Capitolo 5

Successioni e serie numeriche

5.1 Limiti di successioni

Nella Sezione 4.9 del Capitolo 4, si è visto come la definizione generale di limite può essere applicata anche al caso delle successioni di numeri reali, potendo queste essere riguardate come funzioni reali definite in $\mathbb{N}$. Avendo $\mathbb{N}$ come unico punto di accumulazione $+\infty$, ha senso considerare il limite di una successione $(a_n)_{n\in N}$ solamente in $+\infty$; nel caso in cui tale limite esista, esso viene denotato con uno dei simboli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\ , \quad \lim_n a_n$$

e viene denominato il *limite della successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si può sottintendere "nel punto $+\infty$" in quanto ciò non dà luogo ad equivoci).

Più esplicitamente, una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che ammette un limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, viene denominata *regolare;*. Nel caso invece in cui non esista il limite, la successione si dice invece *non regolare* oppure *oscillante.* Una successione regolare che ha come limite un numero reale, si dice *convergente;* se, invece, ha come limite $+\infty$ oppure $-\infty$, essa viene denominata *divergente positivamente* oppure *divergente negativamente.*

La proprietà di una successione di essere convergente, divergente positivamente o negativamente oppure oscillante viene spesso definita come *carattere* della successione.

Esplicitamente, una successione $(a_n)_{n\in N}$ risulta

- convergente verso un numero reale ℓ se verifica la seguente condizione:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu :\ |a_n - \ell| < \varepsilon\ ;$$

- divergente positivamente se verifica la seguente condizione:

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu :\ a_n > M\ ;$$

- divergente negativamente se verifica la seguente condizione:

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu :\ a_n < M\ .$$

Ovviamente, il modo in cui è stato definito il limite di una successione consente di applicare tutti i risultati già visti per i limiti di una funzione nel punto $+\infty$. Tuttavia, alcuni di questi risultati assumono una forma particolare nel caso delle successioni ed altri possono essere espressi utilizzando le notazioni tipiche delle successioni. Pertanto, si passano brevemente in rassegna quei risultati che assumono una forma particolare nel cso delle successioni.

Uno dei risultati che può essere notevolmente migliorato nel caso delle successioni è quello che riguarda la locale limitatezza. Infatti, la convergenza di una successione comporta la sua limitatezza globale, come di seguito dimostrato.

Teorema 5.1.1 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora:*

1. **(Limitatezza delle successioni convergenti)**
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

2. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente positivamente (rispettivamente, divergente negativamente), allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente (rispettivamente, superiormente).*

Dimostrazione. 1) Si denoti con ℓ il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ si trova $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, si abbia $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$. Osservato che l'insieme $\{a_0, a_1, \dots, a_\nu\}$ è finito, si possono ora considerare i numeri $m = \min\{a_0, a_1, \dots, a_\nu, \ell - 1\}$, $M = \max\{a_0, a_1, \dots, a_\nu, \ell + 1\}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $m \leq a_n \leq M$ (ciò si riconosce facilmente distinguendo i casi in cui $n \leq \nu$ e $n \geq \nu$) e ciò completa la prima parte della dimostrazione.

2) Si supponga che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia divergente positivamente. Applicando la definizione di limite con $M = 0$, si trova $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, $a_n > 0$. Posto $m = \min\{a_0, a_1, \dots, a_\nu, 0\}$, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m \leq a_n$ e quindi la successione è limitata inferiormente. La dimostrazione del caso rispettivo è analoga. □

Un ulteriore risultato che conviene considerare è l'analogo del Teorema 4.6.3 sul limite delle funzioni monotone, che nel caso delle successioni si esprime come segue.

Teorema 5.1.2 (Teorema sul limite delle successioni monotone)
Ogni successione monotona $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali è regolare; precisamente, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente (rispettivamente, decrescente), si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\ , \quad (\textit{rispettivamente},\ \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\ ). \tag{5.1.1}$$

Inoltre, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è anche limitata, essa risulta convergente.

Dimostrazione. La prima parte della tesi segue dal Teorema 4.6.3. L'ultima parte deriva dalla (5.1.1) e dal fatto che se una successione è limitata, allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ (nel caso rispettivo, $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$). □

Ovviamente, per il carattere locale del limite, il teorema precedente continua a valere anche se si suppone che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia definitivamente crescente (rispettivamente, definitivamente decrescente); in questo caso, tuttavia, se $\nu \in \mathbb{N}$ è tale che $(a_n)_{n\geq\nu}$ sia crescente (rispettivamente, decrescente), la (5.1.1) deve essere sostituita con la seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\geq\nu} a_n\ , \quad (\text{rispettivamente},\ \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\geq\nu} a_n\ ).$$

Poiché per le successioni valgono teoremi analoghi a quelli visti per i limiti di funzioni, i limiti delle successioni possono spesso essere trattati e risolti nello stesso modo dei limiti di funzioni nel punto $+\infty$. Nel seguito, tuttavia, sarà possibile analizzare alcuni risultati specifici per le successioni. Prima di esaminarli, si studia la seguente caratterizzazione dell'esistenza del limite di una funzione mediante limite di successioni, che costituisce appunto un legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema 5.1.3 (Caratterizzazione sequenziale del limite)
Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

b) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $X \smallsetminus \{x_0\}$ (cioè, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \in X \smallsetminus \{x_0\}$) e se $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$.

Dimostrazione. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $X \smallsetminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$. Per dimostrare la b), si fissi un intorno arbitrario I di ℓ; dalla a), si può considerare un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \smallsetminus \{x_0\}$, si abbia $f(x) \in I$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$, in corrispondenza dell'intorno J di x_0, deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale

che, per ogni $n \geq \nu$, risulti $a_n \in J$. Allora, per ogni $n \geq \nu$, si ha $a_n \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ e conseguentemente $f(a_n) \in I$. Dall'arbitrarietà dell'intorno I di ℓ, segue la b).
b) $\Rightarrow$ *a)* Si supponga, per assurdo, che la a) sia falsa. Allora, deve esistere un intorno I di ℓ tale che, comunque si consideri un intorno J di x_0, deve esistere $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$ verificante la condizione $f(x) \notin I$. Si ponga ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \begin{cases} \left]x_0 - \dfrac{1}{n+1}, x_0 + \dfrac{1}{n+1}\right[\,, & \text{se } x_0 \in \mathbb{R}\ ; \\ ]n, +\infty[\,, & \text{se } x_0 = +\infty\ ; \\ ]-\infty, -n[\,, & \text{se } x_0 = -\infty\ . \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, J_nè un intorno di x_0 e quindi deve esistere $a_n \in X \cap J_n \setminus \{x_0\}$ tale che $f(a_n) \notin I$. Si consideri ora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$. Si riconosce facilmente che essa tende verso x_0; infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $|a_n - x_0| < 1/(n+1)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre $a_n > n$ oppure $a_n < -n$ se $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$. Allora, dalla b) segue che la successione $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ deve tendere verso ℓ e ciò è assurdo in quanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \notin I$. □

Osservazione 5.1.4 La caratterizzazione precedente viene spesso utilizzata per dimostrare che un limite assegnato non esiste. A tal fine si può procedere in vari modi:

1. Si trovano due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$, mentre $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell_1$ e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$.

   In questo caso il limite di f in x_0 non può esistere perché dal Teorema 5.1.3 dovrebbe essere da un lato uguale ad ℓ_1 e dall'altro ad ℓ_2 e ciò contraddice il teorema sull'unicità del limite.

2. Si trova una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ che verifica la condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$, mentre il $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ non esiste. In questo caso il limite di f in x_0 non può esistere altrimenti, dal Teorema 5.1.3, dovrebbe coincidere con il limite della successione $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Si trova una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ che verifica la condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ e per cui la successione $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente), mentre la funzione non è limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente) in alcun intorno di x_0. In questo caso, per la proprietà di limitatezza locale, il limite di f in x_0 potrebbe essere solamente $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$) e ciò comporterebbe, per il Teorema 5.1.3, che anche la successione $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dovrebbe essere divergente positivamente (rispettivamente,

negativamente) in contraddizione con quanto assunto. Le ipotesi sopra previste sono soddisfatte se si trova una successione di elementi di $X \smallsetminus \{x_0\}$ tendente verso x_0 e in cui il limite è reale (oppure la funzione è limitata) ed un'altra successione tendente verso x_0 di punti di accumulazione per X in ognuno dei quali la funzione è un infinito; in questo caso la contraddizione deriva dal fatto che avendo trovato una successione con un limite reale oppure in cui la funzione è limitata l'eventuale limite deve essere esso stesso reale; d'altra parte se vi è una successione di punti in ognuno dei quali la funzione non è limitata, la funzione non risulta limitata in alcun intorno di x_0 in contrasto con la proprietà di limitatezza locale (ad esempio, si consideri il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/(x\cos x)$ e le successioni $a_n = 2n\pi$ e $b_n = \pi/2 + n\pi$).

