overline{x}) \in I_1$ ed anche $\overline{x} \in X \cap J_2 \setminus \{x_0\}$, da cui $f(\overline{x}) \in I_2$; dunque $f(\overline{x}) \in I_1 \cap I_2$ e ciò è escluso dal fatto che gli intorni I_1 ed I_2 sono disgiunti. □

Un'altra proprietà importante del limite di una funzione riguarda il suo *carattere locale*. Questa proprietà assicura che è equivalente considerare il limite di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ in un punto x_0 e quello della sua restrizione $f_{|X\cap J_0}$ ad un intorno J_0 di x_0. Infatti, basta verificare la definizione di limite considerando $J \cap J_0$ (che è ancora un intorno di x_0) al posto di J.

Altre proprietà, di immediata verifica, sono elencate di seguito.

Proposizione 4.2.2 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.*

Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **(Limitatezza locale)**

   i) *Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora f è limitata in un intorno di x_0, cioè esistono $M_0 \in \mathbb{R}$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0$, $|f(x)| \leq M_0$.*

   ii) *Se $\ell = +\infty$ (rispettivamente, $\ell = -\infty$), allora f è limitata inferiormente (rispettivamente, superiormente) in un intorno di x_0, cioè esistono $M_0 \in \mathbb{R}$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0$, $M_0 \leq f(x)$ (rispettivamente, $f(x) \leq M_0$).*

2. **(Permanenza del segno)**

   i) *Se $\ell > 0$ oppure $\ell = +\infty$, esistono un numero reale $r > 0$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \geq r > 0$.*

   ii) *Se $\ell < 0$ oppure $\ell = -\infty$, esistono un numero reale $r > 0$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq -r < 0$.*

   iii) *Se, per ogni intorno J di x_0, esistono $x_1 \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ e $x_2 \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_1) \geq 0$, $f(x_2) \leq 0$, allora deve essere necessariamente $\ell = 0$.*

   iv) *Se, per ogni intorno J di x_0, esiste $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x) = 0$, allora deve essere necessariamente $\ell = 0$.*

3. **(Monotonia del limite)**

   Si supponga che $g : X \to \mathbb{R}$ sia un'ulteriore funzione reale tale che $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ con $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Allora, se esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$, deve essere necessariamente $\ell \leq \ell'$.

   Viceversa, se $\ell < \ell'$, allora esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) < g(x)$.

Dimostrazione. Si dimostra innanzitutto la proprietà 1. Per quanto riguarda la i), si può applicare la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ i ottiene un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$. A questo punto è sufficiente porre $M_0 = |\ell| + 1$ (oppure $M_0 := \max\{|\ell| + 1, |f(x_0)|\}$ se f è definita in x_0).

Per quanto riguarda la ii), si applica la definizione di limite considerando l'intorno $]0, +\infty[$ di ℓ; si ottiene un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $0 < f(x)$.

Quindi, la proprietà ii) è verificata ponendo $M_0 = 0$ oppure $M_0 := \min\{0, f(x_0)\}$ nel caso in cui f sia definita in x_0. Il caso rispettivo si dimostra analogamente.

Si dimostra ora la 2. Si considera dapprima la proprietà i). Se $\ell > 0$ si pone $r = |\ell|/2$ e si applica la definizione di limite all'intorno $I :=]\ell - r, +\infty[$ di ℓ. Se $\ell = +\infty$, si applica la definizione di limite considerando l'intorno $I :=]1, +\infty[$ di ℓ e la tesi è soddisfatta con $r = 1$. La proprietà ii) si dimostra analogamente. Infine, le proprietà iii) e iv) seguono dalle i) e ii) procedendo per assurdo.

Per quanto riguarda la 3., si supponga dapprima che esista un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$. Se, per assurdo, fosse $\ell' < \ell$, si potrebbero considerare due intervalli disgiunti $I \in \mathcal{I}(\ell)$ e $I' \in \mathcal{I}(\ell')$; quindi, per ogni $y \in I$ e per ogni $y' \in I'$, si avrebbe $y' < y$. Applicando la definizione di limite, si ottiene l'esistenza di un intorno $Jdix_0$ tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in I$ ed un intorno J' di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J' \setminus \{x_0\}$, $g(x) \in I'$. Si consideri ora l'insieme $J'' = J_0 \cap J \cap J'$; esso è un intorno di x_0 e, poiché x_0 è di accumulazione per X, deve essere $X \cap J'' \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Considerato un punto $\overline{x} \in X \cap J'' \setminus \{x_0\}$, si ha $f(\overline{x}) > g(\overline{x})$ (in quanto $f(\overline{x}) \in I$ e $g(\overline{x}) \in I'$). Ciò è assurdo poiché deve essere $f(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$ in quanto $\overline{x} \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$.

Per il viceversa si ragiona in modo analogo. □

4.3 Limiti destri e sinistri

Il calcolo del limite di una funzione in un punto si rivelerà uno strumento essenziale per lo studio delle funzioni condotto a partire dal presente capitolo. In alcuni casi, tuttavia, tale limite non esiste e quindi ha senso investigare sono verificate almeno proprietà più deboli. In questo ambito si inserisce la ricerca dei limiti da destra e da sinistra, come precisato dalla seguente definizione.

Definizione 4.3.1 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione a destra (rispettivamente, a sinistra) per X, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale.*

Si dice che ℓ è il limite destro (rispettivamente, sinistro) di f in x_0, oppure che f tende verso ℓ per x tendente verso x_0 da destra (rispettivamente, da sinistra), e si scrive

$$\ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\ , \qquad (\textit{rispettivamente},\ \ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x)\ )$$

(si legge "ℓ è uguale al limite di $f(x)$ per x tendente verso x_0 da destra" (rispettivamente, "ℓ è uguale al limite di $f(x)$ per x tendente verso x_0 da sinistra")) se è verificata la seguente condizione

$$\forall\ I \in \mathcal{I}(\ell)\ \exists\ \delta \in \mathbb{R}_+^*\ \text{t.c.} \qquad \forall\ x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[:\ f(x) \in I \qquad (4.3.1)$$
$$(\textit{rispettivamente}, \qquad \forall\ x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[:\ f(x) \in I\ ).$$

Si osservi che la definizione precedente ha senso solo quando $x_0 \in \mathbb{R}$; per tale motivo, anzichè considerare intorni destri (o sinistri) generali sono stati considerati direttamente quelli del tipo $[x_0, x_0 + \delta[$ (oppure $]x_0 - \delta, x_0]$).

Ovviamente, nei casi in cui è possibile precisare $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = \pm\infty$, valgono le stesse considerazioni relative alla definizione generale di limite (4.1.1).

Sostanzialmente, calcolare il limite destro (rispettivamente, sinistro) in un punto x_0 significa considerare solamente i valori della funzione a destra (rispettivamente, a sinistra) di x_0; precisamente, nelle ipotesi della Definizione 4.3.1, si ha la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f_{|X \cap]x_0, +\infty[}(x) \ , \qquad (4.3.2) \\ \text{(rispettivamente,} \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f_{|X \cap]-\infty, x_0[}(x) \ ) \end{aligned}$$

supposto che uno dei due limiti esista (nel qual caso, quindi, esiste anche l'altro e sono uguali).

Trattandosi di un particolare limite, quindi, valgono tutte le proprietà esposte nella sezione precedente; in particolare, anche il limite destro e quello sinistro, quando esistono, sono unici.

Inoltre, sempre dalle uguaglianze precedenti, segue che il punto x_0 è di accumulazione solo a destra (rispettivamente, solo a sinistra) l'esistenza del limite della funzione in x_0 equivale a quella del limite destro (rispettivamente, sinistro) in x_0. In questo caso, quindi, il limite destro o sinistro non aggiunge nulla di nuovo rispetto al limite.

Nel caso, invece, in cui il punto x_0 sia di accumulazione sia a sinistra che a destra per X, si ha la seguente caratterizzazione.

Proposizione 4.3.2 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione sia a sinistra che a destra per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale.*

Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) Esiste il limite di f in x_0.

b) Esistono entrambi i limiti sinistro e destro di f in x_0 e sono uguali.

Inoltre, vera l'una e quindi l'altra delle proposizioni equivalenti precedenti, si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \ .$$

DIMOSTRAZIONE. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Ovvia in quanto ogni intorno di x_0 è un intorno sia destro che sinistro di x_0.
b) $\Rightarrow$ *a*) Si denoti con ℓ il valore comune dei due limiti sinistro e destro di f in x_0 e sia $I \in \mathcal{I}(\ell)$; dalla (4.3.1), considerando ℓ come limite destro, esiste $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0, x_0+\delta_1[$, si abbia $f(x) \in I$; inoltre, considerando ℓ come limite sinistro, sempre dalla (4.3.1), esiste $\delta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta_2, x_0[$, si abbia $f(x) \in I$.

