

Capitolo 7

Calcolo differenziale

Il calcolo differenziale mette a disposizione alcuni degli strumenti più efficaci per lo studio di una funzione reale. Nella prima sezione ci si occupa delle definizioni, della loro interpretazione geometrica e delle regole di derivazione; nella seconda sezione si studiano i risultati più importanti riguardanti le funzioni derivabili ed infine nell'ultima sezione i risultati ottenuti vengono applicati allo studio delle funzioni reali.

7.1 Funzioni derivabili

7.1.1 Definizioni ed interpretazione geometrica

Definizione 7.1.1 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è dotata di derivata in x_0 se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In tal caso, tale limite viene denominato derivata di f in x_0 (oppure derivata prima di f in x_0) e denotato con uno dei simboli:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad (\text{talvolta } (Df(x))_{x=x_0}, \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0});$$

pertanto

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (7.1.1)$$

Se, in più, il limite (7.1.1) esiste ed è finito, si dice che f è derivabile in x_0 .

Inoltre, se A è un sottoinsieme di X , si dice che f è dotata di derivata in A (rispettivamente, derivabile in A) se essa è dotata di derivata (rispettivamente, derivabile) in ogni elemento $x_0 \in A$.

Infine, si dice che f è dotata di derivata (rispettivamente, derivabile) se è dotata di derivata in X (rispettivamente, derivabile in X).

Posto $h := x - x_0$, il limite (7.1.1) può essere espresso come segue

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La funzione $R_{x_0}(f) : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$,

$$R_{x_0}(f)(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (7.1.2)$$

viene denominata *funzione rapporto incrementale di f in x_0* . Quindi f è dotata di derivata in x_0 se e solo la funzione rapporto incrementale di f in x_0 è dotata di limite in x_0 e che, in tal caso, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_{x_0}(f)(x).$$

Inoltre, se f è derivabile in x_0 , la funzione $R_{x_0}(f)$ può essere definita anche in x_0 ponendo $R_{x_0}(f) := f'(x_0)$ e in tal modo risulta continua in x_0 . Nel seguito, la funzione $R_{x_0}(f)$ si intenderà definita in tutto X nel case in cui f sia derivabile.

Se il punto x_0 è di accumulazione a destra oppure a sinistra si può definire in maniera analoga la derivata destra o sinistra di f in x_0 . Precisamente, se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione a destra (rispettivamente, a sinistra) per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale, si dice che f è *dotata di derivata destra* (rispettivamente, *sinistra*) in x_0 se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{rispettivamente, } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}).$$

Il limite precedente, se esiste, viene denominato *derivata destra* (rispettivamente, *sinistra*) di f in x_0 e denotato con uno dei simboli:

$$f'_+(x_0), \quad D_d f(x_0) \quad (\text{rispettivamente, } f'_-(x_0), \quad D_s f(x_0));$$

pertanto

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ (\text{rispettivamente, } f'_-(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Se il limite (7.1.3) esiste ed è finito, si dice che f è derivabile a destra (rispettivamente, a sinistra) in x_0 .

Anche in questo caso, se A è un sottoinsieme di X , si dice che f è dotata di derivata destra (rispettivamente, dotata di derivata sinistra, derivabile a destra, derivabile a sinistra) in A se essa è dotata di derivata destra (rispettivamente, dotata di derivata sinistra, derivabile a destra, derivabile a sinistra) in ogni elemento $x_0 \in A$. Quando il sottoinsieme A non viene specificato si intende l'intero X .

