Capitolo 6

Funzioni continue

Una delle proprietà più importanti delle funzioni elementari riguarda il fatto che il limite in un punto x_0 in cui la funzione è definita si può determinare semplicemente calcolando la funzione in x_0. Tale proprietà viene approfondita nel presente capitolo.

6.1 Definizioni e proprietà preliminari

Definizione 6.1.1 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è continua in x_0 se verifica la seguente condizione*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\ x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[:\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ .$$

Se $x_0 \in X$ non è un punto di accumulazione per X, la condizione precedente è sempre soddisfatta (basta considerare $\delta > 0$ tale che $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} = \emptyset$), mentre se x_0 è di accumulazione per X, la condizione precedente equivale all'esistenza del limite di f in x_0 ed alla condizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

▷ Se A è un sottoinsieme di X, si dice che *f è continua in A* se f è continua in ogni $x_0 \in A$. Infine, si dice che *f è continua*, se essa è continua in X.

▷ In modo analogo si forniscono le definizioni di funzione continua a sinistra e continua a destra; precisamente, si dice che f è *continua a destra* (rispettivamente, *continua a sinistra*) in x_0 se verifica la seguente condizione

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\ x \in X \cap [x_0, x_0 + \delta[:\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(rispettivamente,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0] :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ ).$$

Si riconosce facilmente che se x_0 è un punto di accumulazione a destra (rispettivamente, a sinistra) per X, allora f è continua a destra (rispettivamente, a sinistra) in x_0 se e solo se esiste il limite destro (rispettivamente, sinistro) di f in x_0 e si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad (\text{rispettivamente, } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\ ).$$

▷ Ad esempio, la funzione $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]-1, +\infty[$,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

è continua nel punto $x_0 = 0$.

▷ Invece, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{1/x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

è continua a sinistra in $x_0 = 0$, ma non a destra in quanto $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$.

▷ Un punto in cui una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è definita ma non è continua, viene denominato punto di discontinuità per f. Si osservi che un punto di discontinuità $x_0 \in X$ deve essere necessariamente di accumulazione per X e quindi in un tale punto si può considerare il limite di f ma, se esiste, non deve coincidere con $f(x_0)$. A seconda del comportamento di tale limite, si possono classificare diversi tipi di punti di discontinuità di seguito specificati.

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale ed $x_0 \in X$ un punto di discontinuità per f.

1) Si dice che x_0 è un punto di discontinuità eliminabile per f se esiste ed è finito il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\ .$$

2) Si dice che x_0 è un punto di discontinuità di prima specie per f se esistono e sono finiti il limite sinistro $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ed il limite destro $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)\ .$$

3) In tutti i casi rimanenti, cioè se uno dei due limiti da sinistra o da destra non esiste oppure è infinito, si dice che x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie.

▷ Se x_0 è un punto di discontinuità eliminabile per f, si può definire la funzione $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in X$,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) \, , & x \neq x_0 \, , \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \, , & x = x_0 \, , \end{cases}$$

la quale risulta continua in x_0; ciò giustifica la denominazione data a questo tipo di discontinuità.

np Se $x_0 \in X$ è un punto di discontinuità di prima specie, esso è necessariamente di accumulazione sia a sinistra che a destra per X e non è possibile ridefinire la funzione nel punto x_0 in modo da ottenere una funzione continua. Si possono tuttavia definire le funzioni $\tilde{f}_- : X \to \mathbb{R}$ e $\tilde{f}_+ : X \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in X$,

$$\tilde{f}_-(x) := \begin{cases} f(x) \, , & x \neq x_0 \, , \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \, , & x = x_0 \, , \end{cases} \qquad \tilde{f}_+(x) := \begin{cases} f(x) \, , & x \neq x_0 \, , \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) \, , & x = x_0 \, , \end{cases}$$

le quali sono la prima continua solamente a sinistra in x_0 e la seconda continua solamente a destra in x_0.

Il numero reale

$$s(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

viene denominato *salto* della funzione f nel punto x_0.