Si considera ora qualche esempio.

Esempi 5.1.5 Utilizzando il teorema precedente, si dimostra che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

non esiste.

Infatti, si considerino le successioni $(\pi/2 + 2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(3\pi/2 + 2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$, entrambe divergenti positivamente. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1\ , \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right) = -1$$

e quindi, per l'Osservazione 5.1.4, 1., il limite in esame non esiste.

Più in generale, l'esempio precedente dimostra che una funzione periodica non costante non ammette limite nei punti $+\infty$ e $-\infty$. Infatti, si consideri una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ periodica non costante di periodo $\omega > 0$ e siano $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si considerino le successioni $(x_1 + n\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_2 + n\omega)_{n\in\mathbb{N}}$; esse sono entrambe divergenti positivamente e inoltre $\lim_{n\to+\infty} f(x_1+n\omega) = f(x_1)$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_2 + n\omega) = f(x_2)$ con $f(x_1) \neq f(x_2)$; allora, per l'Osservazione 5.1.4, 1., il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non può esistere. Per quanto riguarda il punto $-\infty$, si procede in modo analogo considerando le successioni $(x_1 - n\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_2 - n\omega)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dal presente risultato si ricava in particolare che le funzioni trigonometriche sin, cos, tan e cot non ammettono limite nei punti $\pm\infty$.

2. Si studi il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{tg^2 x + 1}{x^2}\ .$$

Si consideri la funzione $f(x) := (tg^2 x+1)/x^2$ e la successione divergente negativamente $(-n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenendo presente che $\tan^2(-n\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse il limite assegnato, dovrebbe essere

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(-n\pi) = 0 \, .$$

Tuttavia, considerato un arbitrario intorno J di $-\infty$, esiste sicuramente $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\pi/2 + k\pi \in J$. Poiché $\lim_{x\to\pi/2+k\pi} |f(x)| = +\infty$, la funzione non è limitata in un intorno di $\pi/2 + k\pi$ e quindi in J. Per l'Osservazione 5.1.4, 3., il limite assegnato non può esistere.

▷ Si espongono ora alcuni risultati riguardanti la successione delle medie aritmetiche e quella delle medie geometriche di una successione assegnata. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali, la *successione delle medie aritmetiche* di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione $(A[a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definita ponendo

$$A[a_n] := \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \qquad (= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \,).$$

Inoltre, se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,[1] si può definire la successione $(G[a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ delle *medie geometriche* di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ponendo

$$G[a_n] : \sqrt[n+1]{a_0 \cdots a_n} \qquad (= \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} a_k} \,).$$

I risultati seguenti sono noti come teoremi di Cesàro.

Teorema 5.1.6 (Teorema di Cesàro sulla media aritmetica)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione regolare di numeri reali e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ il suo limite. Allora la successione $(A[a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ delle medie aritmetiche di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa regolare e tende verso ℓ.

Dimostrazione. Si supponga dapprima che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente, cioè che $\ell \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$; allora esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \ge \nu_1 : \ |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Poiché la successione $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu_1} |a_k - \ell|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0 in quanto il termine $\sum_{k=0}^{\nu_1} |a_k - \ell|$ è costante, esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \ge \nu_2 : \ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu_1} |a_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

[1] Ciò assicura che la successione delle medie geometriche non sia definitivamente nulla.

Allora, per ogni $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - \ell\right| &\le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k - \ell| \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu_1}|a_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\nu_1+1}^{n}|a_k - \ell| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1}(n-\nu_1)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue la tesi.

Si supponga ora che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia divergente positivamente e sia $M > 0$. Allora esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \ge \nu_1 : \; a_n > 4M \,.$$

Procedendo come prima, si può considerare $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \ge \nu_2 : \; \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{\nu_1} a_k\right| < M \,.$$

Allora, per ogni $n > \max\{2\nu_1 + 1, \nu_2\}$, si ha innanzitutto $(n-1)/2 \ge \nu_1$ da cui $n - \nu_1 \ge n - (n-1)/2 = (n+1)/2$ e pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu_1} a_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\nu_1+1}^{n} a_k \\
&\ge -\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{\nu_1} a_k\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\nu_1+1}^{n} a_k \\
&> -M + \frac{1}{n+1}(n-\nu_1)\,4M \\
&\ge -M + \frac{1}{n+1}\,\frac{n+1}{2}\,4M = -M + 2M = M \,.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $M > 0$, segue la tesi anche in questo caso.

Se la successione è divergente negativamente, si procede in maniera analoga e quindi la tesi è completamente dimostrata. □

Il risultato precedente non può essere invertito, nel senso che la successione delle medie aritmetiche può risultare regolare pur non essendolo la successione di partenza, come ad esempio per la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

In alcuni casi l'utilizzo del risultato precedente consente di studiare più agevolmente la regolarità di una successione assegnata.

Ad esempio, si consideri la successione $(logn!/n)_{n\ge 1}$; poiché $\log n! = \log n + \log(n-1) + \cdots + \log 2 + \log 1$, essa è la media aritmetica della successione $(logn)_{n\ge 1}$, la quale diverge positivamente; dal teorema precedente, segue pertanto che anche $(logn!/n)_{n\ge 1}$ è divergente positivamente.

Teorema 5.1.7 (Teorema di Cesàro sulla media geometrica)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione regolare di numeri reali strettamente positivi e sia

$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ il suo limite. Allora la successione $(G[a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ delle medie geometriche di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa regolare e tende verso ℓ.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga dapprima che $\ell \in]0,+\infty[$. Sia $0 < \varepsilon < 3$; poiché la successione $(a_n/\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso 1, esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n > \nu_1 :\ 1 - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{a_n}{\ell} < 1 + \frac{\varepsilon}{3}\ ;$$

da ciò segue, per ogni $n \geq \nu_1 + 1$,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n+1} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu_1} < \frac{a_{\nu_1+1}}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu_1} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n+1}$$

e quindi

$$1 - \frac{\varepsilon}{3} < \sqrt[n+1]{\frac{a_{\nu_1+1}}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}} < 1 + \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Anche la successione $\left(\sqrt[n+1]{a_0/\ell \cdots a_{\nu_1}/\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso 1 e quindi esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \geq \nu_2 :\ 1 - \frac{\varepsilon}{3} < \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_{\nu_1}}{\ell}} < 1 + \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Allora, per ogni $n \geq= \max\{\nu_1 + 1, \nu_2\}$, si ha

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) < \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_{\nu_1}}{\ell}}\ \sqrt[n+1]{\frac{a_{\nu_1+1}}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}} = \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}}$$

e analogamente

$$\sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^2\ .$$

Da ciò segue, essendo $\varepsilon < 3$,

$$\left|\sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}} - 1\right| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{9}\varepsilon^2 < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{9}3\varepsilon = \varepsilon\ .$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n+1]{a_0 \cdots a_n}}{\ell} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{\ell} \cdots \frac{a_n}{\ell}} = 1$$

e quindi la tesi nel caso in esame.

Si supponga ora $\ell = +\infty$ e sia $M > 0$. Allora esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 2M$ per ogni $n \geq \nu_1$. Poiché la successione $\left(\sqrt[n+1]{a_0/(2M) \cdots a_{\nu_1}/(2M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad 1, si può trovare $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu_2$,

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{2M} \cdots \frac{a_{\nu_1}}{2M}}\ - 1 < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ .$$

Allora, posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n \geq \nu$, si ha

$$\begin{aligned} M &= 2M \cdot \frac{1}{2} < 2M \cdot \sqrt[n+1]{\frac{a_0}{2M} \cdots \frac{a_{\nu_1}}{2M}} = \sqrt[n+1]{a_0 \cdots a_{\nu_1}}\ 2M(2M)^{-(\nu_1+1)/(n+1)} \\ &= \sqrt[n+1]{a_0 \cdots a_{\nu_1}}(2M)^{(n-\nu_1)/(n+1)} < \sqrt[n+1]{a_0 \cdots a_{\nu_1}}\ (a_n)^{(n-\nu_1)/(n+1)} \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $M > 0$, segue la tesi anche in questo caso.