Assegnata una funzione reale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, e considerati gli insiemi

$$\begin{aligned} X' &:= \{x_0 \in X \mid f \text{ è derivabile in } x_0\}, \\ X'_+ &:= \{x_0 \in X \mid f \text{ è derivabile a destra in } x_0\}, \\ X'_- &:= \{x_0 \in X \mid f \text{ è derivabile a sinistra in } x_0\}, \end{aligned}$$

si possono definire le funzioni $g : X' \rightarrow \mathbb{R}$, $g_+ : X'_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_- : X'_- \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(x) := f'(x)$ ($x \in X'$), $g'_+(x) := f'_+(x)$ ($x \in X'_+$), $g'_-(x) := f'_-(x)$ ($x \in X'_-$); la funzione g viene denominata *funzione derivata prima di f* e denotata con il simbolo f' , mentre le funzioni g_+ e g_- vengono denominate rispettivamente *funzione derivata destra* e *funzione derivata sinistra* di f e denotate con il simbolo f'_+ e rispettivamente f'_- .

► Dalle definizioni assunte e dai teoremi sui limiti segue direttamente che se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione sia a destra che a sinistra per X , allora una funzione reale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è dotata di derivata (rispettivamente, è derivabile) in x_0 se e solo se f è dotata di derivata a destra e a sinistra (rispettivamente, f è derivabile sia a destra che a sinistra) in x_0 ed inoltre $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

► Nel risultato seguente si esaminano le relazioni esistenti tra derivabilità e continuità.

Proposizione 7.1.2 (Continuità delle funzioni derivabili)

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Se f è derivabile in x_0 , allora essa è continua in x_0 .

Consequentemente, se f è derivabile, allora f è anche continua.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$, si può scrivere

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0);$$

poiché f è derivabile in x_0 , segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

da cui la tesi. $\square$

Si osserva che la Proposizione 7.1.2 non può essere invertita.

Ad esempio, la funzione valore assoluto è continua in 0 ma non è derivabile in 0 in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1,$$

e quindi la derivata destra non coincide con quella sinistra.

► Si considera ora un'interpretazione geometrica della derivata di una funzione in un punto x_0 . Si supponga che $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sia dotata di derivata in x_0 e sia $t \in X \setminus \{x_0\}$; si denoti con P_0 il punto del piano cartesiano di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e con P quello di coordinate $(t, f(t))$. Allora la retta passante per i punti P_0 e P ha equazione

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$

Tale retta viene denominata *secante al grafico* di f nei punti P_0 e P ed il suo coefficiente angolare è dato dal rapporto incrementale di f in x_0 calcolato in t .

Considerando il limite del rapporto incrementale nel punto x_0 , il coefficiente angolare della retta secante tende verso il numero $f'(x_0)$, che rappresenta ancora il coefficiente angolare di una retta passante per P_0 . Tale retta viene denominata *retta tangente al grafico* di f nel punto P_0 .

Considerando il limite per $t \rightarrow x_0$ nell'equazione della retta secante, segue che se f è derivabile in x_0 , l'equazione della retta tangente è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (7.1.4)$$

mentre se f è dotata di derivata in x_0 uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$, l'equazione della retta tangente è

$$x = x_0. \quad (7.1.5)$$

► La stessa interpretazione geometrica può essere fornita per le funzioni che non sono dotate di derivata in x_0 , ma per cui esiste la derivata destra in x_0 e la derivata sinistra in x_0 . Ad esempio, se f è derivabile a destra e a sinistra in x_0 e se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, allora non si può considerare la retta tangente al grafico di f in x_0 , ma si possono considerare la retta tangente a destra al grafico di f in x_0 , di equazione

$$y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

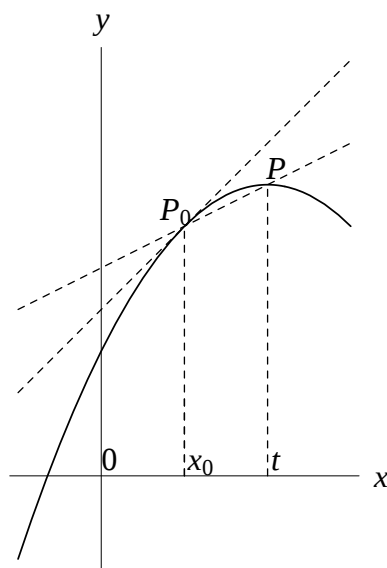


Figura 7.1: *Interpretazione geometrica della derivata.*

e la retta tangente a sinistra al grafico di f in x_0 , di equazione

$$y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) ;$$

in questo caso, il punto x_0 viene detto *punto angoloso*.