▷ Ad esempio, la *funzione segno* $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} |x|/x \, , & x \neq 0 \, , \\ 0 \, , & x = 0 \, , \end{cases}$$

ha una discontinuità di prima specie nel punto 0 ed il salto della funzione nel punto 0 è uguale a 2.

▷ Un noto esempio di funzione che presenta discontinuità di seconda specie in ogni punto del suo insieme di definizione è la *funzione di Dirichlet* $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0,1]$,

$$d(x) := \begin{cases} 1 \, , & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \, , \\ 0 \, , & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \, . \end{cases} \tag{6.1.1}$$

▷ Dai teoremi sui limiti, segue subito il seguente risultato riguardante le operazioni sulle funzioni continue.

Teorema 6.1.2 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ funzioni reali. Allora:*

1) Se f e g sono continue in x_0, anche la funzione somma $f+g$ è continua in x_0; conseguentemente, se f e g sono continue, $f+g$ è continua.

2) Se f e g sono continue in x_0, anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è continua in x_0; conseguentemente, se f e g sono continue, $f \cdot g$ è continua.

In particolare, se $\lambda \in \mathbb{R}$ ed f è continua in x_0, anche la funzione $\lambda \cdot f$ è continua in x_0; conseguentemente, se f è continua, $\lambda \cdot f$ è anch'essa continua.

3) Se, per ogni $x \in X$, $f(x) \neq 0$ ed f è continua in x_0, anche la funzione reciproca $1/f$ è continua in x_0; conseguentemente, se f è continua, anche $1/f$ è continua.

4) Se, per ogni $x \in X$, $g(x) \neq 0$ ed f e g sono continue in x_0, anche la funzione quoziente f/g è continua in x_0; conseguentemente, se f e g sono continue, f/g è continua.

Teorema 6.1.3 (Continuità delle funzioni composte)
Siano X e Y sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni reali tali che $f(X) \subset Y$ e si ponga $y_0 = f(x_0)$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0, allora la funzione composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ risulta continua in x_0. Conseguentemente, se f e g sono continue, la funzione composta $g \circ f$ è continua.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere considerata una conseguenza del Teorema 4.5.6 sul limite delle funzioni composte, tuttavia si può fonire facilmente una dimostrazione diretta. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di g in y_0 segue l'esistenza di $\delta_1 > 0$ tale che, per ogni $y \in Y \cap]y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1[$, si abbia $g(y_0) - \varepsilon < g(y) < g(y_0) + \varepsilon$; inoltre, poiché f è continua in x_0, si può trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, risulti $f(x_0) - \delta_1 < f(x) < f(x_0) + \delta_1$. Allora, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, si ha anche $f(x) \in Y \cap]y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1[$ e conseguentemente $g(y_0) - \varepsilon < g(f(x)) < g(y_0) + \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

I teoremi precedenti consentono di affermare la continuità di una funzione ottenuta mediante le operazioni algebriche di somma, prodotto e composizione di funzioni continue.

Se X è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, l'insieme di tutte le funzioni reali continue definite in X viene denotato con $\mathcal{C}(X)$

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\} .$$

In termini algebrici, le proprietà precedenti consentono di affermare che l'insieme $\mathcal{C}(X)$, munito delle operazioni di somma di due funzioni e prodotto di un numero reale per una funzione, risulta uno spazio vettoriale reale.

Le funzioni maggiormente studiate nel seguito si ottengono applicando opportune operazioni algebriche di somma, prodotto e composta alle funzioni elementari, per cui la continuità delle funzioni elementari sarà in generale sufficiente ad assicurarne la continuità delle funzioni in esame. D'altra parte, la continuità delle funzioni elementari è un'immediata conseguenza dello studio dei limiti delle funzioni elementari effettuato in precedenza, in base al quale si può affermare che *tutte le funzioni elementari sono continue.* Inoltre, anche *i polinomi e le funzioni razionali sono continue*, in quanto somma e quoziente di funzioni continue.