Tenendo presente che gli elementi della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono strettamente positivi, resta da considerare solamente il caso in cui $\ell = 0$. Se ciò accade, si ha $\lim_{n\to+\infty} 1/a_n = +\infty$ e quindi, per il caso precedente,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{a_0}\cdots\frac{1}{a_{\nu_1}}} = +\infty\ ,$$

cioè $\lim_{n\to+\infty} 1/\sqrt[n+1]{a_0\cdots a_{\nu_1}} = +\infty$; considerando il limite della successione reciproca si ottiene quindi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{a_0\cdots a_{\nu_1}} = 0$ e la tesi è completamente dimostrata. □

Anche per le medie geometriche, il risultato precedente non può essere invertito, in quanto esistono successioni di numeri reali strettamente positivi che non sono regolari, ma per le quali le successioni delle medie geometriche lo sono.

▷ Ad esempio, si consideri il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$; il termine generale $\sqrt[n]{n!}$ è la media geometrica della successione $(n)_{n\geq 1}$ che è divergente positivamente. Dal Teorema 5.1.7, anche la successione $(\sqrt[n]{n!})_{n\geq 1}$ risulta divergente positivamente.

5.1.1 Successioni estratte

Come si è visto in precedenza molti risultati visti per le funzioni assumono una forma ed una terminologia particolare per le successioni; in accordo a ciò, si preferisce introdurre per le successioni il seguente concetto di successione estratta anzichè far ricorso a quello più generale di funzione composta.

Definizione 5.1.8 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ una successione strettamente crescente di numeri naturali: Allora la successione $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ viene denominata successione estratta di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Denotando la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e la successione $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ come funzione $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la successione estratta $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ risulta essere la funzione composta $a \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; tuttavia, nel caso delle successioni si richiede in più la stretta crescenza di $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in modo che le proprietà del limite della successione di partenza si conservino per le successioni estratte.

▷ Ad esempio, la successione la successione $\left(\frac{2n^2+2n+1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si ottiene come estratta dalla successione $\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, considerando la successione di interi strettamente crescente $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$.

▷ Si osserva che se $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n \leq k(n)$.

Infatti, se $n = 0$ la proprietà è vera e supposto che essa valga per $n \in \mathbb{N}$, dalla stretta crescenza si ha $k(n) < k(n+1)$ da cui $n+1 \leq k(n)+1 \leq k(n+1)$. □

Da tale semplice proprietà segue il comportamento del limite delle successioni estratte descritto nella proposizione successiva.

Proposizione 5.1.9 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione regolare di numeri reali. Allora, ogni successione estratta $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa regolare e si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k(n)} = \lim_{n\to+\infty} a_n \, .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e sia I un intorno di ℓ; allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in I$ per ogni $n \geq \nu$. Da quanto osservato per ogni $n \geq \nu$ si ha anche $k(n) \geq n \geq \nu$ e quindi $a_{k(n)} \in I$. Dall'arbitrarietà dell'intorno I di ℓ, segue la tesi. □

▷ Come conseguenza della Proposizione 5.1.9, tutte le successioni estratte di una successione regolare convergono verso lo stesso limite. Si deduce che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che ammette un'estratta non regolare oppure con due estratte regolari aventi limiti diversi, non può essere regolare. Questo metodo viene spesso utilizzato per dimostrare che il limite di una successione assegnata non esiste.

Ad esempio, si studi il limite della successione $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione regolare tendente ad un numero $\ell \neq 0$. Allora, considerando l'estratta corrispondente alla successione strettamente crescente $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$, si ottiene la successione $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ che tende verso ℓ; considerando invece l'estratta corrispondente alla successione strettamente crescente $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, si ottiene la successione $(-a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ che tende verso $-\ell$. Si deduce che il limite della successione assegnata non esiste in quanto $\ell \neq 0$.

5.1.2 Massimo e minimo limite

Se una successione non è regolare, si ricorre ad ulteriori strumenti che consentono di studiarne il comportamento, tra cui ad esempio il massimo e minimo limite, definiti come segue.

Si consideri una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se essa non è limitata superiormente, il suo massimo limite viene assunto, per definizione, uguale a $+\infty$ e analogamente, se essa non è limitata inferiormente, il suo minimo limite viene assunto uguale a $-\infty$.

Si supponga ora che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente); per ogni $k \in \mathbb{N}$, la successione estratta $(a_k)_{n\geq k}$ (ottenuta considerando gli indici $k(n) = k + n$) ha lo stesso comportamento della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si considerino le quantità

$$e''_k := \sup_{n\geq k} a_k \qquad \text{(rispettivamente, } e'_k := \inf_{n\geq k} a_k \text{).}$$

È immediato riconoscere che la nuova successione $(e''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente e quindi essa risulta regolare; il limite

$$\ell'' := \lim_{k\to+\infty} e''_k \qquad (= \inf_{k\in\mathbb{N}} e''_k)$$

viene denominato *massimo limite* della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e viene denotato con uno dei seguenti simboli

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n\ , \qquad \lim_{n\to+\infty}{}'' \ a_n\ , \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n\ .$$

Poichè $(e''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente, il massimo limite è sicuramente diverso da $+\infty$.

Nel caso rispettivo, la successione $(e'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente ed il suo limite

$$\ell' := \lim_{k\to+\infty} e'_k \qquad (= \sup_{k\in\mathbb{N}} e'_k)$$

viene denominato *minimo limite* della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e viene denotato con uno dei seguenti simboli

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n\ , \qquad \lim_{n\to+\infty}{}' \ a_n\ , \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\ a_n\ .$$

Poichè $(e'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, il minimo limite è sicuramente diverso da $-\infty$.

Il massimo ed il minimo limite sono unici ed a differenza del limite di una successione esistono sempre.

$\triangleright$ Nella proposizione successiva vengono enunciate le proprietà caratteristiche del massimo e minimo limite, alle quali conviene ricorrere nelle applicazioni.

Proposizione 5.1.10 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\ell = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ *(rispettivamente,* $\ell = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ *);*

b) *1)* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\ n \geq \nu:\ a_n < \ell + \varepsilon$
(rispettivamente, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\ n \geq \nu:\ \ell - \varepsilon < a_n$ *).*

2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq \nu$ t.c. $\ell - \varepsilon < a_n$
(rispettivamente, $\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq \nu$ t.c. $a_n < \ell + \varepsilon$ *).*

Dimostrazione. Si considera solamente il primo caso, essendo quello rispettivo del tutto analogo.
a)$\Rightarrow$ b) Poiché $\ell \in \mathbb{R}$, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è necessariamente limitata superiormente. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $e''_\nu < \ell+\varepsilon$; conseguentemente, dalla prima proprietà dell'estremo superiore si ha, per ogni $n \geq \nu$,

$a_n < \ell + \varepsilon$. Ciò dimostra la proprietà 1). Siano ora $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbb{N}$ fissati. Dalla prima proprietà dell'estremo inferiore, si ha $\ell - \varepsilon < e''_\nu$; conseguentemente, dalla seconda proprietà dell'estremo superiore si deduce l'esistenza di $n \geq \nu$ tale che $\ell - \varepsilon < a_n$.
b)$\Rightarrow$ a) Basta far vedere che ℓ verifica le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore della successione $(e''_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Infatti, sia $k \in \mathbb{N}$; dalla 2) della b), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq k$ e $\ell - \varepsilon < a_n$; da ciò segue $\ell - \varepsilon < \sup_{n\geq k} a_n = e''_k$ e quindi $\ell \leq e''_k + \varepsilon$; poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si deve avere $\ell \leq e''_k$. Ciò dimostra che ℓ verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. Sia ora $\varepsilon > 0$; dalla 1) della b), esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$; allora $\ell + \varepsilon$ è un maggiorante della successione $(a_n)_{n\geq\nu}$ e quindi deve essere $e''_\nu \leq \ell + \varepsilon$; pertanto ℓ verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore da cui la tesi. □

▷ La proprietà 2) della b) si può esprimere equivalentemente nel modo seguente:

2') Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < a_n\}$ è infinito
(rispettivamente, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < \ell + \varepsilon\}$) è infinito.