Si è così trovato l'intorno $J =]x_0-\delta_2, x_0+\delta_1[$ di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, risulta $f(x) \in I$. Poiché l'intorno I di ℓ, si deduce che è vera la a). $\square$

La proposizione precedente può essere utilizzata, in qualche caso, anche per dimostrare che un limite assegnato non esiste (facendo cioè vedere o che non esiste uno dei limiti sinistro o destro, oppure che esistono entrambi ma sono diversi tra loro).

Nelle sezioni successive verranno esposti molti risultati limitandosi al caso dei limiti; con opportune semplici modifiche, se necessarie, tali risultati si possono adattare anche ai limiti sinistri e destri.

4.4 Teoremi di confronto

I teoremi esposti nella presente sezione sono largamente utilizzati nel calcolo dei limiti soprattutto per ricondurre quelli che coinvolgono funzioni abbastanza complesse a funzioni più semplici.

Si considerano distintamente il caso di limiti reali e di limiti infiniti.

Si intendono fissati in tutto il seguito un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ per X ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 4.4.1 (Primo teorema di confronto)
Se $\ell \in \mathbb{R}$ e se $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ ed $h : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali verificanti le seguenti condizioni:

1. *Esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$,*
$$g(x) \le f(x) \le h(x) \; ;$$
2. *Esistono i limiti di g ed h in x_0 e si ha*
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \; , \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \; .$$

Allora, esiste anche il limite di f in x_0 e si ha
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \; .$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; poiché $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, esiste un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \smallsetminus \{x_0\}$,

$$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \ ,$$

e analogamente, poiché $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$, esiste un intorno J_2 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_2 \smallsetminus \{x_0\}$

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \ .$$

Allora, l'insieme $J = J_0 \cap J_1 \cap J_2$ risulta un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap J \smallsetminus \{x_0\}$, si ha

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \ , \quad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \ , \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \ .$$

Da ciò segue

$$\ell - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < \ell + \varepsilon \ ,$$

e quindi, dall'arbitrarietà di $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, è verificata la definizione di limite. □

Teorema 4.4.2 (Secondo teorema di confronto per i limiti)
Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali verificanti le seguenti condizioni:

1. *Esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \smallsetminus \{x_0\}$,*

$$g(x) \le f(x) \quad (\textit{rispettivamente},\ f(x) \le g(x)\ );$$

2. *Esiste il limite di g in x_0 e si ha $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (rispettivamente, $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$).*

Allora, esiste anche il limite di f in x_0 e si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (rispettivamente, $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$).

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$; poiché $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, esiste un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \smallsetminus \{x_0\}$, $M < g(x)$. Allora, considerato l'intorno $J = J_0 \cap J_1$ di x_0, per ogni $x \in X \cap J \smallsetminus \{x_0\}$, si ha $g(x) \le f(x)$ e $M < g(x)$, da cui $M \le f(x)$. Dall'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$ segue la tesi. Il caso rispettivo si dimostra in maniera analoga. □

4.5 Operazioni sui limiti

Si studia ora il comportamento del limite rispetto alle operazioni algebriche tra funzioni.

Si intendono fissati un sottoinsieme X non vuoto di $\mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ per X, $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e due funzioni reali $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$.

Teorema 4.5.1 (Primo teorema sul limite della somma)
Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \ , \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \ ,$$

allora, esiste anche il limite di $f+g$ in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2 \ .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; dalle ipotesi, segue l'esistenza di un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $\ell_1 - \varepsilon/2 < f(x) < \ell_1 + \varepsilon/2$ e analogamente esiste un intorno J_2 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_2 \setminus \{x_0\}$, $\ell_2 - \varepsilon/2 < g(x) < \ell_2 + \varepsilon/2$. Allora, considerato l'intorno $J = J_1 \cap J_2$ di x_0, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha contemporaneamente $\ell_1 - \varepsilon/2 < f(x) < \ell_1 + \varepsilon/2$ e $\ell_2 - \varepsilon/2 < g(x) < \ell_2 + \varepsilon/2$ e quindi

$$\ell_1 + \ell_2 - \varepsilon < f(x) + g(x) < \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon$$

. Da ciò, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, segue la tesi. □

Il teorema precedente riguarda il caso in cui esistono entrambi i limiti delle funzioni f e g e sono numeri reali; esso si può enunciare dicendo che in questo caso il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei loro limiti. Bisogna tener presente, tuttavia, che tale regola non vale in generale. Nel caso in cui uno solo dei due limiti sia infinito, si ha quanto segue.

Teorema 4.5.2 (Secondo teorema sul limite della somma)
Sono verificate leguenti condizioni:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(rispettivamente,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*);*

2. *g è limitata inferiormente (rispettivamente, superiormente) in un intorno di x_0, cioè esistono $M_0 \in \mathbb{R}$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0$, $M_0 \leq g(x)$ (rispettivamente, $g(x) \leq M_0$).*

Allora, esiste anche il limite di $f+g$ in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty \quad \text{(rispettivamente, } \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty) \ .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $M \in \mathbb{R}$; dall'ipotesi 1. si ottiene l'esistenza di un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $M - M_0 < f(x)$. Alora, considerato l'intorno $= J_0 \cap J_1$ di x_0, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha sia $M_0 \leq g(x)$ che $M - M_0 < f(x)$ e pertanto $M = M - M_0 + M_0 < f(x) + g(x)$. Dall'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$ segue la tesi. La dimostrazione del caso rispettivo è analoga. □

Conviene osservare che l'ipotesi 2. del Teorema 4.5.2 non prevede l'esistenza del limite di g in x_0. Ovviamente, se esiste il limite di g in x_0 ed è un numero reale oppure $+\infty$ (rispettivamente, è un numero reale oppure $-\infty$), dalla Proposizione 4.2.2, 1. segue che la funzione g è limitata inferiormente (rispettivamente, superiormente) in un intorno di x_0. Quindi, in questo caso, si ha ancora

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty \quad (\text{rispettivamente, } \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty\ ).$$

Nel caso in cui si abbia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty\ ,$$

(o viceversa), non si può concludere nulla sul limite della somma. In tale circostanza, si dice che il limite $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ si presenta nella *forma indeterminata* $+\infty-\infty$ (oppure $-\infty+\infty$).

Nel seguito si introdurranno gli strumenti opportuni che consentiranno di studiare anche tali tipi di limiti.

Si considera ora il caso del limite del prodotto di due funzioni. Anche ora conviene distinguere il caso in cui le due funzioni siano dotate di limiti reali da quello in cui una delle due ammetta un limite infinito.

Teorema 4.5.3 (Primo teorema sul limite del prodotto)
Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1\ , \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2\ ,$$

allora, esiste anche il limite di $f\cdot g$ in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \ell_1\cdot\ell_2\ .$$

Dimostrazione. Preliminarmente, si osserva che la funzione g, essendo dotata di limite reale, dalla Proposizione 4.2.2, 1., risulta limitata in un intorno di x_0, e quindi esistono $M_0 \in \mathbb{R}$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X\cap J_0$, $|g(x)| \le M_0$. Sia ora $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$; poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, esiste un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X\cap J_1 \smallsetminus \{x_0\}$, $|f(x)-\ell_1| < \varepsilon/(2(M+1))$, e analogamente, poiché $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, esiste un intorno J_2 di x_0 tale che, per ogni $x \in X\cap J_2 \smallsetminus \{x_0\}$, $|g(x)-\ell_2| < \varepsilon/(2(|\ell_1|+1))$.

Allora, considerato l'intorno $J = J_0\cap J_1\cap J_2$ di x_0, per ogni $x \in X\cap J \smallsetminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}
|f(x)\cdot g(x)-\ell_1\cdot\ell_2| &= |f(x)\cdot g(x)-\ell_1\cdot g(x)+\ell_1\cdot g(x)-\ell_1\cdot\ell_2| \\
&= |(f(x)-\ell_1)\cdot g(x)+\ell_1\cdot(g(x)-\ell_2)| \\
&\le |(f(x)-\ell_1)\cdot g(x)|+|\ell_1\cdot(g(x)-\ell_2)| \\
&= |f(x)-\ell_1|\cdot|g(x)|+|\ell_1|\cdot|g(x)-\ell_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(M+1)}\cdot M+|\ell_1|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,
\end{aligned}$$

e da ciò, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, segue la tesi. $\square$

Quindi, anche nel caso del limite del prodotto di due funzioni, si può dire che esistono entrambi i limiti delle funzioni f e g e sono numeri reali, il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei loro limiti. Tale regola non si può estendere in generale al caso in cui i limiti delle due funzioni non siano entrambi reali.