6.2 Funzioni continue su intervalli chiusi e limitati

Alcune importanti proprietà delle funzioni continue si ottengono nel caso in cui esse sono definite in intervalli chiusi e limitati.

Teorema 6.2.1 (Teorema di Weierstrass)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è dotata di minimo e di massimo, cioè esistono $c \in [a, b]$ e $d \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$,

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ .$$

Dimostrazione. Si dimostra in una prima fase che ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata. Infatti, se per assurdo f non fosse limitata superiormente, essa non ammetterebbe maggioranti e quindi, in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $x_n \in [a, b]$ tale che $f8x_n) > n$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi, dal Corollario 5.1.13, ammette un'estratta $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente verso un elemento $x_0 \in [a, b]$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} f(x_{k(n)}) = +\infty$ (in quanto $f(k(n)) > k(n) \geq n$), dalla caratterizzazione sequenziale del limite (Teorema 5.1.3) viene contraddetta la continuità di f in x_0. Quindi f deve essere limitata superiormente. Nello stesso modo si dimostra che f deve essere limitata inferiormente.

Si dimostra ora che f è dotata di massimo; dalla prima parte già dimostrata, si può considerare l'estremo superiore $\ell := \sup f$ di f e quindi è sufficiente dimostrare che esso è un valore della funzione. Infatti, dalla definizione di estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ segue l'esistenza di $y_n \in [a, b]$ tale che $\ell - 1/(n + 1) < f(y_n) \leq \ell$; anche in questo caso la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi, dal Corollario 5.1.13, ammette un'estratta $(y_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente verso un elemento $d \in [a, b]$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} f(y_{k(n)}) = \ell$ dalla continuità di f in y_0 e dalla caratterizzazione sequenziale del limite (Teorema 5.1.3) segue $\ell = f(d)$ e ciò completa la dimostrazione dell'esistenza del massimo. Nello stesso modo si dimostra infine quella del minimo di f.

▷ Oltre alla continuità, si osserva che l'ipotesi che l'insieme di definizione sia un intervallo chiuso e limitato è essenziale, come si riconosce, ad esempio, considerando le restrizioni della funzioni logaritmo all'intervallo semiaperto $]0,1]$ ed all'intervallo non limitato $[1,+\infty[$.

La proprietà successiva giustifica la terminologia adottata per la proprietà di continuità.

Teorema 6.2.2 (Teorema degli zeri)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)\,f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. L'ipotesi $f(a)\,f(b) < 0$ esprime il fatto che negli estremi a e b la funzione f assume valori di segno opposto. Si supponga, per fissare le notazioni, che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (la dimostrazione è analoga nel caso $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$).

Si ponga $I_1 := [a,b]$ e si consideri il punto medio $x_1 \in [a,b]$; se $f(x_1) = 0$, la tesi è vera, altrimenti la funzione f assume valori di segno opposto in almeno uno degli intervalli $[a,x_1]$ e $[x_1,b]$; denotato con I_2 tale intervallo si denota ora con x_2 il punto medio di I_2 e si considera il valore $f(x_2)$. Se $f(x_2) = 0$, la tesi è vera, altrimenti la funzione f assume valori di segno opposto in almeno uno degli intervalli aventi come estremi x_2 ed uno dei punti considerati in precedenza; tale intervallo viene denotato I_3 e si ripete il procedimento esposto. Se dopo n iterazioni di tale procedimento si trova un punto $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) = 0$, la tesi è vera, altrimenti si trova una successione di intervalli $(I_n)_{n\geq 1}$ tale che, per ogni $n \geq 1$, $I_{n+1} \subset I_n$ e I_n ha ampiezza $(b-a)/2^{n-1}$. Per ogni $n \geq 1$ si denotino con a_n e b_n gli estremi di I_n e precisamente con a_n l'estremo in cui f assume un valore negativo e con b_n l'estremo in cui f assume un valore positivo; si ottengono cosìle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $[a,b]$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi, dal Corollario 5.1.13, essa ammette un'estratta $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente verso un elemento $x_0 \in [a,b]$. Poiché $k(n) \leq n$, si ha $\frac{b-a}{2^{k(n)-1}} \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}$ e conseguentemente

$$a_{k(n)} - \frac{b-a}{2^{n-1}} \leq a_{k(n)} - \frac{b-a}{2^{k(n)-1}} \leq b_{k(n)} \leq a_{k(n)} + \frac{b-a}{2^{k(n)-1}} \leq a_{k(n)} - \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