Infatti, si supponga vera la proprietà 2) e si fissi $\varepsilon > 0$. Se, per assurdo, l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < a_n\}$ fosse finito, esso sarebbe dotato di massimo $\nu \in \mathbb{N}$. Allora, applicando la proprietà 2) al numero naturale $\nu + 1$ si troverebbe un elemento $n \geq \nu + 1$ tale che $\ell - \varepsilon < a_n$ e ciò contraddirebbe il fatto che ν è il massimo $\{n \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < a_n\}$. Viceversa, si supponga vera la proprietà 2') e siano $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbb{N}$. Se, per assurdo, non esistesse alcun elemento $n \geq \nu$ tale che $\ell - \varepsilon < a_n$, l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < a_n\}$ sarebbe contenuto in $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ e quindi sarebbe finito; ciò contraddice evidentemente la proprietà 2').

▷ Poiché ovviamente $e'_k \leq e''_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha sempre

$$\ell' \leq \ell'' .$$

L'uguaglianza del massimo e del minimo limite è caratterizzata dalla proposizione successiva.

Proposizione 5.1.11 *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare;

b) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n$.

Inoltre, vera l'una e quindi ciascuna delle proposizioni equivalenti precedenti, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n .$$

Dimostrazione. Per brevità si denotano con ℓ'' e rispettivamente ℓ' il massimo e rispettivamente il minimo limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a)$\Rightarrow$ b) Si ponga $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Se $\ell = +\infty$ si ha $e'_k = +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $\ell' = \ell'' = +\infty$ da cui la tesi. Analogamente, se $\ell = -\infty$, si ha $e''_k = -\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi ancora $\ell' = \ell'' = -\infty$. Si supponga pertanto $\ell \in \mathbb{R}$; in tal caso, è immediato verificare che ℓ verifica le proprietà caratteristiche sia del massimo che del minimo limite (Proposizione 5.1.10) e quindi $\ell = \ell' = \ell''$; da ciò segue anche l'ultima parte della tesi.
b)$\Rightarrow$ a) Si ponga $\ell = \ell'(= \ell'')$. Se $\ell = +\infty$, si ha $\ell' = +\infty$ e quindi, per ogni $M \in \mathbb{R}$ deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $e'_k > M$ per ogni $n \geq \nu$; considerando $n = \nu$, dalla definizione di e'_ν segue allora $a_n > M$ per ogni $n \geq \nu$ e ciò dimostra che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente positivamente. Se $\ell = -\infty$, si procede in maniera analoga considerando ℓ''. Si supponga ora $\ell \in \mathbb{R}$; dalle proprietà caratteristiche del massimo e del minimo limite (Proposizione 5.1.10), segue, per ogni $\varepsilon > 0$, da un lato l'esistenza di $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu_1$, e dall'altro l'esistenza di $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < a_n$ per ogni $n \geq \nu_2$; posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n \geq \nu$, si ha allora $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. □

▷ Per dimostrare facilmente la proprietà successiva, conviene osservare che come conseguenza delle proprietà caratteristiche del massimo e del minimo limite enunciate nella Proposizione 5.1.10, si ha anche la seguente, dove ℓ denota il massimo limite (rispettivamente, il minimo limite) della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq \nu \text{ t.c. } \ell - \varepsilon < a_n < a_n + \varepsilon\,. \tag{5.1.2}$$

Infatti, se ℓ è il massimo limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fissati $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbb{N}$, dalla proprietà 1) della b) nella Proposizione 5.1.10, si ha l'esistenza di $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \ell+\varepsilon$ per ogni $n \geq \nu_1$. Applicando la proprietà 2) della b) nella stessa Proposizione 5.1.10 con $\max\{\nu, \nu_1\}$ al posto di ν si ottiene l'esistenza di $n \geq \max\{\nu, \nu_1\}$ tale che $\ell-\varepsilon < a_n$; dunque $n \geq \nu$ e poiché $n \geq \nu_1$, per tale n si ha anche $a_n < \ell + \varepsilon$, da cui la tesi. Se ℓ è il minimo limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si procede ovviamente in maniera analoga.

▷ Si è visto in precedenza che se una successione è regolare, tutte le sue estratte lo sono e tendono verso lo stesso limite (Proposizione 5.1.9). Nel caso generale, si ha il seguente risultato.

Proposizione 5.1.12 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e siano ℓ'' ed ℓ' il suo massimo limite e rispettivamente il suo minimo limite. Allora esistono almeno due successioni estratte $(a_{k_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_{k_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ regolari e tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_1(n)} = \ell''\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{k_2(n)} = \ell'\,.$$

Dimostrazione. Si dimostra solamente l'esistenza dell'estratta $(a_{k_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. La successione strettamente crescente $(k_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri naturali viene definita induttivamente applicando la proprietà (5.1.2). Considerando $\varepsilon = 1$ e $\nu = 0$, dalla (5.1.2), si ottiene l'esistenza di $k(0) \in \mathbb{N}$ tale che $\ell'' - 1 < a_{k(0)} < \ell'' + 1$. Si riapplica ora la stessa proprietà (5.1.2) con $\varepsilon = 1/2$ e $\nu = k(0) + 1$ e si ottiene l'esistenza di un elemento $k(1) \in \mathbb{N}$, $k(1) \geq \nu$ tale che $\ell'' - 1/2 < a_{k(1)} < \ell'' + 1/2$; si osservi che $k(1) > k(0)$ in quanto si è considerato $\nu = k(0) + 1$. Procedendo in questo modo, si può considerare una successione strettamente crescente $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ di interi positivi tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulti $\ell'' - 1/(n+1) < a_{k(n)} < \ell'' + 1/(n+1)$. Dal primo teorema di confronto per i limiti segue subito che la successione estratta $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso ℓ''. □

Come conseguenza del risultato precedente, si può enunciare il seguente corollario.

Corollario 5.1.13 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora:*

1) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata superiormente, essa ammette un'estratta divergente positivamente.

2) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata inferiormente, essa ammette un'estratta divergente negativamente.

3) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente oppure inferiormente, essa ammette un'estratta convergente.

Dimostrazione. Nel primo caso il massimo limite della successione è $+\infty$ e quindi la tesi segue dalla Proposizione 5.1.12 precedente. Il secondo caso è analogo in quanto il minimo limite è $-\infty$. Infine, se la successione è limitata superiormente oppure inferiormente almeno uno tra il massimo limite ed il minimo limite della successione è un numero reale e quindi la tesi segue ancora dalla Proposizione 5.1.12. □

▷ A questo punto si può dimostrare facilmente un risultato molto importante per le sue numerose applicazioni.

Si osserva innanzitutto che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali convergente verso un numero reale ℓ e se l'insieme $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ degli elementi della successione è infinito, allora ℓ è un punto di accumulazione per A.

Infatti, considerato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ per ogni $n \geq \nu$. Gli elementi della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono infiniti e quindi deve esistere almeno un $n \geq \nu$ tale che $a_n \neq \ell$; l'elemento a_n appartiene dunque all'insieme $A \cap]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\setminus \{\ell\}$ che risulta pertanto non vuoto. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si conclude che ℓ è un punto di accumulazione per A. □

Teorema 5.1.14 (Teorema di Bolzano-Weierstrass) *Sia X un sottoinsieme limitato ed infinito di $\mathbb{R}$. Allora X è dotato di almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. L'insieme X è infinito e quindi si può considerare una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X a due a due distinti; infatti, considerato $a_0 \in X$, poiché X è infinito si può considerare poi $a_1 \in X \setminus \{a_0\}$; procedendo in questo modo, supposto di aver definito l'elemento a_n, si sceglie poi a_n nell'insieme (infinito) $X \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Si ottiene così una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X tale che $a_n \neq a_m$ per ogni $n \neq m$

e quindi il cui insieme degli elementi è sicuramente infinito. Gli elementi della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartengono all'insieme limitato X e quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa limitata; dal Corollario 5.1.13, 3), si ottiene l'esistenza di una successione estratta $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente verso un numero reale ℓ. Allora anche $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi distinti di X e dalle osservazioni preliminari ℓ è un punto di accumulazione per l'insieme dei suoi elementi; ma tale insieme è contenuto in X e quindi ℓ è un punto di accumulazione anche per X. □

5.1.3 Criterio di convergenza di Cauchy

Il criterio di convergenza di seguito esposto è utile per stabilire la convergenza di una successione senza necessariamente individuarne il limite.