Si ha tuttavia il seguente risultato.

Teorema 4.5.4 (Secondo teorema sul limite del prodotto)
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e g è strettamente positiva (rispettivamente, strettamente negativa) in un intorno di x_0 eccetto al più il punto x_0 (cioè, esistono $r \in \mathbb{R}^*_+$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $g(x) \geq r$ (rispettivamente, $g(x) \leq -r$)), allora esiste anche il limite di $f \cdot g$ in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty \quad (\textit{rispettivamente,} \ \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty)\ ).$$

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ e si supponga, come è lecito, $M > 0$ (rispettivamente, $M < 0$). Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, esiste un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $f(x) > M/r$ (rispettivamente, $f(x) < -M/r$). Allora, considerato l'intorno $J = J_0 \cap J_1$ di x_0, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{m}{r}\, r \quad (\text{rispettivamente, } f(x) \cdot g(x) < -\frac{M}{r}\,(-r) = M\ ).$$

Dall'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$ segue la tesi. $\square$

Si osservi che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e g è strettamente positiva (rispettivamente, strettamente negativa) in un intorno di x_0 eccetto al più il punto x_0, allora si può applicare il teorema precedente alle funzioni $-f$ e $-g$, tenendo presente che $f \cdot g = (-f) \cdot (-g)$. Conseguentemente si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$ (rispettivamente, $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$).

Nel caso in cui esista anche il limite della funzione g ia uguale ad $\ell_2 \neq 0$, essa verifica le ipotesi del teorema precedente a causa della Proposizione 4.2.2, 2., e quindi

- Se $\ell_1 = +\infty$ ed $\ell_2 \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ (rispettivamente, $\ell_2 \in \mathbb{R}^*_- \cup \{-\infty\}$), esiste il limite di $f \cdot g$ in x_0 ed è uguale a $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$).

- Se $\ell_1 = -\infty$ ed $\ell_2 \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ (rispettivamente, $\ell_2 \in \mathbb{R}^*_- \cup \{-\infty\}$), esiste il limite di $f \cdot g$ in x_0 ed è uguale a $-\infty$ (rispettivamente, $+\infty$).

Se invece accade che uno dei limiti sia infinito e l'altro sia 0, i teoremi sul prodotto non consentono di concludere nulla. In questo caso, si dice che il limite si presenta nella *forma indeterminata* $0 \cdot (+\infty)$ oppure $0 \cdot (-\infty)$.

Si studia a questo punto il comportamento del limite della funzione reciproca.

Teorema 4.5.5 (Teorema sul limite della funzione reciproca) *Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si supponga che $f : X \to \mathbb{R}$ sia una funzione reale tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Si supponga, inoltre, che per ogni $x \in X$, $f(x) \neq 0$ e si consideri la funzione reciproca $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ (per ogni $x \in X$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$).*

Allora:

1. *Se $\ell \in \mathbb{R}^*$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.*

2. *Se $\ell = +\infty$ oppure $\ell = -\infty$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

3. *Se $\ell = 0$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty$ e inoltre*

   i) *Se f è positiva in un intorno di x_0 eccetto al più il punto x_0 (cioè, esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$), allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.*

   ii) *Se f è negativa in un intorno di x_0 eccetto al più il punto x_0 (cioè, esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) < 0$), allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.*

   iii) *Se f non verifica le condizioni* i) e ii) *precedenti (cioè, in ogni intorno J di x_0 esistono due punti $x_1, x_2 \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_1) < 0 < f(x_2)$), allora il limite della funzione reciproca in x_0 non esiste.*

Dimostrazione. 1. Essendo $\ell \neq 0$, dalla Proposizione 4.2.2, 2., esistono un numero reale $r > 0$ ed un intorno J_0 di x_0 tali che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $|f(x)| > r$. Sia ora $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ e si consideri un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $|f(x) - \ell| < r \cdot |\ell| \cdot \varepsilon$. Allora, considerato l'intorno $J = J_0 \cap J_1$ di x_0, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)| \cdot |\ell|} \leq \frac{|f(x) - \ell|}{r \cdot |\ell|} \leq \frac{r \cdot |\ell| \cdot \varepsilon}{r \cdot |\ell|} = \varepsilon$$

e ciò, essendo $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ arbitrario, completa la dimostrazione del primo caso.
2. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. Sia nel caso $\ell = +\infty$ oppure $\ell = -\infty$, si ha comunque $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ e pertanto, posto $M = 1/\varepsilon$, esiste un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, $|f(x)| > M$. Osservato che $M > 0$, si ha, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{M} = \varepsilon$$

e da ciò, essendo $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ arbitrario, segue il caso 2.
3. Si dimostra innanzitutto che $\lim_{x\to x_0} |1/f(x)| = +\infty$. Infatti, sia $M > 0$ e si ponga $\varepsilon = 1/M$; poichè $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, esiste un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, $|f(x)| \le \varepsilon$, da cui $|1/f(x)| \ge 1/\varepsilon = M$. Dall'arbitrarietà di $M > 0$, segue la prima parte della tesi.

noindent i) Si supponga ora che esista un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$. Allora, poichè f e $|f|$ coincidono in $X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, da quanto dimostrato preliminarmente e dal carattere locale del limite segue $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \lim_{x\to x_0} |1/f(x)| = +\infty$.
ii) Si dimostra in maniera analoga al caso precedente (tenendo presente che in questo caso $f = -|f|$ in $X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$.
iii) Si supponga, per assurdo, che il limite della funzione reciproca esista e sia uguale ad un numero $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dalla Proposizione 4.2.2, 2., se fosse $\ell_1 \in \mathbb{R}^*_+ \cup +\infty$, la funzione f verificherebbe l'ipotesi i), mentre se fosse $\ell_1 \in \mathbb{R}^*_+ \cup -\infty$, la funzione f verificherebbe l'ipotesi ii). Quindi dovrà essere necessariamente $\ell_1 = 0$. Da quanto dimostrato preliminarmente, segue

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{|1/f(x)|} = +\infty$$

e ciò contraddice il fatto che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. □

Quando il limite della funzione è 0 e si vuole calcolare il limite della funzione reciproca, è dunque necessario studiare il segno della funzione f (o equivalentemente della reciproca di f) in un intorno del punto x_0 per poter decidere in quale sottocaso ci si trova.

Il Teorema 4.5.5 consente di concludere in ogni caso come si comporta il limite della funzione reciproca; non vi sono quindi forme indeterminate a tale proposito.

Si esamina ora il caso del quoziente di due funzioni.

In questo caso, essendo $f/g = f \cdot (1/g)$, dallo studio del limite della funzione reciproca e da quello del limite del prodotto di due funzioni, si deduce direttamente il comportamento del limite della funzione quoziente.

Tuttavia, tali teoremi non consentono di determinare il comportamento della funzione quoziente in tutti i possibili casi; infatti, se le funzioni f e g tendono entrambe a 0 oppure entrambe a $\pm\infty$, non si può prevedere nulla. In tali casi si dice che il limite del quoziente si presenta in una delle seguenti *forme indeterminate*

$$\frac{0}{0}\,, \quad \frac{+\infty}{+\infty}\,, \quad \frac{+\infty}{-\infty}\,, \quad \frac{-\infty}{+\infty}\,, \quad \frac{-\infty}{-\infty}\,,.$$

Tutti i risultati esposti valgono anche per i limiti sinistri (rispettivamente, destri) nel caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione a sinistra (rispettivamente, a destra), purché si sostituiscano gli intorni di x_0 con intorni sinistri (rispettivamente, destri) tanto negli enunciati quanto nelle dimostrazioni.

Si considera infine il caso delle funzioni composte.

Teorema 4.5.6 (Limite delle funzioni composte)
Siano X e Y sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ed $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali tali che $f(X) \subset Y$. Sia x_0 un punto di accumulazione per X e si supponga che:

1. *$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, con $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per Y.*
2. *Esiste un intorno J_0 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \neq y_0$.*
3. *$\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$, con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora, la funzione composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ è dotata di limite in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell \, .$$

Dimostrazione. Sia I un intorno di ℓ. Dall'ipotesi 3. segue l'esistenza di un intorno I' di y_0 tale che, per ogni $y \in Y \cap I' \setminus \{y_0\}$, $g(y) \in I$. Poiché $I' \in \mathcal{I}(y_0)$, dall'ipotesi 1. esiste un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in I'$. Si consideri ora l'intorno $J = J_0 \cap J_1$ di x_0, dove J_0 è l'intorno previsto nell'ipotesi 2. Per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, si ha $f(x) \in Y$ (in quanto $f(X) \subset Y$), $f(x) \in I'$ (in quanto $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$) e, infine, $f(x) \neq y_0$ (in quanto $x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\}$). Quindi, risulta $f(x) \in Y \cap I' \setminus \{y_0\}$ e conseguentemente $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in I$. Dall'arbitrarietà dell'intorno I di ℓ, segue la tesi. □

L'ipotesi 2. è automaticamente soddisfatta se $y_0 = \pm\infty$, e non è necessaria nel caso in cui $y_0 \in Y$ e $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$ (cioè, come si vedrà in seguito, g è continua in y_0).