Ad esempio, la funzione valore assoluto nel punto 0 è dotata di retta tangente a destra in 0 di equazione $y = x$ e di retta tangente a sinistra in 0 di equazione $y = -x$.

Si può anche presentare il caso in cui la funzione sia dotata di derivata a sinistra di x_0 uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$ e sia invece derivabile a destra di x_0 (o viceversa); in tal caso, la retta tangente a sinistra in x_0 ha equazione $x = x_0$, mentre l'equazione della tangente destra è data da $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$. Il punto x_0 viene denominato punto angoloso anche in questo caso.

Ad esempio, si può considerare ne punto 0 la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(0) := 0$ e $f(x) := e^{1/x}$ se $x \neq 0$. In questo caso la retta di equazione $x = 0$ è tangente a destra al grafico di f in 0, mentre la retta $y = 0$ è tangente a sinistra al grafico di f in 0.

Infine, si può presentare il caso in cui la derivata destra in x_0 è uguale a $+\infty$ e quella sinistra è uguale a $-\infty$ oppure viceversa. In questo caso il punto x_0 viene denominato *punto cuspidale*. Si osservi che il grafico di f è dotato di retta tangente sia a sinistra che a destra di equazione $x = x_0$.

Ad esempio, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{|x|}$. Nel punto 0 si verifica facilmente che $f'_+(0) = +\infty$ mentre $f'_-(0) = -\infty$.

► Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale, si è già considerato l'insieme X' degli elementi di X in cui f è derivabile e si è definita la funzione derivata prima $f' : X' \rightarrow \mathbb{R}$; naturalmente, se $x_0 \in X'$ è un punto di accumulazione per X' ha senso chiedersi se la funzione f' sia a sua volta derivabile in x_0 . Vale quindi la seguente definizione.

Definizione 7.1.3 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che f è dotata di derivata seconda (rispettivamente, derivabile due volte) in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che f sia derivabile in $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e inoltre la funzione derivata prima f' è dotata di derivata (rispettivamente, derivabile) in x_0 . In tal caso, la derivata $(f')'(x_0)$ viene denominata derivata seconda di f in x_0 e denotata con uno dei seguenti simboli*

$$f''(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Inoltre, se A è un sottoinsieme di X , si dice che f è dotata di derivata seconda (rispettivamente, derivabile) in A , se essa è dotata di derivata seconda (rispettivamente, derivabile) in ogni $x_0 \in A$.

Infine, si dice che f è dotata di derivata seconda (rispettivamente, derivabile) se essa è dotata di derivata seconda (rispettivamente, derivabile) in X .

In base alla definizione precedente, si può considerare l'insieme

$$X'' := \{x \in X \mid f \text{ è derivabile due volte in } x\}$$

e si può definire la funzione $g : X'' \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in X''$, $g(x) = f''(x)$.

Tale funzione viene denominata derivata seconda di f e denotata con il simbolo f'' (oppure $D^2 f$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$).

In maniera analoga si definiscono le derivate successive di f in un punto oppure in un sottoinsieme.

Fissato un numero naturale $n \geq 1$, la derivata n -esima di f in un punto x_0 si denota con uno dei simboli

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0),$$

e la funzione derivata n -esima con il simbolo $f^{(n)}$ (oppure $D^n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$).

Per uniformità di notazioni conviene anche porre $f^{(0)} = f$.

► Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, si ricorda che il simbolo $\mathcal{C}(X)$ denota l'insieme di tutte le funzioni reali continue definite in X .