(in realtà, $b_{k(n)}$ coincide con $a_{k(n)} - (b-a)/k(n)$ oppure con $a_{k(n)} + (b-a)/k(n)$), si ha anche per confronto $\lim_{n\to+\infty} b_{k(n)} = x_0$; dalla continuità di f in x_0 e dalla caratterizzazione sequenziale del limite (Teorema 5.1.3) segue

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_{k(n)}) = f(x_0)\ , \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_{k(n)}) = f(x_0)\ ;$$

infine, poiché $f(a_n) \leq 0$ deve essere anche $f(x_0) \leq 0$ e analogamente, poiché $f(b_n) \geq 0$ deve essere anche $f(x_0) \geq 0$; si conclude che deve essere $f(x_0) = 0$ e ciò completa la dimostrazione.

Corollario 6.2.3 (Teorema di Bolzano)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e siano $m \in \mathbb{R}$ ed $M \in \mathbb{R}$ il minimo e rispettivamente il massimo di f. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $m \leq \lambda \leq M$, allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = \lambda$.

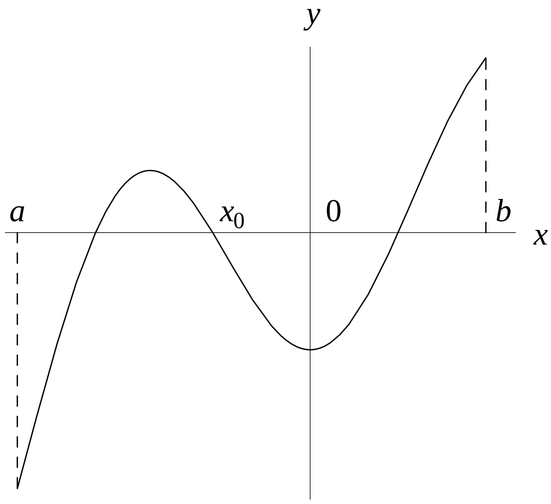

Figura 6.1: *Teorema degli zeri.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $c \in [a, b]$ e $d \in [a, b]$ tali che $f(c) = m$ e $f(d) = M$. La tesi è ovvia se $\lambda = m$ oppure $\lambda = M$ considerando $x_0 = c$ oppure $x_0 = d$. Si supponga quindi $m < \lambda < M$ e si denoti con I l'intervallo chiuso avente come estremi i punti c e d; si consideri la funzione $g : I \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$, $g(x) = f(x) - \lambda$. Allora g è continua e inoltre $g(c)\, g(d) < 0$. Dal Teorema degli zeri 6.2.2 segue l'esistenza di $x_0 \in I$ tale che $g(x_0) = 0$; dunque $x_0 \in [a, b]$ e $f(x_0) = \lambda$. □

Osservazione 6.2.4 (Conseguenza del teorema di Weierstrass e di Bolzano)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dal Teorema 6.2.1 di Weierstrass, segue l'esistenza di $c \in [a, b]$ e $d \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$, $f(c) \le f(x) \le f(d)$, cioè $f([a, b]) \subset [f(c), f(d)]$.

D'altra parte, dal teorema di Bolzano (Corollario 6.2.3), segue che ogni elemento dell'intervallo $[f(c), f(d)]$ è un valore della funzione e quindi $[f(c), f(d)] \subset f([a, b])$. In conclusione deve essere

$$f([a, b]) = [f(c), f(d)] ,$$

cioè l'immagine di un intervallo chiuso e limitato mediante una funzione continua è un intervallo chiuso e limitato avente come estremi il minimo e rispettivamente il massimo della funzione in tale intervallo.