Formalmente, applicare il teorema precedente significa effettuare la sostituzione $y = f(x)$ e tener conto del fatto che $y \to y_0$ quando $x \to x_0$. Tale modo di esprimersi è molto frequente nelle applicazioni; tuttavia, bisogna sempre verificare la condizione $y \neq y_0$ in un intorno di x_0.

4.6 Limiti delle funzioni monotone

Le funzioni monotone hanno proprietà molto interessanti riguardo l'esistenza dei limiti sinistri e destri, evidenziate dal risultato seguente.

Teorema 4.6.1 (Teorema sul limite delle funzioni monotone)
Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione a sinistra (rispettivamente, a destra) per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale monotona. Allora, esiste il limite sinistro (rispettivamente, destro) di f in x_0 si ha:

1. *Se f è crescente:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in X,\ x<x_0} f(x)\ , \quad \left(\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in X,\ x>x_0} f(x)\ \right);$$

2. *Se f è decrescente:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf_{x\in X,\ x<x_0} f(x)\ , \quad \left(\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup_{x\in X,\ x>x_0} f(x)\ \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Si considera per brevità solamente il caso 1. in cui f è crescente (il caso 2. può essere dedotto dal caso 1. applicato alla funzione $-f$). Si ponga, per brevità, $\ell = \sup_{x\in X,\ x<x_0} f(x)$ (rispettivamente, $\ell = \inf_{x\in X,\ x>x_0} f(x)$. Si supponga dapprima che $\ell = +\infty$ (rispettivamente, $\ell = -\infty$). Dunque, in questo caso la funzione non è limitata superiormente a sinistra di x_0. Per dimostrare che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, si fissi $M \in \mathbb{R}$; da quanto osservato, M non può essere un maggiorante di $f(X\cap]-\infty, x_0[)$ e quindi deve esistere $x_1 \in X$, $x_1 < x_0$ tale che $M < f(x_1)$. Per ogni $x \in X\cap]x_1, x_0[$, dalla crescenza di f, si ha $M < f(x_1) \le f(x)$. Ciò, per l'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$, dimostra che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Nel caso rispettivo la funzione f non è limitata inferiormente a destra di x_0. Pertanto, fissato $M \in \mathbb{R}$, esso non può essere un minorante di $f(X\cap]x_0, +\infty[)$ e quindi deve esistere $x_1 \in X$, $x_0 < x_1$ tale che $f(x_1) < M$. Allora, per ogni $x \in X\cap]x_0, x_1[$, si ha, dalla crescenza di f, $f(x) \le f(x_1) < M$. Per l'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$, deve essere $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Si supponga ora $\ell \in \mathbb{R}$ e si fissi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; dalla seconda proprietà dell'estremo superiore, esiste $x_1 \in X$, $x_1 < x_0$ tale che $\ell - \varepsilon < f(x_1)$. Per ogni $x \in X\cap]x_1, x_0[$, si ha da un lato $x_1 < x$ per cui, dalla crescenza di f, $\ell-\varepsilon < f(x_1) \le f(x)$ e dall'altro $x < x_0$ per cui, dalla prima proprietà dell'estremo superiore, $f(x) \le \ell < \ell+\varepsilon$. Quindi, per ogni $x \in X\cap]x_1, x_0[$, si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ e ciò, per l'arbitrarietà di $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, comporta $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

Nel caso rispettivo si procede in modo analogo usando le proprietà dell'estremo inferiore. □

In ogni caso, il teorema precedente garantisce l'esistenza del limite sinistro e destro per una funzione monotona in tutti i punti reali di accumulazione a sinistra e a destra.

Se, invece, il punto x_0 è di accumulazione sia a sinistra che a destra, si ha il seguente risultato.

Corollario 4.6.2 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione sia a sinistra che a destra per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale monotona. Allora, esistono i limiti sinistro e destro di f in x_0 e si ha*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}\ , \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}\ . \tag{4.6.1}$$

Inoltre, se f è crescente (rispettivamente, decrescente) si ha:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \left(\textit{rispettivamente},\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ge \lim_{x\to x_0^+} f(x)\ \right), \tag{4.6.2}$$

e in più, se $x_0 \in X$, si ha anche

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le \; f(x_0) \; \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{4.6.3}$$
$$(\textit{rispettivamente},\; \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ge \; f(x_0) \; \ge \lim_{x\to x_0^+} f(x)\ ).$$

Dimostrazione. . Si supponga f crescente. Per ogni $x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 < x_0 < x_2$ (tali elementi esistono in quanto x_0 è di accumulazione sia a sinistra che a destra), si ha $f(x_1) \le f(x_2)$; dall'arbitrarietà di $x_1 \in X$, $x_1 < x_0$, risulta anche $\sup_{x\in X,\ x<x_0} f(x) \le f(x_2)$ (conseguentemente tale estremo superiore è reale) e da quest'ultima, essendo $x_2 \in X$, $x_0 < x_2$ arbitrario, segue $\sup_{x\in X,\ x<x_0} f(x) \le \inf_{x\in X,\ x>x_0} f(x)$. Dal Teorema 4.6.1 segue la (4.6.2). Infine, se $x_0 \in X$, si può osservare che, per ogni $x \in X$, $x < x_0$, si ha $f(x) \le f(x_0)$ da cui la prima delle (4.6.3) e inoltre, per ogni $x \in X$, $x_0 < x$, si ha $f(x_0) \le f(x)$ da cui la seconda delle (4.6.3). □

Ovviamente, anche se è garantita sia l'esistenza del limite sinistro che destro in un punto x_0 di accumulazione sia a sinistra che a destra, non si può dire nulla per quanto riguarda l'esistenza del limite in x_0; il limite esiste se e solo se i limiti da destra e da sinistra coincidono e, in tal caso, dalla (4.6.3) segue anche

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ . \tag{4.6.4}$$

Quindi una funzione monotona definita in un punto x_0 di accumulazione sia a sinistra che a destra, non può avere in x_0 un limite diverso dal valore $f(x_0)$. Se il punto x_0 non è di accumulazione sia a sinistra che a destra, questo non vale più; ad esempio, basta considerare la funzione crescente

$$f(x) = \begin{cases} x-1\ , & x \in [-1, 0[\ ; \\ 0\ , & x = 0\ , \end{cases}$$

nel punto $x_0 = 0$.

Nel caso in cui $x_0 = \pm\infty$, si ha il seguente risultato analogo al Teorema 4.6.1; la dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 4.6.1 e viene omessa per brevità.

Teorema 4.6.3 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente) ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale monotona. Allora esiste il limite di f in $+\infty$ (rispettivamente, in $-\infty$) e si ha:*

1. *Se f è crescente:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x\in X} f(x) \quad (\textit{rispettivamente},\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{x\in X} f(x)\ ).$$

2. Se f è decrescente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{x\in X} f(x) \quad (\textit{rispettivamente}, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup_{x\in X} f(x)\ ).$$

In Figura 4.1 è rappresentata una funzione decrescente definita in tutto $\mathbb{R}$ che ha limite $+\infty$ in $-\infty$ ed un limite reale ℓ in $+\infty$.

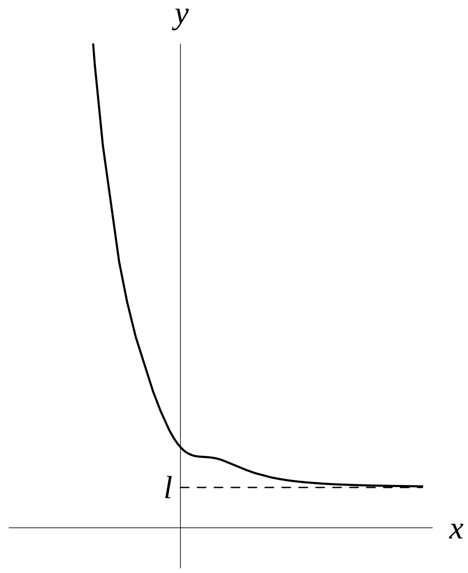

Figura 4.1: *Limiti di una funzione monotona.*

4.7 Limiti delle funzioni elementari

Visto il carattere locale del limite, il Teorema 4.6.1 studiato nella sezione precedente può essere applicato più in generale a funzioni monotone in un intorno sinistro o destro del punto x_0 nel caso in cui x_0 sia reale oppure in un intorno di $+\infty$ o $-\infty$ nel caso in cui $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$.