Più in generale, sarà utile considerare, per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$\mathcal{C}^n(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } X \text{ e } f^{(n)} \text{ è continua}\}.$$

L'insieme $\mathcal{C}^0(X)$ coincide con $\mathcal{C}(X)$ e l'insieme $\mathcal{C}^1(X)$ è costituito dalle funzioni derivabili tali che $f' \in \mathcal{C}(X)$.

Le funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sono derivabili n volte per ogni $n \in \mathbb{N}$ vengono denominate *infinite volte derivabili*; si pone

$$\mathcal{C}^\infty(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \text{ è infinite volte derivabile in } X\};$$

ovviamente, la derivata n -esima $f^{(n)}$ di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ è sicuramente continua in quanto è a sua volta derivabile (anzi, $f^{(n)} \in \mathcal{C}^\infty(X)$).

7.1.2 Regole di derivazione

Assegnata una funzione reale, lo studio della sua derivabilità ed il calcolo della derivata può essere effettuato utilizzando le regole di derivazione presentate e il calcolo delle derivate delle funzioni elementari di cui ci si occupa nella presente sezione e nella successiva.

Per semplicità, viene considerato solamente il caso di funzioni derivabili; una discussione del tutto analoga vale per funzioni derivabili a destra oppure a sinistra.

Teorema 7.1.4 (Derivabilità della funzione somma)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali. Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X ed f e g sono derivabili in x_0 , allora $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Consequentemente, se f e g sono derivabili, anche la funzione somma $f + g$ è derivabile e si ha

$$(f + g)' = f' + g'.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal primo teorema sul limite della somma si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0),\end{aligned}$$

da cui segue interamente la tesi. $\square$

Teorema 7.1.5 (Regola di Leibnitz sulla derivabilità della funzione prodotto)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali. Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X ed f e g sono derivabili in x_0 , allora la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Conseguentemente, se f e g sono derivabili, anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile e si ha

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal primo teorema sul limite del prodotto e tenendo presente che g è continua in x_0 (Proposizione 7.1.2), si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

e da ciò segue la tesi. $\square$

Teorema 7.1.6 (Derivabilità della funzione reciproca)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) \neq 0$. Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X e se f è derivabile in x_0 , allora la funzione reciproca $1/f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

Conseguentemente, se f è derivabile, anche la funzione reciproca $1/f$ è derivabile e si ha

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 7.1.2, la funzione f è continua in x_0 e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1/f)(x) - (1/f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(f(x)f(x_0))}{x - x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2},$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 7.1.7 (Derivabilità della funzione quoziente)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali. Si supponga che, per ogni $x \in X$, $g(x) \neq 0$. Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X ed f e g sono derivabili in x_0 , allora la funzione f/g è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Consequentemente, se f e g sono derivabili, anche la funzione quoziente f/g è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g},$$

la derivabilità di f/g deriva direttamente dai Teoremi 7.1.6 e 7.1.5 precedenti; inoltre, dagli stessi teoremi segue

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

e ciò completa la dimostrazione. $\square$

Si esamina, infine, la derivabilità delle funzioni composte e delle funzioni inverse.

Teorema 7.1.8 (Teorema di derivazione delle funzioni composte)

Siano X e Y sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali tali che $f(X) \subset Y$. Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X e si supponga che f sia derivabile in x_0 e, posto $y_0 := f(x_0)$, che y_0 sia di accumulazione per Y e g sia derivabile in y_0 . Allora, la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto osservato in precedenza (vedasi la (7.1.2)), la funzione $R_{y_0}(g) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in y_0 e inoltre, dalla Proposizione 7.1.2, la funzione f è continua in x_0 . Allora, dal teorema sulla continuità delle funzioni composte (Teorema 6.1.3), la funzione $R_{y_0}(g) \circ f$ è continua in x_0 e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} = g'(y_0) .$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(y_0) f'(x_0) \end{aligned}$$

e quindi la tesi. $\square$

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale iniettiva, posto $Y = f(X)$, si può considerare la funzione “inversa” $f^{-1} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ di f . Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X e se f è continua in x_0 , allora l’elemento $y_0 = f(x_0)$ di Y è un punto di accumulazione per Y .