Osservazione 6.2.5 Un'importante applicazione del teorema degli zeri riguarda la possibilità di approssimare le soluzioni di un'equazione. Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; si consideri l'equazione

$$f(x) = 0 .$$

Il primo passo consiste nel cercare due elementi $a, b \in I$ tali che $f(a)\,f(b) < 0$. A questo punto, applicando il metodo descritto nella dimostrazione del Teorema degli zeri 6.2.2, alla restrizione di f all'intervallo $[a, b]$, si riesce ad approssimare una soluzione dell'equazione con la precisione desiderata.

Ad esempio, si supponga di voler determinare una soluzione dell'equazione

$$e^x = -x$$

con una precisione pari a $3 \cdot 10^{-1}$.

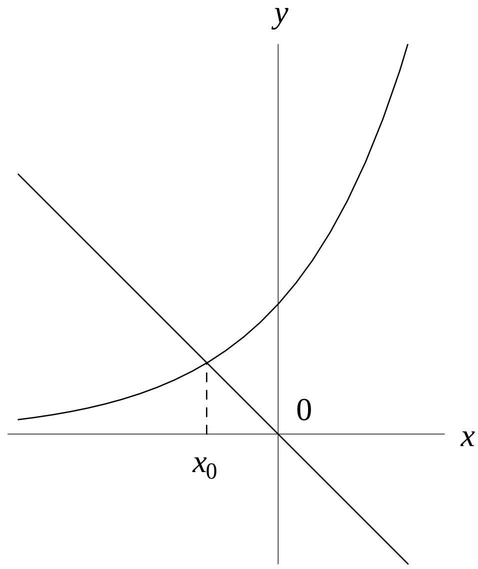

Figura 6.2: *Approssimazione delle soluzioni con il teorema degli zeri.*

Confrontando i grafici delle funzioni e^x e $-x$ si riconosce facilmente l'esistenza di un'unica soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$, che risulta negativa. Si cerca ora di applicare il ragionamento sopra esposto alla funzione $f(x) = e^x + x$, per determinare il punto x_0 con la precisione richiesta. Nel punto 0 risulta $f(0) = 1 > 0$, mentre nel punto -1 si ha $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, da cui, per il teorema degli zeri, $x_0 \in]-1, 0[$; si considera ora il punto $-1/2$, nel quale risulta $f(-1/2) = e^{-1/2} - 1/2 > 0$ (in quanto $e^{-1} > 1/4$); essendo $f(-1)$ e $f(-1/2)$ discordi, deve essere $x_0 \in]-1, -1/2[$. Si considera ora il punto $-3/4$. La condizione $e^{-3/4} > 3/4$ è equivalente a $4e^{-3/4}/3 > 1$ e, elevando alla potenza quarta entrambi i membri (tenendo presente che sono positivi) a $256/(81e^3) > 1$, che non è vera; quindi si ha $f(-3/4) = e^{-3/4} - 3/4 < 0$ e da ciò segue che la soluzione x_0 deve trovarsi nell'intervallo $]-3/4, -1/2[$, agli estremi del quale la funzione assume valori di segno discorde. Essendo

$-1/2 - (-3/4) = 1/4 < 3 \cdot 10^{-1}$ si è ottenuta la precisione desiderata. Si osserva tuttavia che il metodo precedente richiede in generale molti calcoli se si richiede una precisione elevata e per questo motivo viene utilizzato solamente nei casi in cui sia necessaria una stima molto approssimativa della posizione degli zeri di una funzione.

6.3 Continuità delle funzioni monotone

Ci si occupa ora di alcune proprietà particolari che riguardano la continuità delle funzioni monotone.

Innanzitutto conviene studiare la continuità delle funzioni inverse; a tal fine, è opportuno premettere alcuni risultati di interesse generale.

▷ Conviene innanzitutto osservare che se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale monotona e se l'immagine $f(X)$ di f è un intervallo, allora necessariamente f deve essere continua.