Teorema 5.1.15 (Criterio di Cauchy per le successioni)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti

a) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

b) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la seguente condizione

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\ n \geq \nu,\ \forall\ m \geq \nu :\ |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. a)⇒ b) Sia ℓ il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e si fissi $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq \nu$. Conseguentemente, per ogni $n, m \geq \nu$, si ha $|a_n - a_m| = |(a_n - \ell) + (\ell - a_m)| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ e quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la condizione la b).
b)⇒ a) Si dimostra innanzitutto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Applicando la proprietà b) con $\varepsilon = 1$, si ottiene l'esistenza di $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < 1$ per ogni $n, m \geq \nu$; in particolare, per ogni $n \geq \nu$, si ha $a_\nu - 1 < a_n < a_\nu + 1$. Allora, posto $m = \min\{a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu - 1\}$ ed $M = \max\{a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu + 1\}$, si ha $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ciò dimostra che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Si denotino ora con ℓ'' ed ℓ' il massimo limite e rispettivamente il minimo limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che per quanto osservato devono essere reali e $\ell' \leq \ell''$. Si fissi ora $\varepsilon > 0$; dalla b), esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon/3$ per ogni $n, m \geq \nu$. Dalla seconda proprietà caratteristica del massimo limite applicata ad $\varepsilon/3$ e ν (vedasi la b) della Proposizione 5.1.10, esiste $n \geq \nu$ tale che $\ell'' - \varepsilon/3 < a_n$ e analogamente, dalla seconda proprietà caratteristica del minimo limite, esiste $m \geq \nu$ tale che $a_m < \ell' + \varepsilon/3$. Allora, poiché $n, m \geq \nu$, si ha

$$\ell'' - \ell' < a_n + \frac{\varepsilon}{3} - a_m + \frac{\varepsilon}{3} \leq |a_n - a_m| + \frac{2}{3}\,\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\,\varepsilon = \varepsilon,$$

e conseguentemente $\ell'' < \ell' + \varepsilon$; poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, segue $\ell'' \leq \ell'$ e quindi $\ell'' = \ell'$. Dalla Proposizione 5.1.11, si conclude che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. □

▷ Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica la condizione b) del Teorema 5.1.15 precedente viene denominata *successione di Cauchy* (oppure *successione fondamentale*).

5.1.4 Massimo e minimo limite per le funzioni

Il massimo e minimo limite può essere introdotto anche più in generale per il limite di una funzione arbitraria. Nella presente sezione viene considerata brevemente tale possibilità.

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Se f non è limitata superiormente in alcun intorno di x_0, il massimo limite viene assunto uguale a $+\infty$ e analogamente se f non è limitata inferiormente in alcun intorno di x_0, il minimo limite viene assunto uguale a $-\infty$. Nel seguito, pertanto, si escluderanno tali casi e, poiché le nozioni che si vogliono introdurre sono di carattere locale, si supporrà che la funzione f sia limitata (altrimenti basta sostituirla con una restrizione ad un opportuno intorno di x_0 in cui è limitata).

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, per ogni $\delta > 0$, si definiscono i numeri

$$\begin{aligned} e''(\delta) &:= \sup\{f(x) \mid x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}\}\ , \\ e'(\delta) &:= \inf\{f(x) \mid x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}\}\ . \end{aligned}$$

La funzione $\delta \mapsto e''(\delta)$ da $]0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$ è crescente e la funzione $\delta \mapsto e'(\delta)$ da $]0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$ è decrescente e inoltre, per ogni $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, risulta $e'(\delta_1) \leq e''(\delta_2)$. Dal teorema sul limite delle funzioni monotone, si possono considerare i seguenti limiti

$$\lim_{\delta\to 0^+} e''(\delta) \quad (= \inf_{\delta>0} e''(\delta))\ , \qquad \lim_{\delta\to 0^+} e'(\delta) \quad (= \sup_{\delta>0} e'(\delta))\ ,$$

i quali vengono denominati *massimo limite* e rispettivamente *minimo limite* di f in x_0 e denotati con uno dei seguenti simboli

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)\ , \qquad \lim_{x\to x_0}{}'' \ f(x)\ , \qquad \overline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x)\ ,$$

e rispettivamente

$$\liminf_{x\to x_0} f(x)\ , \qquad \lim_{x\to x_0}{}' \ f(x)\ , \qquad \underline{\lim}_{x\to x_0}\ f(x)\ .$$

Se $x_0 = +\infty$ (rispettivamente, $x_0 = -\infty$), si procede in maniera analoga definendo i seguenti numeri, per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e''(c) &:= \sup\{f(x) \mid x \in X \cap]c, +\infty[\} \\ \text{(rispettivamente, } e''(c) &:= \sup\{f(x) \mid x \in X \cap] - \infty, c[\}\ ) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e'(c) &:= \inf\{f(x) \mid x \in X \cap]c, +\infty[\} \\ \text{(rispettivamente, } e'(c) &:= \inf\{f(x) \mid x \in X \cap] - \infty, c[\}\ ). \end{aligned}$$

La funzione $c \mapsto e''(c)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è ovviamente decrescente (rispettivamente, crescente), mentre la funzione $c \mapsto e'(c)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è crescente (rispettivamente, decrescente) e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, risulta $e'(c_1) \leq e''(c_2)$. Il massimo limite ed il minimo limite possono ora essere definiti tramite i seguenti limiti, esistenti sempre per il teorema sul limite delle funzioni monotone

$$\lim_{c\to+\infty} e''(c) \ , \qquad (\text{rispettivamente, } \lim_{c\to-\infty} e''(c) \ ),$$

e

$$\lim_{c\to+\infty} e'(c) \ , \qquad (\text{rispettivamente, } \lim_{c\to-\infty} e'(c) \ ).$$

▷ Le proprietà caratteristiche del massimo e del minimo limite di una funzione possono essere ottenute in maniera esattamente analoga a quanto già visto per le successioni. A causa della stretta analogia con il caso delle successioni, ci si limita a questo punto ad enunciare alcune proprietà omettendo le dimostrazioni.

Proposizione 5.1.16 *Si considerino un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ per X ed una funzione reale $f : X \to \mathbb{R}$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) Esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

b) $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x)$.

Inoltre, vera l'una e quindi ciascuna delle proposizioni equivalenti precedenti, risulta

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) \ .$$

▷ Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, si dice che f verifica la condizione di Cauchy in x_0 se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, I \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall\, x, y \in X \cap I \setminus \{x_0\} : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Teorema 5.1.17 (Criterio di Cauchy per le funzioni)
Si considerino un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ per X ed una funzione reale $f : X \to \mathbb{R}$. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) Esiste ed è finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

b) f verifica la condizione di Cauchy in x_0 .

5.2 Serie numeriche

Lo studio delle serie numeriche trova diverse applicazioni in analisi riguardanti, ad esempio, la possibilità di esprimere le funzioni elementari come somma di funzioni potenza ad esponente intero positivo, con il conseguente vantaggio di ricondurre il calcolo di limiti, derivate ed integrali a quello di funzioni potenza oppure lo stretto legame con la teoria degli integrali impropri su intervalli illimitati.

5.2.1 Definizioni e proprietà preliminari

Assegnata una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si definisce *somma parziale* m-esima di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il numero s_m definito come segue

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n \ .$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene denominata *serie di termine generale* n-esimo a_n; i numeri s_m, $m \in \mathbb{N}$, vengono anche denominati *somme parziali della serie*. Una serie viene in genere indicata con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e talvolta anche con $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$ Il carattere della successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene indicato come *carattere della serie*; pertanto, si dice che una serie è *regolare*, *convergente*, *divergente positivamente* oppure *divergente negativamente* se tale è la successione delle sue somme parziali. Una serie non regolare viene denominata *indeterminata*. Nel caso in cui la serie sia regolare, il limite della successione delle somme parziali viene denominato *somma della serie* e denotato ancora con il simbolo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$; sarà chiaro dal contesto l'uso di tale simbolo.

Esplicitamente, se $s \in \mathbb{R}$, si ha

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \forall\, n \geq \nu : \ \left| s - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \varepsilon \ .$$

Analogamente, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ (rispettivamente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty$) se e solo se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \forall\, n \geq \nu : \ \sum_{k=0}^{n} a_k > M \quad \text{(rispettivamente } < M\text{).}$$

Una prima condizione necessaria per la convergenza di una serie può essere ricavata facilmente dalle definizioni assunte.

Proposizione 5.2.1 *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali e si supponga che la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *sia convergente. Allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Si consideri la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e sia $s \in \mathbb{R}$ la somma della stessa serie. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \qquad \square$$

▷ La condizione precedente non è in generale sufficiente ad assicurare la convergenza di una serie. Ad esempio, la successione $(\log(1 + 1/n))_{n\geq 1}$ è ovviamente infinitesima, ma la somma parziale n-esima è data da

$$s_n = \log 2 + \log \frac{3}{2} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} = \log \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \log(n+1)\ ,$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1 + 1/n)$ è divergente positivamente.