Infatti, considerato un intorno I di y_0 , dalla continuità di f in x_0 , si può trovare un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in I$; l’insieme $X \cap J \setminus \{x_0\}$ è non vuoto in quanto x_0 è di accumulazione per X e considerato $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, dalla iniettività di f , segue $f(x) \neq y_0$, per cui $f(x) \in Y \cap I \setminus \{y_0\}$; segue pertanto che l’insieme $Y \cap I \setminus \{y_0\}$ è non vuoto e ciò, essendo I un intorno arbitrario di y_0 , dimostra che y_0 è di accumulazione per Y .

Per quanto riguarda la derivabilità di f^{-1} in y_0 , si ha quanto segue.

Teorema 7.1.9 (Derivabilità della funzione inversa)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale iniettiva. Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X e si supponga che f sia derivabile in x_0 e che $f'(x_0) \neq 0$. Posto $Y = f(X)$ e $y_0 = f(x_0)$, se la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ di f è continua in y_0 , allora f^{-1} è derivabile in y_0 e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Conseguentemente, se f è derivabile e se f^{-1} è continua, allora f^{-1} è derivabile e si ha

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione $R_{x_0}(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 (vedasi la (7.1.2)) e inoltre nel punto x_0 assume il valore $f'(x_0) \neq 0$ e, dalla iniettività di f , $R_{x_0}(f)(x) \neq 0$ per ogni

$x \in X \setminus \{x_0\}$. Quindi $R_{x_0}(f)$ assume valori sempre diversi da 0 e se ne può considerare la funzione reciproca $1/R_{x_0}(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$, la quale risulta continua in y_0 . Inoltre f^{-1} è continua in y_0 e quindi, dal teorema sulla continuità delle funzioni composte (Teorema 6.1.3), si ha

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{1}{R_{x_0}(f)} \circ f^{-1} \right) (y) = \left(\frac{1}{R_{x_0}(f)} \circ f^{-1} \right) (y_0) ;$$

da tale relazione, essendo per ogni $y \in Y \setminus \{y_0\}$,

$$\left(\frac{1}{R_{x_0}(f)} \circ f^{-1} \right) (y) = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

e inoltre

$$\left(\frac{1}{R_{x_0}(f)} \circ f^{-1} \right) (y) = \frac{1}{R_{x_0}(f)}(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} ,$$

si ha direttamente la tesi. $\square$

$\triangleright$ Se non si suppone che f^{-1} sia continua in y_0 , la tesi del teorema precedente in generale non vale.

Ad esempio, si consideri la funzione reale $f :]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]-1, 1]$,

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in]-1, 0] , \\ x - 1, & x \in]0, 1] ; \end{cases}$$

Nel punto $x_0 = 1$, f è derivabile e si verifica direttamente che $f'(1) = 1 = S 0/0$; inoltre f è iniettiva e la funzione f^{-1} risulta definita in $] - 1, 1]$ e si ha, per ogni $y \in] - 1, 1]$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1, & y \in] - 1, 0] , \\ y + 1, & y \in]0, 1] . \end{cases}$$

Nel punto $y_0 = f(1) = 0$, f^{-1} non è continua e risulta $f_+^{-1}(0) = 1$ e $f_-^{-1}(0) = -1$, per cui f^{-1} non è derivabile in 0.

7.1.3 Derivate delle funzioni elementari

Nella presente sezione vengono calcolate le derivate delle funzioni elementari.