In tal modo è possibile calcolare i limiti delle funzioni elementari nei punti di accumulazione per l'insieme di definizione. Si elencano ora brevemente tali limiti.

4.7.1 Funzioni potenza ad esponente intero positivo

Si consideri la funzione potenza $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

- Se $x_0 = +\infty$, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

- Se $x_0 = -\infty$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} = +\infty$ se n è pari e $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ se n è dispari.

Basta infatti applicare quanto osservato preliminarmente osservando che n è dispari la funzione potenza è strettamente crescente, mentre n è pari è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ e strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$. In tutti i punti reali, si possono così ricavare i limiti sinistri e destri; poiché questi coincidono, si ottiene il limite della funzione.

Lo stesso tipo di ragionamento si applica anche nei casi che seguono.

4.7.2 Funzioni radice

Si consideri la funzione radice $f_{1/n}$. Allora:

- Se $x_0 \in \mathbb{R}_+$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} x^{1/n} = x_0^{1/n}$. Se n è dispari, la stessa uguaglianza vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Se $x_0 = +\infty$, si ha $\lim x \to +inftyx^{1/n} = +\infty$. Se n è dispari, si ha anche $\lim x \to -inftyx^{1/n} = -\infty$.

4.7.3 Funzioni potenza ad esponente intero negativo

Si consideri la funzione potenza ad esponente intero negativo $f_{-n} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Allora

- Se $x_0 \in \mathbb{R}^*$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} 1/x^n = 1/x_0^n$

- Se $x_0 = 0$ ed n è pari, si ha $\lim\limits_{x \to 0} 1/x^n = +\infty$. Se n è dispari, si ha $\lim\limits_{x \to 0^+} 1/x^n = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0_-} 1/x^n = -\infty$; conseguentemente, il limite $\lim\limits_{x \to 0} 1/x^n$ non esiste

- Se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, si ha $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1/x^n = 0$.

4.7.4 Funzioni potenza ad esponente reale

Si consideri la funzione potenza ad esponente reale $f_r : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ con $r \in \mathbb{R}$. Allora

- Se $x_0 \in \mathbb{R}^*_+$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} x^r = x_0^r$.
- Se $x_0 = 0$ ed $r > 0$, si ha $\lim\limits_{x \to 0} x^r = 0$ $(= x_0^r)$. Se $r < 0$, si ha $\lim\limits_{x \to 0} x^r = +\infty$.
- Se $x_0 = +\infty$ ed $r > 0$, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$. Se $r < 0$, si ha invece $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$.

4.7.5 Funzioni esponenziali

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e si consideri la funzione esponenziale $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.
- Se $x_0 = +\infty$ ed $a > 1$, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Se $0 < a < 1$, si ha invece $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- Se $x_0 = -\infty$ ed $a > 1$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

4.7.6 Funzioni logaritmo

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e si consideri la funzione logaritmo $\log_a : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$. Allora

- Se $x_0 \in \mathbb{R}^*_+$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.
- Se $x_0 = 0$ ed $a > 1$, si ha $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$. Se $0 < a < 1$, si ha invece $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$.
- Se $x_0 = +\infty$ ed $a > 1$, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$. Se $0 < a < 1$, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

4.7.7 Funzioni trigonometriche

Per quanto riguarda le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente, la proprietà di monotonia non è verificata in un intorno di alcuni punti ed il corrispondente limite non esiste. Per il momento ci si limita a segnalare tale eventualità, in quanto la relativa dimostrazione sarà molto più semplice come applicazione della caratterizzazione sequenziale del limite (Teorema 5.1.3).

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, il limite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ non esiste.
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$. Se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, il limite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x$ non esiste.
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \tan = \tan x_0$. Se $x_0 = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, il limite non esiste e si ha $\lim\limits_{x \to \pi/2 + k\pi^-} \tan x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2 + k\pi^+} \tan x = -\infty$. Infine, se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, il limite della tangente in x_0 non esiste.
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0$. Se $x_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, il limite non esiste e si ha $\lim\limits_{x \to k\pi^-} \cot x = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to k\pi^+} \cot x = +\infty$. Infine, se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, il limite della cotangente in x_0 non esiste.

4.7.8 Funzioni trigonometriche inverse

Infine, si considerano le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente. Allora

- Se $x_0 \in [-1, 1]$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$.
- Se $x_0 \in [-1, 1]$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$.
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$. Se $x_0 = +\infty$, allora $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$ e infine, se $x_0 = -\infty$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$.
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} x_0$. Se $x_0 = +\infty$, allora $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$ e infine, se $x_0 = -\infty$, si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

4.8 Limiti di polinomi e funzioni razionali

Le operazioni sui limiti applicate alle funzioni elementari consentono il calcolo dei limiti nella maggior parte dei casi in cui non si presentano forme indeterminate.

Conoscendo i limiti delle funzioni potenza ad esponente intero positivo, è immediato calcolare il limite di un polinomio. Tale limite ha senso per ogni $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ in quanto i polinomi sono definiti in tutto $\mathbb{R}$.

Sia $P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, un polinomio di grado n. Allora

1. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

2. Se $x_0 = \pm\infty$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty\ , & \text{se } a_n > 0\ ; \\ -\infty\ , & \text{se } a_n < 0\ ; \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty\ , & \text{se } (-1)^n a_n > 0\ ; \\ -\infty\ , & \text{se } a_n < 0\ ; \end{cases}$$

(si osservi che $(-1)^n a_n > 0$ se n e pari e $a_n > 0$ oppure se n è dispari e $a_n < 0$). L'ultima uguaglianza si ottiene facilmente mettendo in evidenza il termine $a_n x^n$ (si ottiene il limite del prodotto di due funzioni di cui una è un infinito e l'altra tende ad 1).

Un altro caso abbastanza semplice e di notevole interesse è quello delle funzioni razionali.

Siano $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di grado n e $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di grado m aventi la forma

$$P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n\ , \quad Q(x) = b_0 + \cdots + b_m x^m\ ,$$

con $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

Posto $X = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$, si considera la *funzione razionale* $R : X \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X$,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Poiché X differisce da $\mathbb{R}$ al più per un numero finito di punti, tutti gli elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ sono di accumulazione per X.

Ha senso quindi considerare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed anche per $x_0 = \pm\infty$.

Di seguito, si considerano i diversi casi che si possono presentare, che si ottengono tutti applicando i teoremi sul limite della funzione reciproca (Teorema 4.5.5) e sul prodotto (Teoremi 4.5.3–4.5.4) di due funzioni.

1. Caso $x_0 \in X$. In questo caso si ha $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) \neq 0$ e conseguentemente
$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \ .$$

2. Caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) = 0$. Si suppone, inoltre, che $P(x_0) \neq 0$ in quanto, se fosse anche $P(x_0) = 0$, il rapporto $P(x)/Q(x)$ si potrebbe scrivere nella forma
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-x_0)\cdot P_1(x)}{(x-x_0)\cdot Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \ ,$$
con P_1 e Q_1 polinomi opportuni di grado $n-1$ e rispettivamente $m-1$ ed il limite si ricondurrebbe a quello del rapporto tra i polinomi P_1 e Q_1; tale procedimento si potrebbe reiterare fino a trovare almeno uno dei due polinomi diverso da 0 in x_0.

   Premesso ciò, nel caso $Q(x_0) = 0$ e $P(x_0) \neq 0$, la funzione reciproca tende a 0 e quindi, per il Teorema 4.5.5, è necessario studiare il segno del rapporto $P(x)/Q(x)$ in un intorno del punto x_0. Poiché una funzione razionale cambia segno al più un numero finito di volte (in quanto così si comportano i polinomi al numeratore ed al denominatore), si hanno i seguenti casi possibili:

   i) Se in un intorno del punto x_0, il rapporto $P(x)/Q(x)$ è positivo, si ha
$$\lim_{x_tox_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \ .$$

   ii) Se in un intorno del punto x_0, il rapporto $P(x)/Q(x)$ è negativo, si ha
$$\lim_{x_tox_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty \ .$$

   iii) Se il rapporto $P(x)/Q(x)$ cambia segno nel punto x_0, il limite $\lim_{x_tox_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ non esiste.