Esempio 5.2.2 *(Serie geometrica)*
Un esempio importante per il seguito è dato dalla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\ ,$$

con $a \in \mathbb{R}$, la quale viene denominata *serie geometrica di ragione* a. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, denotata con s_n la somma parziale n-esima, risulta $a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \cdots + a_0) = (a-1)s_n$, e quindi, supposto $a \neq 1$,

$$s_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\ .$$

Da ciò consegue direttamente che, se $|a| < 1$, la serie è convergente e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-a}\ .$$

Se $a \geq 1$ oppure $a \leq -1$, la successione $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima e quindi dalla Proposizione 5.2.1 la serie geometrica non può essere convergente. Precisamente, se $a \geq 1$, essa diverge positivamente (infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $s_n \geq n$), mentre se $a \leq -1$, la serie è indeterminata (infatti, se $a = -1$, si ha $s_n = 1$ per n pari e $s_n = 0$ per n dispari; se $a < -1$, si ha $s_n > 1$ per n pari ed $s_n < 0$ per n dispari.

▷ Una prima condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie può essere ricavata dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $n \in \mathbb{N}$. Il *resto* n*-esimo* della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (oppure *serie resto di ordine* n) è per definizione la nuova serie

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \ .$$

Si riconosce facilmente una serie e le sue serie resto hanno lo stesso carattere e inoltre, se una delle due è convergente risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \ .$$

Dall'uguaglianza precedente segue che se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora necessariamente la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dei resti n-esimi è infinitesima. Infatti, denotata con s la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, deve essere $\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s - s_n = 0$.

La somma parziale p-esima del resto n-esimo r_n viene denominata *resto parziale della serie* di indici n e p e viene denotato con $r_{n,p}$; quindi

$$r_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = s_{n+p} - s_n \ .$$

Si può ora enunciare il seguente criterio di convergenza di Cauchy, la cui dimostrazione è immediata conseguenza del Teorema 5.1.15 applicato alla successione delle somme parziali.

Teorema 5.2.3 (Criterio di Cauchy per le serie numeriche)
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente.*

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} |r_{n,p}| = 0$.

Esempio 5.2.4 *(Serie armonica)* Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \ ,$$

la quale viene denominata *serie armonica*. Per ogni $n, p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|r_{n,p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p+1} \geq p\,\frac{1}{n+p+1}\ ;$$

considerando in particolare $p = n+1$, si ottiene

$$|r_{n,n+1}| \geq \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

e quindi la b) del Teorema 5.2.3 non può essere verificata. Si conclude che la serie armonica non è convergente. Osservando inoltre che la successione delle somme parziali risulta crescente, la serie dovrà essere divergente positivamente.

▷ Alcune semplici operazioni algebriche sulle serie possono essere dedotte dai teoremi sui limiti di successioni. Si considerino due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali e le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ si ha quanto segue

1) Se le due serie sono entrambe convergenti, anche la loro somma $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ è convergente e si ha
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ ;$$

2) Se una delle due serie è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente), e se le somme parziali dell'altra sono limitate inferiormente (rispettivamente, superiormente) (in particolare, se l'altra serie è convergente), allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ risulta divergente positivamente (rispettivamente, negativamente).

3) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente e se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n$ è convergente e si ha
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ .$$

4) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 'e divergente positivamente (rispettivamente, negativamente) e se $\lambda > 0$, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n$ è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente). Se invece $\lambda < 0$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n$ è divergente negativamente (rispettivamente, positivamente).

5.2.2 Serie a termini positivi

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ viene denominata *serie a termini positivi*; se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice anche che la *serie* è *a termini strettamente positivi*. Per tali serie è possibile stabilire diversi criteri di convergenza, la cui validità può essere estesa alle *serie a termini* *definitivamente positivi* per le quali la condizione $a_n \geq 0$ è verificata per ogni $n \geq \nu$, con $\nu \in \mathbb{N}$ opportuno ed anche, con ovvie modifiche, alle serie negative oppure definitivamente negative.

Inoltre conviene tenere presente che una serie a termini positivi può essere sempre ricondotta ad una serie a termini strettamente positivi trascurando i termini uguali a 0. Pertanto non sarà restrittivo all'occorrenza supporre che la serie sia a termini strettamente positivi anziché semplicemente positivi.

Una proprietà rilevante delle serie a termini positivi è il fatto che la successione delle somme parziali risulta crescente e pertanto essa potrà essere convergente (se le somme parziali sono limitate superiormente) oppure divergente positivamente (se le somme parziali sono limitate superiormente). In tema di notazioni, per indicare che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini positivi è convergente, si scrive spesso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \ .$$

Da quanto osservato segue anche che una serie indeterminata deve avere necessariamente infiniti termini strettamente positivi ed infiniti termini strettamente negativi.

Un primo criterio elementare di confronto si può ricavare direttamente dai teoremi di confronto per i limiti.

Proposizione 5.2.5 (Primo criterio di confronto per le serie a termini positivi)
Si considerino due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ a termini positivi e si supponga che esista $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, risulti $a_n \leq b_n$. Allora

1) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \ .$$

2) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

▷ Il criterio precedente può essere applicato nel caso seguente.

Corollario 5.2.6 (Secondo criterio di confronto per le serie a termini positivi)
Si considerino due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ a termini strettamente positivi e si supponga che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = \ell$. Allora

1) Se $0 < \ell < +\infty$, le due serie hanno lo stesso carattere.

2) Se $\ell = 0$ e se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente. Se invece la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente positivamente.

3) Se $\ell = +\infty$ e se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, mentre se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente positivamente anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente.

DIMOSTRAZIONE. 1) Dalla definizione di limite, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\ell/2 < a_n/b_n < 3\ell/2$ per ogni $n \geq \nu$, da cui

$$\frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} b_n \, .$$

Applicando il primo criterio di confronto (Proposizione 5.2.5) tenendo conto di entrambe le diseguaglianze, si deduce che le due serie hanno lo stesso carattere.
2) Dalla definizione di limite, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $-1 < a_n/b_n < 1$ per ogni $n \geq \nu$, da cui, in particolare, $a_n < b_n$. Allora, dalla Proposizione 5.2.5, segue interamente la tesi.
3) Basta applicare il caso 2) invertendo i ruoli delle due serie e tenendo presente che, nel caso in esame, $\lim_{n\to+\infty} b_n/a_n = 0$. □

▷ A questo punto si possono enunciare i criteri di convergenza maggiormente utilizzati nelle applicazioni.

Teorema 5.2.7 (Criterio del rapporto di D'Alembert per le serie a termini positivi)

Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini strettamente positivi. Allora

1) Se $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

2) Se la successione $\displaystyle\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente maggiore o uguale di 1, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente.

DIMOSTRAZIONE. 1) Si ponga $\ell'' := \displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; poiché $\ell'' < 1$, si può considerare $\ell'' < q < 1$ e dalla prima proprietà caratteristica del massimo limite (applicata con $\varepsilon := q - \ell''$) esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $n \geq \nu$, $a_{n+1}/a_n < q$, da cui $a_{n+1} < q a_n$. Si riconosce ora che, per ogni $n \geq \nu$, risulta $a_n \leq q^{n-\nu} a_\nu$; infatti, tale proprietà è ovviamente vera per $n = \nu$ e, supposta vera per un certo $n \geq \nu$, si ha $a_{n+1} < q \cdot q^{n-\nu} a_\nu = q^{n+1-\nu} a_\nu$. Poiché $0 < q < 1$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ è convergente e quindi, per la Proposizione 5.2.5, lo è anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2) Dalle ipotesi fatte, segue che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente crescente e quindi, essendo a termini positivi, essa non può essere infinitesima. Dalla Proposizione 5.2.1, segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non è convergente e quindi essa deve essere divergente positivamente.
□

▷ Si supponga che esista il $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ e lo si denoti con ℓ. Allora, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente se $\ell < 1$ (in tal caso infatti $\ell'' = \ell < 1$) ed è divergente positivamente se $\ell > 1$ (in tal caso, infatti, si ha $a_{n+1}/a_n > 1$ definitivamente); se $\ell = 1$, non si può invece dire nulla.