Funzioni potenza ad esponente intero positivo

Si consideri la funzione potenza n -esima $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k} = nx_0^{n-1}$$

(se $n = 1$, si assume per convenzione $x_0^0 = 1$ per $x_0 = 0$). Pertanto la funzione potenza f_n è derivabile in x_0 e $(f_n)'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Dall'arbitrarietà di $x_0 \in \mathbb{R}$, segue che f_n è derivabile e, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Funzioni radice

Si consideri la funzione radice $f_{1/n}$, $n \geq 1$. Se $x_0 \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x_0 + h} - \sqrt[n]{x_0}}{h} &= \sqrt[n]{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}} \frac{\sqrt[n]{x_0 + h} - \sqrt[n]{x_0}}{h} \\ &= \sqrt[n]{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{h/x_0} - 1}{h} \\ &= \frac{\sqrt[n]{x_0}}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{1/n} - 1}{h/x_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/n} - 1}{y} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Segue che $f_{1/n}$ è derivabile in ogni $x \in]0, +\infty[$ per n pari ed in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se n è dispari e la sua derivata è data da

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Per quanto riguarda il punto $x_0 = 0$, per ogni $n \geq 2$ risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = +\infty$$

e quindi la funzione radice n -esima è dotata di derivata in 0 uguale a $+\infty$.

Funzioni potenza ad esponente intero negativo

Si consideri la funzione potenza ad esponente intero negativo $f_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

Tale funzione è la reciproca della restrizione della funzione potenza f_n all'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; essa pertanto è derivabile e, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Funzioni potenza ad esponente razionale o reale

Si consideri la funzione potenza ad esponente razionale o reale f_r definita in $]0, +\infty[$ per $r \leq 0$ ed in $[0, +\infty[$ per $r > 0$. Per ogni $x_0 \in]0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^r - x_0^r}{h} = x_0^r \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^r}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h/x_0)^r - 1}{h/x_0} = x_0^{r-1} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^r - 1}{y} = r x_0^{r-1} .$$

Quindi f_r è derivabile in x_0 e la sua derivata è $r x_0^{r-1}$. Si conclude che f_r è derivabile in $]0, +\infty[$ e, per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha

$$D(x^r) = r x^{r-1} .$$

Se $r > 0$, nel punto $x_0 = 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r}{x} = \begin{cases} 0 , & x > 1 ; \\ 1 , & x = 1 ; \\ +\infty , & 0 < x < 1 . \end{cases}$$

Quindi, se $r \geq 1$, f_r è derivabile in 0 con derivata nulla per $r > 1$ ed uguale ad 1 per $r = 1$ ed è dotata di derivata in 0 uguale a $+\infty$ se $0 < r < 1$.

Funzioni esponenziali

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e si consideri la funzione esponenziale $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \log a .$$

Quindi $\exp_a$ è derivabile e, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$D(a^x) = a^x \log a .$$

In particolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $D(e^x) = e^x$.

Funzioni logaritmo

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e si consideri la funzione logaritmo $\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Dal Teorema 7.1.9 segue che essa è derivabile e, per ogni $x \in]0, +\infty[$, posto $y = \log_a x$, si ha

$$D(\log_a x) = \frac{1}{D(a^y)} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a} .$$

In particolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $D(\log x) = 1/x$.

Funzioni trigonometriche

Si considerano ora le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \cos x_0 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\ &= -\sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= -\sin x_0 . \end{aligned}$$

Quindi le funzioni seno e coseno sono derivabili e si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$D(\sin x) = \cos x , \quad D(\cos x) = -\sin x .$$

Essendo quoziente di funzioni derivabili, dal Teorema 7.1.7 segue che anche le funzioni tangente e cotangente sono derivabili e si ha, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x .$$

e analogamente, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$D(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) .$$

Funzioni trigonometriche inverse

Infine, si considerano le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arco-cotangente.

La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ è derivabile e la sua derivata si annulla solamente nei punti $-\pi/2$ e $\pi/2$, che sono i valori della funzione arcoseno agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$. Dal Teorema 7.1.9 segue che la funzione arcoseno è derivabile in $] -1, 1[$ e per ogni $x \in] -1, 1[$,

posto $y = \arcsin x \in]-\pi/2, \pi/2[$, si ottiene $\sin y = x$ e $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ (si è tenuto presente che nell'intervallo $] -\pi/2, \pi/2[$ il coseno è positivo), per cui

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{D(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Per quanto riguarda i punti -1 ed 1 , si verifica direttamente che in tali punti la funzione arcoseno è dotata di derivata uguale a $+\infty$.