In questo caso, tuttavia, il rapporto $P(x)/Q(x)$ è necessariamente positivo in un intorno sinistro di x_0 e negativo in un intorno destro di x_0 oppure viceversa (in quanto una funzione razionale può cambiare segno un numero finito di volte) e quindi si ha

$$\lim_{x_t o x_0^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \ , \ \lim_{x_t o x_0^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{x_t o x_0^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty \ , \ \lim_{x_t o x_0^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \ .$$

3. Caso $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$. Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore del rapporto $P(x)/Q(x)$ il termine di grado massimo ($a_n x^n$ e $b_m x^m$, rispettivamente), si ottiene facilmente

$$\lim_{x_t o \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x_t o \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

e da quest'ultima uguaglianza è immediato ottenere il risultato del limite (si evita per brevità di scrivere tutti i possibili sottocasi).

4.9 Limiti notevoli

I teoremi sui limiti esaminati fino ad ora non sono applicabili nel caso in cui si presenti una forma indeterminata; le forme indeterminate che si presentano solitamente possono essere riassunte come segue:

- Forme indeterminate della somma di due funzioni: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$;
- Forme indeterminate del prodotto di due funzioni: $0 \cdot (\pm\infty)$, $\pm\infty \cdot 0$;
- Forme indeterminate del quoziente di due funzioni: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;
- Forme indeterminate delle potenze di due funzioni: [1] 0^0, $+\infty^0$, $1^{\pm\infty}$.

[1] Tali forme indeterminate derivano dai limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ (con f strettamente positiva) che si possono scrivere al modo seguente: $\lim_{x\to x_0} \exp(g(x) \log f(x))$. Pertanto, tali limiti vengono ricondotti al limite del prodotto $\lim_{x\to x_0} g(x) \log f(x)$ per il quale si possono presentare le forme indeterminate del prodotto viste sopra; tenendo presente che $\log f(x)$ tende a $+\infty$ in $+\infty$, a $-\infty$ in 0 ed a 0 in 1, le forme indeterminate del prodotto si presentano nei seguenti casi: 1) f tende a 0 e g tende a 0; 2) f tende a $+\infty$ e g tende a 0; 3) f tende a 1 e g tende a $\pm\infty$.

I tentativi che si possono effettuare per risolvere un limite che si presenta in una delle forme indeterminate elencate sopra sono di vario genere; tra i metodi più semplici vi sono l'utilizzo dei limiti notevoli, oppure della teoria degli infinitesimi e degli infiniti, della regola di L'Hôpital e della formula di Taylor.

Nella presente sezione ci si occupa dei limiti notevoli, mentre nella prossima della teoria degli infinitesimi e degli infiniti.

L'utilizzo della regola di l'Hôpital e della formula di Taylor richiede invece la conoscenza del calcolo differenziale.

Si elencano ora i limiti notevoli più comunemente utilizzati.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

   Infatti, sia $0 < x < \pi/2$. Da semplici considerazioni geometriche, si ha: $\sin x \le x \le \tan x$ (infatti, il triangolo OAP di area $\sin x/2$ è contenuto nel settore circolare OAP di area $\pi x/(2\pi) = x/2$ il quale a sua volta è contenuto nel triangolo OAQ di area $\tan x/2$ e confrontare le rispettive aree; vedasi la Figura 4.2).

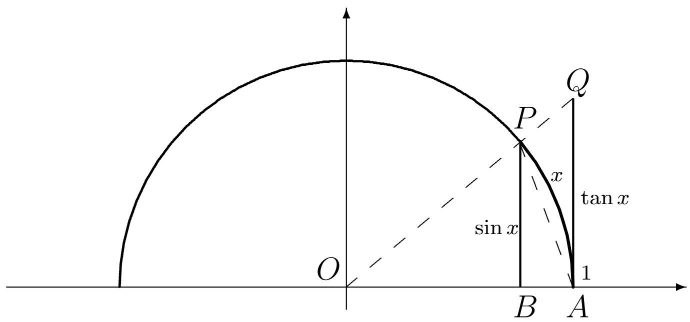

Figura 4.2: *Limite notevole sinx/x in* 0.

   Considerando i reciproci delle diseguaglianze precedenti e moltiplicando tutti i membri per $\sin x$, si ha $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$. Poichè le funzioni a primo, secondo e terzo membro sono tutte pari, la stessa diseguaglianza vale se $-\pi/2 < x < 0$. Dal primo teorema di confronto (Teorema 4.4.1), tenendo presente che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ (vedasi la Sezione 4.7.7, si deduce allora la tesi.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$

   Infatti, tenendo presente il limite 1. precedente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

   Infatti, tenendo presente il limite 1. precedente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

   Infatti, posto $y = \arcsin x$ (da cui $x = \sin y$) e osservato che $y \to 0$ per $x \to 0$ e inoltre che $\arcsin x \neq 0$ per ogni $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, si può applicare il teorema sul limite delle funzioni composte (Teorema 4.5.6) dal quale si ricava $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$.

   Si procede come nel caso precedente ponendo $y = \arctan x$;dal teorema sul limite delle funzioni composte (Teorema 4.5.6) si ottiene $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{y}{\tan y} = 1$.

Come si può facilmente constatare, i limiti notevoli 2.–5. si ottengono tutti dal limite notevole 1. applicando i teoremi sulle varie operazioni sui limiti. Si studia ora un altro limite notevole dal quale sarà possibile derivarne diversi altri.

Innanzitutto, è necessaria una breve premessa riguardante i limiti di successioni che saranno approfonditi nel capitolo seguente.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Essa può essere riguardata come una funzione reale definita in $\mathbb{N}$; poiché non vi sono punti di accumulazione reali per $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, l'unico punto in cui ha senso considerare il limite di una successione è $+\infty$. In conformità con le notazioni assunte per le successioni, tale limite, se esiste, viene denotato con il simbolo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \,.$$

Ovviamente, tutti i teoremi visti sui limiti di funzioni valgono anche per i limiti di successioni. In particolare, dal teorema sul limite delle funzioni monotone, si ottiene che ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente (rispettivamente, decrescente) è dotata di limite e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{(rispettivamente, } \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{).}$$

In particolare, si è visto che la successione $((1 + 1/n)^n)_{n\geq 1}$, utilizzata per definire il numero di Nepero, è strettamente crescente (Proposizione 1.6.2) e pertanto, da quanto osservato, si ottiene il seguente limite notevole.

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ .$

   Come per il limite notevole 1., anche ora se ne possono ottenere altri derivati.

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$

   La differenza rispetto al limite precedente consiste nel fatto che ora la funzione di cui si considera il limite $x \mapsto (x+1/x)^x$ è definita in $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ e non solo sui numeri naturali.

   Per ogni $x \geq 1$, tenendo presente che $[x] \leq x < [x]+1$ ($[x]$ denota la *parte intera* di x), si ha

   $$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

   e inoltre, dal limite precedente,

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}} = e\ ,\end{aligned}$$

   $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\ .$$

   Allora, dal primo teorema di confronto per i limiti (Teorema 4.4.1 si ottiene la tesi.

8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$

   Si osserva innanzitutto che ha senso considerare tale limite in quanto per $x < -1$, la base $1 + 1/x$ è strettamente positiva. Si ha poi, per ogni $x < -1$,

   $$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(\frac{|x|-1+1}{|x|-1}\right)^{|x|} \\ &= \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|-1}\left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)\ .\end{aligned}$$

   e quindi, posto $y = |x|-1$ e osservato che $y \to +\infty$ per $x \to -\infty$, dal limite notevole precedente si ottiene

   $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\ .$$

9. Per ogni $a \neq 0$: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

   Infatti, se $a > 0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{x/a}\right)^a \lim_{y\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^a = e^a ,$$

   dove si è posto $y = x/a$.

   Se $a < 0$, si procede come sopra tenendo presente che la sostituzione $y = x/a$ comporta $y \to \mp\infty$.

10. Per ogni $c \neq 0$: $\lim_{x\to 0}(1+cx)^{1/x} = e^c$.

    Infatti, considerando separatamente i limiti da sinistra e da destra e ponendo $y = 1/x$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(1+cx)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{c}{y}\right)^y = e^c ,$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+cx)^{1/x} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{c}{y}\right)^y = e^c ,$$

11. Per ogni $c \neq 0$ e per ogni $a > 0$, $a \neq 1$: $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+cx)}{x} = \frac{c}{\log a}$. In particolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+cx)}{x} = c$.