▷ Ad esempio, si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, posto $a_n := a^n/n!$, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 0$. Dal Teorema 5.2.7 segue allora che la serie è convergente per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.2.8 (Criterio della radice di Cauchy per le serie a termini positivi)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. Allora:

1) *Se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.*

2) *Se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente.*

Dimostrazione. 1) Si ponga $\ell'' := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e si consideri $q \in \mathbb{R}$ tale che $\ell'' < q < 1$; dalla prima proprietà caratteristica del massimo limite, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, si abbia $\sqrt[n]{a_n} < q$, e quindi $a_n < q^n$. Poiché $q < 1$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ è convergente e quindi, per il primo criterio di confronto (Proposizione 5.2.5), anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.
2) Dalla seconda proprietà caratteristica del massimo limite applicata con $\varepsilon = \ell'' - 1$, segue che l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n > 1\}$ è infinito e quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può essere infinitesima. Dalla Proposizione 5.2.1 segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non può essere convergente e pertanto essa è necessariamente divergente positivamente. □

▷ Ovviamente, anche in questo caso se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, la serie è convergente se $\ell < 1$ ed è divergente positivamente se $\ell > 1$, mentre non si può dire nulla nel caso $\ell = 1$.

▷ Ad esempio, si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, dove

$$a_n : \begin{cases} 2^{-n} , & n \text{ pari;} \\ 3^{-n} , & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \max\{1/2, 1/3\} = 1/2$ e quindi dal Teorema 5.2.8, la serie è convergente. Si osservi che il criterio del rapporto in questo caso non è applicabile.

Si enuncia ora un ultimo criterio generale di convergenza.

Teorema 5.2.9 (Criterio di Raabe-Duhamel per le serie a termini positivi)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. Si ha quanto segue:

1) *Se esistono $q > 1$ e $\nu \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $n \geq \nu$, si abbia $a_n > 0$ e*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q \ ,$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

2) *Se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, si abbia $a_n > 0$ e*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \ ,$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente.

DIMOSTRAZIONE. 1) Per ogni $n \geq \nu$, si ha $q \cdot a_{n+1} - a_{n+1} \leq n(a_n - a_{n+1}) - a_{n+1}$ e quindi

$$a_{n+1} \leq \frac{na_n - (n+1)a_{n+1}}{q-1} \ .$$

Denotata con s_n la somma parziale n-esima della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, da quest'ultima relazione segue, per ogni $n \geq \nu$,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_{n+1} \\ &\leq s_\nu + \frac{\nu a_\nu - (\nu+1)a_{\nu+1}}{q-1} + \cdots + \frac{na_n - (n+1)a_{n+1}}{q-1} \\ &= s_\nu + \frac{\nu a_\nu}{q-1} - \frac{(n+1)a_{n+1}}{q-1} \\ &\leq s_\nu + \frac{\nu a_\nu}{q-1} \ . \end{aligned}$$

Quindi le somme parziali della serie in esame sono limitate superiormente da cui la convergenza della serie

2) Dalle ipotesi segue, per ogni $n \geq \nu$, $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$ e quindi, in particolare, $\nu a_\nu \leq (n+1)a_{n+1}$; allora, per ogni $n \geq \nu$, si ha $a_{n+1} \geq \nu a_\nu/(n+1)$; poiché la serie armonica $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(n+1)$ è divergente positivamente, si conclude che anche la serie in esame è divergente positivamente. □

Anche ora l'esistenza del limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell\ ,$$

consente di affermare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nel caso $\ell > 1$ e la sua divergenza positiva nel caso $\ell < 1$, mentre il caso $\ell = 1$ non consente di dire nulla.

Esempio 5.2.10 *(Serie armonica generalizzata)*
Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

con $p \in]0, +\infty[$, la quale viene denominata *serie armonica generalizzata di ordine* p (o semplicemente *serie armonica* se $p = 1$).

Poiché

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1/(n+1)^p}{1/(n+2)^p} - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+2)^p}{(n+1)^p} - 1\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^p - 1\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\ \frac{(1+1/(n+1))^p - 1}{1/(n+1)} = p\ ,\end{aligned}$$

applicando il criterio di Raabe-Duhamel, si riconosce che la serie armonica generalizzata è convergente se $p > 1$ ed è divergente positivamente se $p < 1$; nel caso $p = 1$, si è già riconosciuto direttamente che essa risulta ancora divergente positivamente. Si osservi che a tale serie non era applicabile né il criterio del rapporto né quello della radice.

▷ Nelle applicazioni i criteri precedenti possono essere utilizzati anche per serie che non hanno segno costante, riferendoli alla serie dei valori assoluti, che è in ogni caso a termini positivi.

Infatti, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione arbitraria di numeri reali, si può considerare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

di termine generale n-esimo $|a_n|$; tale serie è a termini positivi e quindi deve essere o convergente o divergente positivamente.

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *assolutamente convergente* (rispettivamente, *assolutamente divergente*) se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente (rispettivamente, divergente positivamente).

La condizione di assoluta convergenza è più restrittiva della convergenza di una serie, come si riconosce nella proposizione successiva.

Proposizione 5.2.11 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora essa è anche convergente.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$; dal criterio di convergenza di Cauchy applicato alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$, risulti

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \,.$$

Allora si ha anche

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \,,$$

e quindi, sempre dal criterio di convergenza di Cauchy segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. $\square$

Viceversa, una serie può essere convergente senza essere assolutamente convergente; in tal caso si dice anche che la serie è *semplicemente convergente* (oppure *semiconvergente*)).

Se la serie dei valori assoluti di una serie assegnata verifica qualcuno dei criteri di convergenza precedenti, la serie risulterà assolutamente convergente e quindi, dalla Proposizione 5.2.11, risulterà a maggior ragione convergente.

Invece, il fatto che una serie sia assolutamente divergente non comporta che essa non possa essere convergente.

Un ulteriore criterio di convergenza assoluta si ottiene applicando la Proposizione 5.2.5 alla serie armonica generalizzata.

Teorema 5.2.12 (Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie) *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie arbitraria di numeri reali. Allora*

1) Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale di α, con $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

2) Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo di ordine minore o uguale di 1, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente divergente.

DIMOSTRAZIONE. 1) Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale di α, con $\alpha > 1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha |a_n| = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ (eventualmente, può anche accadere $\ell = 0$). Dalla definizione di limite si ottiene l'esistenza di $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, risulti $n^\alpha |a_n| \leq \ell + 1$, da cui $|a_n| \leq (\ell+1)/n^\alpha$. Poiché la serie $(\ell + 1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^\alpha$ è convergente (si veda l'Esempio 5.2.10), dalla Proposizione 5.2.5 segue che anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.
2) Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo di ordine minore o uguale di 1, si ha $\lim_{n\to+\infty} n|a_n| = \ell$ con $\ell > 0$ oppure $\ell = +\infty$ (se l'ordine di infinitesimo è minore di 1). Dalla definizione di limite, considerato $\beta > 0$ tale che $\beta < \ell$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, si abbia $n|a_n| \geq \beta$, da cui $|a_n| \geq \beta/n$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta/n$ è divergente positivamente (Esempio 5.2.4) e quindi, dalla Proposizione 5.2.5, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è divergente positivamente. □

5.2.3 Serie alternanti

Si studia ora un ulteriore criterio di convergenza per serie che non sono a termini positivi.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *a segni alterni* (oppure *alternante*) se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n a_n \geq 0$ oppure, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n a_n \leq 0$. Si ha il seguente criterio di convergenza.

Teorema 5.2.13 (Criterio di Leibnitz per le serie alternanti) *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente ed infinitesima di numeri reali positivi. Allora, la serie alternante $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente e inoltre, denotata con s la sua somma e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con s_n la somma parziale n-esima, si ha*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}\ . \tag{5.2.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo presente che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, valgono le relazioni

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}\ , \tag{1}$$

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \geq s_{2n+1}\ , \tag{2}$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}\ . \tag{3}$$

Dalle uguaglianze (1) e (2) segue che la successione estratta $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, mentre la successione estratta $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente; inoltre, dalla (3), $s_{2n+1} \leq s_{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $s_1 \leq s_{2n}$ e $s_{2n+1} \leq s_0$. Dunque, le successioni $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sono monotone e limitate e quindi, dal Teorema 5.1.2, esse sono convergenti. Posto $s = \lim_{n\to+\infty} s_{2n}$ e tenendo presente che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima, si ha anche $\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = s$. Infine, dalla monotonia delle successioni $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e dalla (3) segue, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |s - s_{2n}| &= s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}\ , \\ |s - s_{2n+1}| &= s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2}\ ; \end{aligned}$$

quindi sia nel caso in cui n sia pari o dispari si ha $|s - s_n| \leq a_{n+1}$; da ciò segue che la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali converge verso s e vale la (5.2.1). $\square$

La (5.2.1) si può enunciare dicendo che l'errore commesso approssimando la somma di una serie a termini alterni con una somma parziale è minore o uguale del valore assoluto del primo termine trascurato.