Per la funzione arcocoseno il procedimento è analogo a quello precedente; si osserva che la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è derivabile e la sua derivata si annulla solamente nei punti 0 e π ; tali valori sono assunti dalla funzione arcocoseno nei punti 1 e rispettivamente -1 . Applicando il Teorema 7.1.9 si deduce che la funzione arcocoseno è derivabile in $] -1, 1[$ e per ogni $x \in] -1, 1[$, posto $y = \arccos x \in]0, \pi[$, si ottiene $\cos y = x$ e $\sin y = \sqrt{1-x^2}$ in quanto il coseno è positivo nell'intervallo $]0, \pi[$; pertanto

$$D(\arccos x) = \frac{1}{D(\cos y)} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Nei punti -1 ed 1 , si verifica direttamente che la funzione arcocoseno è dotata di derivata uguale a $-\infty$.

Si consideri ora la funzione arcotangente. In questo caso, la restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\pi/2, \pi/2[$ è derivabile e la sua derivata è sempre diversa da 0 . Dal Teorema 7.1.9 segue che la funzione arcotangente è derivabile e inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, posto $y = \arctan x \in] -\pi/2, \pi/2[$, si ottiene $\tan y = x$, per cui

$$D(\arctan x) = \frac{1}{D(\tan y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} .$$

Infine, per quanto riguarda la derivabilità della funzione arcocotangente, si può procedere come nel caso precedente; la restrizione della funzione cotangente all'intervallo $]0, \pi[$ è derivabile e la sua derivata è sempre diversa da 0 . Dal Teorema 7.1.9 segue che la funzione arcocotangente è derivabile e inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, posto $y = \operatorname{arccot} x \in]0, \pi[$, si ottiene $\cot y = x$, per cui

$$D(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{D(\cot y)} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2} .$$

La derivabilità ed il calcolo della derivata delle funzioni arcocoseno ed arcocotangente potevano essere ottenute alternativamente dalle uguaglianze

$$\operatorname{arccos} = \frac{\pi}{2} - \arcsin , \quad \arctan = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} .$$

Funzione valore assoluto

Si è già osservato che tale funzione non è derivabile in 0 e che in tale punto ha derivata destra uguale ad 1 e derivata sinistra uguale a -1 .

Sia ora $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se $x_0 > 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 ,$$

mentre, se $x_0 < 0$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{x - x_0}{x - x_0} = -1 ,$$

Quindi la funzione valore assoluto è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$D(|x|) = \frac{x}{|x|} \quad (= \frac{|x|}{x}).$$

Osservazione 7.1.10 (*Studio della derivabilità di una funzione reale*) Le regole di derivazione e le derivate delle funzioni elementari consentono in numerosi casi di discutere la derivabilità e, in caso affermativo, di determinare la derivata di una funzione reale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuta mediante operazioni algebriche sulle funzioni elementari. In generale si procede come segue:

1. Innanzitutto, si determina il sottoinsieme D di X dei punti in cui non si può assicurare subito la derivabilità della funzione. Se la funzione è ottenuta mediante operazioni algebriche o di composizione di funzioni elementari, i punti dell'insieme D sono i seguenti:
 - a) punti in cui l'argomento di una funzione radice o di una funzione potenza con esponente compreso tra 0 e 1 è uguale a 0 (in quanto tali funzioni non sono derivabili in 0);
 - b) punti in cui l'argomento di una funzione arcoseno oppure arcoseno è uguale a 1 oppure a -1 (in quanto le funzioni arcoseno e arcocoseno non sono derivabili nei punti ± 1);
 - c) punti in cui l'argomento di un valore assoluto è uguale a 0 (in quanto la funzione valore assoluto non è derivabile nel punto 0).