Infatti, si supponga ad esempio che f sia crescente e sia per assurdo $x_0 \in X$ tale che f non sia continua in x_0. Allora, tenendo presente il Teorema 4.6.1, deve risultare $\lim_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0)$ oppure $f(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. In entrambi i casi la crescenza di f comporta che la funzione non assuma valori nell'intervallo tra uno dei limiti ed $f(x_0)$ e ciò contraddice il fatto che $f(X)$ è un intervallo.

Una delle poprietà generali delle funzioni strettamente monotone è quella di essere iniettiva. Il viceversa non vale necessariamente (ad esempio, si consideri la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [-1, 1]$, $f(x) = |x| - \operatorname{sign}(x)$, dove sign è la funzione segno già introdotta in precedenza). tuttavia, se si suppone in più che la funzione sia continua si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 6.3.1 *Se I è un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione reale continua ed iniettiva, allora f è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che esistano $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \le f(x_2)$ (per cui f non è strettamente decrescente) e che esistano $x_3, x_4 \in I$ tali che $x_3 < x_4$ e $f(x_3) \ge f(x_4)$ (per cui f non è strettamente crescente). Dunque, posto $a = \min\{x_1, x_3\}$ e $b = \max\{x_2, x_4\}$, f non risulta né strettamente crescente né strettamente decrescente in $[a, b]$. Poiché f è iniettiva, deve essere $f(a) < f(b)$ oppure $f(b) < f(a)$; si supponga $f(a) < f(b)$. Per ogni $x_0 \in]a, b[$ si deve avere $f(a) < f(x_0) < f(b)$; infatti, se fosse $f(x_0) < f(a)$, dal teorema di Bolzano (Corollario 6.2.3) esisterebbe un elemento $y \in]x_0, b[$ tale che $f(y) = f(a)$ ed f non sarebbe iniettiva; nello stesso modo, se fosse $f(b) < f(x_0)$, sempre dal teorema di Bolzano esisterebbe $y \in]a, x_0[$ tale che $f(y) = f(b)$ contro l'iniettività di f; le uguaglianze $f(x_0) = f(a)$ e $f(x_0) = f(b)$ sono da escludere sempre a causa dell'iniettività di f. Si è così dimostrato che f è strettamente crescente in $[a, b]$ e ciò era stato escluso. Nello stesso modo si dimostra che la condizione $f(b) < f(a)$ comporta la stretta decrescenza di f in $[a, b]$, anche questa esclusa. Dunque la tesi deve essere vera. □

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è iniettiva, posto $Y = f(X)$ si è convenuto di denotare con $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ la funzione inversa di f ottenuta considerando a valori in tutto $\mathbb{R}$ l'inversa della ridotta di f. Tale funzione inversa può ovviamente essere considerata se f è strettamente monotona; per quanto riguarda la continuità della funzione f^{-1}, si ha quanto segue.

Teorema 6.3.2 (Continuità della funzione inversa)
Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale iniettiva e, posto $Y = f(I)$, si consideri la funzione inversa $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$. Se f è strettamente monotona, la funzione inversa f^{-1} è continua. In particolare, se f è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Si riconosce facilmente che la funzione inversa f^{-1} risulta anch'essa strettamente monotona ed inoltre ha come immagine l'intervallo I. Da quanto osservato preliminarmente, segue che f^{-1} è continua. Se si suppone che f sia continua, dalla Proposizione 6.3.1 precedente, essa risulta strettamente monotona e quindi si può applicare quanto già dimostrato. □

▷ Si approfondisce ora l'analisi degli eventuali punti di discontinuità di una funzione monotona. Si osserva innanzitutto che come conseguenza diretta del Teorema 4.6.1 sul limite delle funzioni monotone, se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale monotona e se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione sia a sinistra che a destra per X, allora f è continua in x_0 se e solo se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ di f in x_0.

Da ciò segue che una funzione monotona $f : X \to \mathbb{R}$ può avere solamente discontinuità di prima specie nei punti di accumulazione a sinistra e a destra.