Esempio 5.2.14 *(Serie armonica a segni alterni)*
Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^p} ,$$

con $p \in]0,+\infty[$, la quale viene denominata *serie armonica a segni alterni di ordinep*; se $p = 1$, essa viene denominata semplicemente *serie armonica a segni alterni*.

Si è già visto che tale serie è assolutamente convergente (e quindi convergente per la Proposizione 5.2.11) se $p > 1$. Se $p \leq 1$, si può tener presente che la successione $(n^{-p})_{n\geq 1}$ è decrescente ed infinitesima e quindi per il criterio di Leibnitz la serie risulta ancora convergente (ma non assolutamente). Infine, denotata con s la somma della serie, per ogni $n \geq 1$, dalla (5.2.1) segue

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(k+1)^p} \right| \leq \frac{1}{(n+2)^p} .$$

5.2.4 Proprietà algebriche

Alcune proprietà algebriche elementari delle serie numeriche sono state già considerate in precedenza. Si esamina ora il comportamento delle serie numeriche rispetto ad ulteriori operazioni algebriche.

La prima operazione che si prende in considerazione è quella di prodotto secondo Cauchy di due serie numeriche.

▷ Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche di numeri reali. Si definisce *serie prodotto secondo Cauchy* delle due serie, e si denota con

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n ,$$

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ di termine n-esimo

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} . \tag{5.2.2}$$

Il termine n-esimo della serie prodotto secondo Cauchy si ottiene sommando i prodotti dei termini delle due serie la cui somma degli indici è uguale ad n. Nel diagramma seguente, che conviene tener presente per le diseguaglianze utilizzate nella proposizione successiva, i termini della serie prodotto si ottengono sommando gli elementi delle diagonali. Quindi la somma parziale n-esima della serie prodotto secondo Cauchy si ottiene sommando tutti gli elementi che si trovano al di sotto della diagonale n-esima.

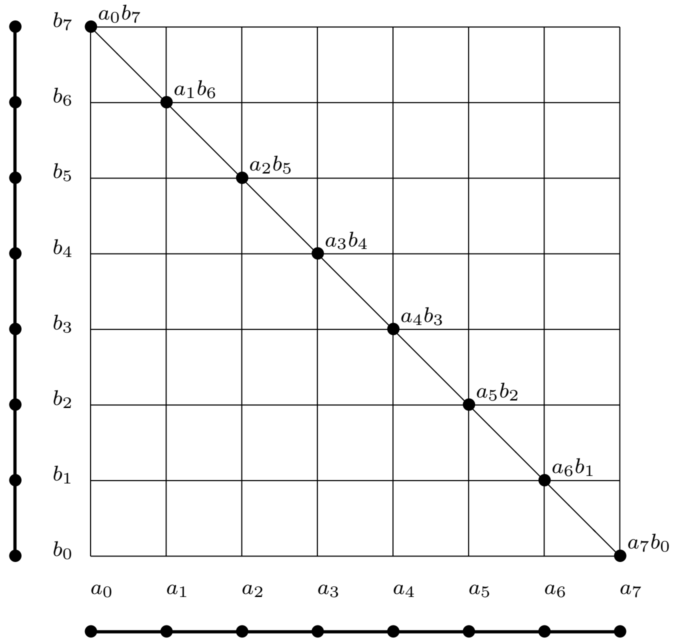

Figura 5.1: *Prodotto secondo Cauchy di due serie*

Proposizione 5.2.15 *Siano* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *due serie assolutamente convergenti di numeri reali. Allora la serie prodotto secondo Cauchy* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *definita dalla* (5.2.2) *è assolutamente convergente e inoltre, posto* $s := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $t := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *e* $u := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, *risulta* $u = s \cdot t$.

Dimostrazione. Si supponga dapprima che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ siano a termini positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si denoti con s_n la somma parziale n-esima della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, con t_n la somma parziale n-esima della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ ed infine con u_n la somma parziale

n-esima della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} u_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) \\ &\leq a_0(b_0 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_0 + \cdots + b_n) \\ &= (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_n) \\ &= s_nt_n \\ &\leq a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_{2n} + a_1b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}b_1 + a_{2n}b_0) \\ &= u_{2n} \, . \end{aligned}$$

Per l'ultima diseguaglianza conviene tener presente che gli elementi al di sotto della diagonale n-esima appartengono a quelli interni al quadrato avente come vertici gli elementi a_0b_0, a_nb_0, a_nb_n e a_0b_n e che questi ultimi si trovano al di sotto della diagonale $2n$-esima.

Dalla diseguaglianza $u_n \leq s_nt_n$, tenendo presente che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, segue che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è convergente. Inoltre, dalla diseguaglianza $u_n \leq s_nt_n \leq u_{2n}$, segue $u \leq s \cdot t \leq u$, da cui segue interamente la tesi.

Si considera ora il caso generale. Poiché le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti, dalla prima parte dimostrata segue che la serie prodotto delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ è convergente. Il termine n-esimo di tale serie è dato da $\sum_{k=0}^{n} |a_kb_{n-k}|$; poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_kb_{n-k}| \, ,$$

— la serie prodotto secondo Cauchy di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è assolutamente convergente. Infine, si riconosce facilmente che

$$|s_nt_n - u_n| \leq \sum_{k=0}^{2n} |a_kb_{n-k}| - \sum_{k=0}^{n} |a_kb_{n-k}| \, ,$$

e quindi, passando al limite per $n \to +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} |s_nt_n - u_n| = 0$, da cui $u = s \cdot t$.
t □

▷ Si potrebbe riconoscere, ma si omette per brevità la dimostrazione, che la serie prodotto secondo Cauchy converge anche se una sola delle due serie è assolutamente convergente e l'altra è convergente (Teorema di Mertens). Inoltre, se due serie sono convergenti, la serie prodotto secondo Cauchy non può risultare divergente positivamente né divergente negativamente, ma deve essere necessariamente convergente oppure indeterminata. Nel caso in cui la serie prodotto secondo Cauchy sia convergente, vale in ogni caso l'uguaglianza con il prodotto delle somme delle due serie.

▷ Si è già osservato che l'alterazione di un numero finito di termini di una serie non influisce sul suo carattere. Si esaminano ora alcune proprietà delle serie che riguardano invece l'alterazione di un numero non necessariamente finito di termini. Per brevità, si omettono le dimostrazioni delle proprietà successive.

▷ Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie di numeri reali e se $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione strettamente crescente di interi positivi tale che $k(0) = 0$, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=k(n)}^{k(n+1)-1} a_j \right)$$

di termine n-esimo $\sum_{j=k(n)}^{k(n+1)-1} a_j$ si dice ottenuta dalla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ raggruppandone i termini.

La *proprietà di completa additività delle serie convergenti* asserisce che se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente (rispettivamente, divergente positivamente, divergente negativamente, assolutamente convergente, assolutamente divergente), allora anche le serie ottenute da essa raggruppandone i termini sono convergenti (rispettivamente, divergenti positivamente, divergenti negativamente, assolutamente convergenti, assolutamente divergenti) e le loro somme coincidono.

Conviene osservare che una serie ottenuta raggruppando i termini può essere convergente senza che lo sia la serie di partenza. In particolare, se una serie è indeterminata, non è detto che una serie ottenuta da essa raggruppandone i termini sia anch'essa indeterminata. Ad esempio, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ è indeterminata in quanto il termine n-esimo non è infinitesimo, ma se si considera la successione $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente crescente di interi si ottiene una serie con tutti i termini nulli che quindi converge a 0.

▷ Si considera infine una estensione della proprietà commutativa. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie di numeri reali e se $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una permutazione dell'insieme $\mathbb{N}$ (cioè, una funzione bigettiva di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$), allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ di termine n-esimo $a_{\sigma(n)}$ si dice ottenuta dalla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ riordinandone i termini. Inoltre, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *incondizionatamente convergente* se ogni serie da essa ottenuta riordinandone i termini è convergente e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \; .$$

Si può riconoscere che una serie è incondizionatamente convergente se e solo se essa è assolutamente convergente.