    Infatti, dal limite notevole precedente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+cx)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+cx)^{1/x} = \log_a e^c = c\cdot\log_a e = \frac{c}{\log a} .$$

12. Per ogni $a > 0$, $a \neq 1$: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$. In particolare: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

    Ponendo $y = a^x - 1$, si ha $x = log_a(1+y)$ e quindi dal limite notevole precedente e dal teorema sul limite della funzione reciproca (Teorema 4.5.5), si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a 1+y} = \log a .$$

13. Per ogni $a \neq 0$: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

    Si ha, infatti,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{\log(1+x)}\,\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{\log(1+x)} .$$

A questo punto, posto $y = (1+x)^a - 1$, si ricava $1+y = (1+x)^a$ da cui $\log(1+y) = a \cdot \log(1+x)$; allora, dal teorema sul limite della funzione reciproca (Teorema 4.5.5), segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{\log(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{a\, y}{\log(1+y)} = a$$

e da ciò la tesi.

4.10 Infinitesimi ed infiniti

La teoria che si vuole esporre nella presente sezione risulta utile per risolvere gran parte dei limiti in cui compare una forma indeterminata ed in cui non possono essere utilizzati direttamente i teoremi sui limiti studiati fino ad ora.

Si considera fissato in tutto il seguito un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per X.

Inoltre, tutte le funzioni reali $f : X \to \mathbb{R}$ prese in considerazione verificano la condizione seguente

$$\exists\ J_0 \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall\ x \in X \cap J_0 \setminus \{x_0\} :\ f(x) \neq 0\ . \tag{4.10.1}$$

Sia allora $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale, si dice che f è un *infinitesimo* (rispettivamente, un *infinito*) in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{(rispettivamente, } \lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty\ ). \tag{4.10.2}$$

Pertanto, una funzione f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 se e solo se la funzione reciproca $1/f$ è un infinito (rispettivamente, un infinitesimo) in x_0 (ha senso considerare la funzione reciproca almeno in un intorno del punto x_0 a causa dell'ipotesi (4.10.1)).

La definizione successiva è alla base delle considerazioni svolte nella presente sezione. Per comodità vengono considerate funzioni definite in uno stesso insieme X, anche se per il carattere locale del limite, si potrebbe supporre che le funzioni in esame siano definite in insiemi aventi la stessa intersezione con un intorno di x_0 (privato al più del punto x_0).

Definizione 4.10.1 *Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ due infinitesimi (rispettivamente, infiniti) in x_0. Si dice che:*

1. *f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine maggiore di g se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0 \quad \textit{rispettivamente},\ = +\infty\ ). \tag{4.10.3}$$

In tal caso si scrive

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) > \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) \ .$$

2. *f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine minore di g se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \quad \textit{rispettivamente}, \ = 0 \ ). \tag{4.10.4}$$

In tal caso si scrive

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) < \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) \ .$$

3. *f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 dello stesso ordine di g (oppure che f e g sono infinitesimi (rispettivamente, infiniti) dello stesso ordine in x_0) se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell \in \mathbb{R}^*_+ \ . \tag{4.10.5}$$

Se, in più, è verificata la condizione

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ , \tag{4.10.6}$$

allora f e g si dicono equivalenti in x_0. Per denotare la circostanza in cui f e g siano infinitesimi (rispettivamente, infiniti) dello stesso ordine in x_0 si usa la scrittura

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) = \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) \ ,$$

mentre per indicare il fatto che f e g sono infinitesimi (rispettivamente, infiniti) equivalenti in x_0 si scrive

$$f(x) \sim g(x) \ , \quad x \to x_0 \qquad \textit{oppure } f(x) \operatorname*{equiv}_{x\to x_0} g(x) \ .$$

4. *f e g non sono confrontabili in x_0 se non verificano nessuna delle condizioni precedenti.*

Osservazione 4.10.2 Se si suppone che f e g siano due infinitesimi (rispettivamente, infiniti) in x_0 aventi lo stesso ordine e se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}^* , \tag{4.10.7}$$

allora la funzione $f(x)$ è equivalente in x_0 alla funzione $\ell \cdot g(x)$

Bisogna osservare, tuttavia, che la condizione (4.10.5) non comporta, in generale, l'esistenza del limite (4.10.7). Ad esempio, la funzione $(-1)^{[1/x]}/x$ è un infinito in 0 dello stesso ordine di $1/x$, ma le due funzioni non sono equivalenti in 0 (infatti, il limite del rapporto delle due funzioni non esiste mentre in valore assoluto tende ad 1).

Le definizioni assunte fino ad ora consentono di confrontare tra loro gli infinitesimi e gli infiniti in un punto; il passo successivo è ora quello di attribuire un valore numerico ad alcuni infinitesimi ed infiniti che saranno presi come campione, in modo da poter confrontare ogni altro infinitesimo o infinito con tali valori numerici. Le funzioni più semplici che conviene considerare come infinitesimi ed infiniti campione sono precisate di seguito.

Definizione 4.10.3 *Sia $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$. Si definisce infinitesimo (rispettivamente, infinito) campione in x_0 di ordine α, la funzione*

$$\begin{array}{lll} |x-x_0|^\alpha , & (\textit{rispettivamente, } \dfrac{1}{|x-x_0|^\alpha}), & \textit{se } x_0 \in \mathbb{R} , \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha} , & (\textit{rispettivamente, } |x|^\alpha), & \textit{se } x_0 = \pm\infty . \end{array}$$

Inoltre, se $f : X \to \mathbb{R}$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0, si dice che f ha ordine maggiore di α (oppure minore, di α oppure uguale ad α) e si scrive

$$\operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) > \alpha \quad (\textit{oppure } \operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) < \alpha , \quad \operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) = \alpha)$$

se f ha ordine maggiore dell'infinitesimo (rispettivamente, dell'infinito) campione in x_0 di ordine α.

Infine, si dice che f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine arbitrariamente piccolo (oppure arbitrariamente grande) se f ha ordine minore (oppure maggiore) di α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

L'ordine di infinitesimo o di infinito non deve essere considerato come un numero reale; in molti casi si può solo dire che esso è maggiore o minore di un numero $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$, ma non esiste alcun numero $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ per cui l'ordine sia uguale ad α. Gli esempi più importanti da questo punto di vista sono la funzione logaritmo nei punti 0 e $+\infty$ e la funzione esponenziale nei punti $\pm\infty$. Si può dimostrare, infatti, il seguente importante risultato.

Proposizione 4.10.4 *Sia $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Allora:*

1. *La funzione logaritmo $\log_a$ è un infinito in 0 (da destra) di ordine arbitrariamente piccolo.*

2. *La funzione logaritmo $\log_a$ è un infinito in $+\infty$ di ordine arbitrariamente piccolo.*

3. *Se $a > 1$ (rispettivamente, se $0 < \alpha < 1$), la funzione esponenziale $\exp_a$ è un infinito (rispettivamente, un infinitesimo) in $+\infty$ di ordine arbitrariamente grande.*

4. *Se $a > 1$ (rispettivamente, se $0 < \alpha < 1$), la funzione esponenziale $\exp_a$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in $-\infty$ di ordine arbitrariamente grande.*

Si è preferito enunciare la proposizione precedente per la sua importanza nelle applicazioni. La sua dimostrazione, tuttavia, non viene trattata a questo punto in quanto sarà un immediata conseguenza della regola di L'Hôpital.

4.10.1 Operazioni con infinitesimi ed infiniti

Lo studio delle operazioni sugli infinitesimi ed infiniti è importante nello studio di un limite a causa della seguente *regola di sostituzione*.

Proposizione 4.10.5 (Regola di sostituzione)
Siano f_1, f_2, g_1 e g_2 infinitesimi (rispettivamente, infiniti) in x_0 e si supponga che

$$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\mathrm{equiv}} f_2(x)\ , \qquad g_1(x) \underset{x\to x_0}{\mathrm{equiv}} g_2(x)\ .$$

Allora, il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ esiste se e solo se esiste il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ e, in tal caso, i due limiti coincidono.

Dimostrazione. Ovvia, in quanto dalle ipotesi assunte, segue

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,\frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\ .$$

□

Si passa ora ad esaminare il comportamento della somma di due infinitesimi o infiniti.