Nei punti di accumulazione solamente a sinistra o solamente a destra vi possono invece essere solamente discontinuità eliminabili; infatti, le discontinuità di seconda specie sono escluse in quanto affinché una funzione monotona $f : X \to \mathbb{R}$ possa essere non limitata superiormente oppure inferiormente è necessario che X sia non limitato oppure che $\inf(X) \notin X$ oppure $\sup(X) \notin X$; in tutti questi casi la funzione f non è definita nei punti $\inf(X)$ e $\sup(X)$ e quindi in tali punti non ha senso chiedersi se la funzione presenta in tali punti una discontinuità.

Teorema 6.3.3 (Numerabilità delle discontinuità delle funzioni monotone)
Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale monotona. Allora l'insieme

$$D(f) := \{x_0 \in X \mid f \text{ non è continua in } x_0\}$$

dei punti di discontinuità di f è finito oppure al più numerabile.

Dimostrazione. Si può supporre che f sia crescente, altrimenti basta applicare lo stesso procedimento alla funzione $-f$. Per ogni $x_0 \in X$, si denoti con $s(x_0)$ il salto della funzione f in x_0, definito come segue

$$s(x_0) := \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \,, & x_0 \text{ di accumulazione a sinistra e a destra per } X \,, \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) \,, & x_0 \text{ di accumulazione solo a destra per } X \,, \\ f(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \,, & x_0 \text{ di accumulazione solo a sinistra per } X \,. \end{cases}$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si considera inoltre l'insieme

$$D_m(f) := \left\{ x_0 \in X \mid s(x_0) \geq \frac{1}{m+1} \right\}$$

dei punti di discontinuità di f in cui il salto della funzione è maggiore o uguale di $1/(m+1)$. Ovviamente,

$$D(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m(f) \,.$$

Si considerino ora una successione decrescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed una successione crescente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf(X)$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \sup(X)$.

In ogni insieme $X \cap [a_n, b_n]$ la funzione è limitata in quanto è crescente ed è definita agli estremi; segue che per ogni $m \in \mathbb{N}$ l'insieme $D_{n,m}(f) := D_m(f) \cap X \cap [a_n, b_n]$ è finito in quanto la somma di un numero finito di salti maggiori o uguali di $1/(m+1)$ non può superare la differenza $f(b_m) - f(a_m)$. Allora

$$D(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{n,m}(f) \right)$$

è unione numerabile di insiemi finiti e pertanto è finito oppure al più numerabile. □

6.4 Funzioni uniformemente continue

Si supponga che una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ sia continua; allora, per definizione,

$$\forall\, x \in X \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, y \in X \cap]x - \delta, x + \delta[: \;\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

Pertanto, il numero reale strettamente positivo δ dipende oltre che dal numero $\varepsilon > 0$ anche dall'elemento $x \in X$ fissato. Ci si occuperà ora delle funzioni continue per le quali sia possibile scegliere in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$ un numero δ che soddisfi la condizione precedente per ogni $x \in X$.

Precisamente, si assume la seguente definizione.

Definizione 6.4.1 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è una funzione uniformemente continua se soddisfa la condizione seguente*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x, y \in X :\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ . \quad (6.4.1)$$

Ovviamente, una funzione uniformemente continua risulta sempre continua. Il viceversa non vale in generale.

Ad esempio, se si considera la funzione potenza $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, la diseguaglianza $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ fissato, si scrive $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ ed è equivalente a $|(x - y)(x + y)| < \varepsilon$; se si considera $y = x + \delta/2$ con $\delta > 0$, la diseguaglianza precedente diventa $|\delta/2\ (2x + \delta/2)| < \varepsilon$ e non può essere soddisfatta se $x \geq 0$ e $x \geq \varepsilon/delta - \delta/4$. Quindi in questo caso comunque si scelga il numero δ, la (6.4.1) non può essere soddisfatta per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|x - y| < \delta$.

$\triangleright$ Si riconosce facilmente che la somma di due funzioni uniformemente continue è anch'essa uniformemente continua. Se le funzioni sono limitate e uniformemente continue, anche la funzione prodotto è uniformemente continua. Senza l'ipotesi di limitatezza in generale non si può affermare che il prodotto di due funzioni uniformemente continue è uniformemente continua, come accade, ad esempio, per la funzione identica $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, moltiplicata per sé stessa.

$\triangleright$ Nel caso in cui la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, la proprietà di uniforme continuità equivale a quella di continuità.

Teorema 6.4.2 (Teorema sull'uniforme continuità di Heine-Cantor) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che f non sia uniformemente continua. Allora, negando la condizione (6.4.1), deve esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, si possono trovare $x \in [a, b]$ e $y \in [a, b]$ verificanti le condizioni $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, applicando tale proprietà con $\delta = 1/(n + 1)$, si ottengono $a_n \in [a, b]$ e $b_n \in [a, b]$ tali che $|a_n - b_n| < 1/(n + 1)$ e $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0$. Si considerino ora le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $[a, b]$. Esse sono limitate e quindi dal Corollario 5.1.13 esiste una successione $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ estratta dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

convergente verso un numero reale $x_0 \in \mathbb{R}$; poiché $a_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, deve essere anche $x_0 \in [a, b]$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |a_{k(n)} - b_{k(n)}| < \frac{1}{k(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} |a_{k(n)} - b_{k(n)}| = 0$, da cui $\lim_{n\to+\infty} b_{k(n)} = \lim_{n\to+\infty} a_{k(n)} + (b_{k(n)} - a_{k(n)}) = x_0$. Poiché la funzione f è continua in x_0, dalla caratterizzazione sequenziale del limite (Teorema 5.1.3) si deve avere $\lim_{n\to+\infty} f(a_{k(n)}) = f(x_0)$, $\lim_{n\to+\infty} f(b_{k(n)}) = f(x_0)$ e conseguentemente $\lim_{n\to+\infty} |f(a_{k(n)}) - f(b_{k(n)})| = 0$. A questo punto, poiché $\varepsilon_0 > 0$, dalla definizione di limite, deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$, $|f(a_{k(n)}) - f(b_{k(n)})| < \varepsilon_0$, e ciò contraddice la (1). □

▷ Una funzione reale $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se esiste un numero reale $L \in \mathbb{R}_+$ tale che, per ogni $x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \,. \tag{6.4.2}$$

Il numero L viene denominato inoltre *costante di Lipschitz* della funzione f.

Spesso si dice anche che f è L-lipschitziana per indicare che f è lipschitziana e che L è una sua costante di Lipschitz.

▷ Vale il seguente legame con le funzioni uniformemente continue.

Proposizione 6.4.3 *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Sia $L \in \mathbb{R}_+$ una costante di Lipschitz di f. Fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta = \varepsilon/(L + 1)$, dalla (6.4.2) si ha, per ogni $x, y \in X$ tali che $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \frac{L}{L+1}\,\varepsilon < \varepsilon$$

e ciò, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dimostra che f è uniformemente continua. □

La proposizione precedente non può essere invertita nemmeno se f è uniformemente continua in un intervallo chiuso e limitato. Ad esempio, la restrizione della funzione radice quadrata all'intervallo $[0, 1]$ è continua e quindi, per il Teorema 6.4.2, è anche uniformemente continua, ma non è lipschitziana; infatti, se $L \in \mathbb{R}_+$, la diseguaglianza $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ comporta, moltiplicando entrambi i membri per $\sqrt{x} + \sqrt{y}$,

$$|x - y| \leq L|x - y|(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

e può essere verificata solo se $x = y$ oppure se $L \neq 0$ e $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1/L$.

▷ Si osserva infine che se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali lipschitziane con costanti di Lipschitz L_1 e rispettivamente L_2, allora

1) $f + g$ è $(L_1 + L_2)$-lipschitziana.

2) Se f e g sono limitate e se, per ogni $x \in X$, $|f(x)| \leq M_1$ e $|g(x)| \leq M_2$, il prodotto $f \cdot g$ è $(L_1 M_2 + L_2 M_1)$-lipschitziana.

3) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione λf è $|\lambda|\, L$-lipschitziana.