Teorema 4.10.6 (Somma di due infinitesimi o infiniti)
Siano f e g due infinitesimi (rispettivamente, infiniti) in x_0. Allora:

1. *Se $\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) < \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x)$, allora la somma $f+g$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 e si ha*
$$f(x)+g(x) \operatorname*{equiv}_{x\to x_0} f(x) \quad (\textit{rispettivamente},\ f(x)+g(x) \operatorname*{equiv}_{x\to x_0} g(x)\ ).$$

2. *Se $\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) = \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x)$, e se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}^*_+$, $\ell \neq -1$, allora la somma $f+g$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 e si ha*
$$f(x)+g(x) \operatorname*{equiv}_{x\to x_0} (\ell+1)g(x)\ .$$

3. *Se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$, allora la somma $f+g$ è un infinitesimo in x_0 di ordine maggiore di quello degli infinitesimi f e g (rispettivamente, non è detto che $f+g$ sia un infinito in x_0; nel caso ciò accada, l'ordine di $f+g$ è minore di quello degli infiniti f e g).*

Dimostrazione. 1. Supposto $\operatorname{ord}_{x\to x_0} f(x) < \operatorname{ord}_{x\to x_0} g(x)$, si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1$$
(rispettivamente,
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}+1\right) = 1\ ),$$
e da ciò segue la tesi.
2. Nelle ipotesi previste, si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{(\ell+1)\,g(x)} = \frac{\ell}{\ell+1}+\frac{1}{\ell+1} = 1\ .$$
3. Infatti, se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$, si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = -1+1 = 0$$
e analogamente $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = -1+1 = 0$. □

Quindi la somma di due infinitesimi (rispettivamente, infiniti) non aventi lo stesso ordine in x_0, è equivalente all'infinitesimo di ordine minore (rispettivamente, all'infinito di ordine maggiore).

Inoltre, nel caso della differenza di due infinitesimi o infiniti equivalenti, si può prevedere il comportamento della somma nel caso in cui le due funzioni non siano equivalenti (vedasi la 2. del teorema precedente); se ciò accade, si può solo affermare la 3. del teorema precedente.

Teorema 4.10.7 (Prodotto di due infinitesimi o di due infiniti) *Siano f e g due infinitesimi (rispettivamente, due infiniti) in x_0. Allora, il prodotto $f \cdot g$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 avente ordine maggiore sia di f che di g in x_0.*

In particolare, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, si ha

$$\operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) \begin{smallmatrix} > \\ < \\ = \end{smallmatrix} \alpha \,, \quad \operatorname*{ord}_{x \to x_0} g(x) \begin{smallmatrix} > \\ < \\ = \end{smallmatrix} \beta \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) \begin{smallmatrix} > \\ < \\ = \end{smallmatrix} \alpha + \beta \,.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è un'ovvia conseguenza delle definizioni di ordine e di infinitesimi ed infiniti campione.

A titolo di esempio, si considera il caso in cui f sia un infinitesimo di ordine maggiore di α, g sia un infinitesimo di ordine maggiore di β ed il punto x_0 sia reale. In questo caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{|x - x_0|^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x - x_0|^{\alpha}} \; \frac{|g(x)|}{|x - x_0|^{\beta}} = 0 \,,$$

cioè $\operatorname{ord}_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) > \alpha + \beta$. □

In particolare, dal teorema precedente si deduce anche che f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine arbitrariamente piccolo e se g è un è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine minore di β per un certo $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, allora il prodotto $f \cdot g$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine arbitrariamente piccolo in x_0.

Analogamente, se f è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine arbitrariamente grande e se g è un è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine maggiore di β per un certo $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, allora il prodotto $f \cdot g$ è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 di ordine arbitrariamente grande in x_0.

Se, invece, vengono moltiplicati un infinitesimo ed un infinito, si ha il seguente risultato che si riconosce in maniera analoga.

Teorema 4.10.8 (Prodotto di un infinitesimo e di un infinito) *Siano f un infinitesimo e g un infinito in x_0. Si ha:*

1. *Se* $\operatorname{ord}_{x \to x_0} f(x) < \operatorname{ord}_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)}$, *allora $f \cdot g$ è un infinito in x_0 e si ha*

$$\operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) < \operatorname*{ord}_{x \to x_0} g(x) \,;$$

in particolare,

$$\operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) = \alpha \,, \quad \operatorname*{ord}_{x \to x_0} g(x) = \beta \qquad \Rightarrow \operatorname*{ord}_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \beta - \alpha \,.$$

2. *Se* $\operatorname{ord}_{x\to x_0} f(x) > \operatorname{ord}_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)}$, *allora* $f \cdot g$ *è un infinitesimo in* x_0 *e si ha*
$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) < \operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) ;$$
in particolare,
$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) = \alpha\,, \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) = \beta \qquad \Rightarrow \operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \alpha - \beta\,.$$

3. *Se* f *e* g *hanno lo stesso ordine in* x_0, *allora il prodotto* $f \cdot g$ *non è né infinitesimo né infinito in* x_0.

Lo studio del quoziente tra due infinitesimi e/o infiniti in x_0 deriva direttamente dai teoremi precedenti, tenendo presente che dividere per un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in $x_=$ equivale a moltiplicare per l'infinito (rispettivamente, infinitesimo) reciproco in x_0 (ciò vale anche per gli infinitesimi ed infiniti campione).

Osservazione 4.10.9 Nel caso in cui siano noti gli ordini di infinitesimo o di infinito in x_0 delle funzioni che figurano in un rapporto, si può utilizzare un metodo pratico abbastanza semplice per determinare l'ordine del rapporto. Innanzitutto si sceglie valutare l'ordine in termini di infinitesimi o infiniti in x_0. Nel primo caso si addizionano tutti gli ordini degli infinitesimi in x_0 che compaiono al numeratore e degli infiniti in x_0 che compaiono al denominatore e a tale numero si sottrae la somma degli ordini degli infiniti in x_0 che compaiono al numeratore e degli infinitesimi in x_0 che compaiono al denominatore. Se il numero così ottenuto è strettamente positivo, il rapporto sarà un infinitesimo in x_0 avente come ordine tale numero, se invece è strettamente negativo, il rapporto sarà un infinito in x_0 avente come ordine l'opposto di tale numero (l'ordine in un punto è sempre un numero strettamente positivo).

Nel secondo caso, si sceglie di valutare gli infiniti in x_0, si addizionano tutti gli ordini degli infiniti in x_0 che compaiono al numeratore e degli infinitesimi in x_0 che compaiono al denominatore e poi si sottrae la somma degli ordini degli infinitesimi in x_0 che compaiono al numeratore e degli infiniti in x_0 che compaiono al denominatore. Se si ottiene un numero strettamente positivo, il rapporto sarà un infinito in x_0 avente come ordine tale numero, se invece si ottiene un numero strettamente negativo, il rapporto sarà un infinitesimo in x_0 avente come ordine l'opposto di tale numero.

In altre parole, ad un infinitesimo di un certo ordine, viene attribuito un ordine di infinito opposto e analogamente, un infinito può essere riguardato come un infinitesimo di ordine opposto. Ad una funzione che nonè né infinitesima nè infinita, ma tende verso un numero reale (diverso da 0) in x_0, viene attribuito un ordine di infinitesimo e di infinito uguale a 0.

Tale metodo è basato naturalmente sui teoremi sul prodotto e sul quoziente di infinitesimi ed infiniti.

Infine, si esamina il caso delle funzioni composte.

Teorema 4.10.10 (Funzioni composte di infinitesimi o infiniti) *Siano X e Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali. Si supponga che $f(X) \subset Y$ e si consideri la funzione composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$. Siano, inoltre, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X e si supponga che $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, con $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per Y.*

Se la funzione g è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in y_0, allora la funzione composta è un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0. Inoltre, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$, si ha:

1. *Se $y_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} (f(x) - y_0) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \alpha\ , \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \beta \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(f(x)) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \alpha \cdot \beta\ .$$

2. *Se $y_0 = \pm\infty$:*

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} f(x) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \alpha\ , \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \beta \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(f(x)) \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \alpha \cdot \beta\ .$$

Dimostrazione. Il fatto che la funzione composta sia un infinitesimo (rispettivamente, un infinito) in x_0 segue direttamente dal Teorema 4.5.6 sul limite delle funzioni composte.

Per quanto riguarda la parte rimanente, si considera solo il caso $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ con

$$\operatorname*{ord}_{x\to x_0} (f(x) - y_0) = \alpha\ , \quad \operatorname*{ord}_{x\to x_0} g(x) = \beta\ ,$$

essendo la dimostrazione di tutti gli altri casi del tutto analoga.

Nelle ipotesi di sopra, si ha

$$\begin{aligned} \lim x \to x_0 \frac{|g(f(x))|}{|x - x_0|^{\alpha\cdot\beta}} &= \lim x \to x_0 \frac{|g(f(x))|}{|f(x) - y_0|^{\beta}} \frac{|f(x) - y_0|^{\beta}}{|x - x_0|^{\alpha\cdot\beta}} \\ &= \lim y \to y_0 \frac{|g(y))|}{|y - y_0|^{\beta}} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{|f(x) - y_0|}{|x - x_0|^{\alpha}} \right)^{\beta} = 1\ , \end{aligned}$$

e quindi la tesi è vera. $\square$