Esclusi i punti precedenti, si può asserire che la funzione f è derivabile in $X \setminus D$.

2. Utilizzando le regole di derivazione, si calcola la derivata di f nell'insieme $X \setminus D$.

3. Si studia la derivabilità di f in ogni punto $x_0 \in D$. Poiché in questo caso non si possono utilizzare le regole di derivazione, bisogna verificare direttamente la derivabilità attraverso la definizione; nel seguito, si studierà la proprietà di continuità della derivata prima (Teorema 7.2.6) in base alla quale la derivata di f in x_0 , se esiste, viene data dal limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ e quindi per lo studio della derivabilità nei punti $x_0 \in D$, ci si può avvalere dell'espressione della derivata ottenuta al punto 2) precedente.

A questo punto si raccolgono le informazioni ottenute e si precisa definitivamente il sottoinsieme X' di X in cui f è derivabile fornendone il valore della derivata in ogni punto di X' .

7.2 Applicazioni del calcolo differenziale

7.2.1 Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange

Anche per le funzioni derivabili valgono risultati di notevole interesse nel caso in cui queste vengano considerate su un intervallo chiuso e limitato.

Teorema 7.2.1 (Teorema di Rolle)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua in $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è continua, dal teorema di Weierstrass (Teorema 6.2.1), essa è dotata di minimo e di massimo e quindi esistono $c, d \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. Si supponga dapprima che entrambi i punti c e d siano estremi dell'intervallo $[a, b]$ ($c, d \in \{a, b\}$). Dall'ipotesi $f(a) = f(b)$, segue $f(c) = f(d)$ e quindi la funzione f deve essere costante. Allora la derivata di f è costantemente nulla e quindi la tesi è verificata considerando un qualsiasi elemento $x_0 \in]a, b[$.

Si considera ora il caso in cui almeno uno dei punti c oppure d sia interno all'intervallo $[a, b]$. Si supponga che $c \in]a, b[$ per cui f è derivabile in c . Se fosse $f'(c) > 0$, per la proprietà di permanenza del segno applicata alla funzione rapporto incrementale di f relativa a c , si può trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in [a, b] \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\}$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Poiché c è interno all'intervallo $[a, b]$, l'intersezione $[a, b] \cap]c - \delta, c[$ risulta non vuota; considerato $x \in [a, b] \cap]c - \delta, c[$, risulta innanzitutto $(f(x) - f(c))/(x - c) > 0$; essendo $x - c < 0$, dovrà essere anche $f(x) - f(c) < 0$, da cui $f(x) < f(c)$ e ciò contraddice il fatto che $f(c)$ è il minimo di f . Se fosse $f'(c) < 0$, si troverebbe $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in [a, b] \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\}$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0.$$

Poiché c è interno all'intervallo $[a, b]$, si può considerare $x \in [a, b] \cap]c, c + \delta[$ per il quale $(f(x) - f(c))/(x - c) < 0$; allora, essendo $x - c > 0$, si avrebbe ancora $f(x) - f(c) < 0$ e quindi $f(x) < f(c)$, contraddicendo anche in questo caso il fatto che $f(c)$ è il minimo di f .

Si conclude che deve essere necessariamente $f'(c) = 0$ e la tesi segue considerando $x_0 = c$. Se il punto d è interno all'intervallo $[a, b]$, si dimostra in modo analogo che $f'(d) = 0$ e quindi si può considerare $x_0 = d$. $\square$

Tenendo presente l'interpretazione geometrica della derivata, e che il coefficiente angolare di una retta è uguale a 0 se e solo se la retta è parallela all'asse delle ascisse, si può dire che per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato e derivabile tranne al più che agli estremi, esiste una tangente orizzontale in almeno un punto interno a tale intervallo. Si osservi inoltre che i punti interni in cui la derivata di f si annulla sono quelli di massimo e di minimo per f .

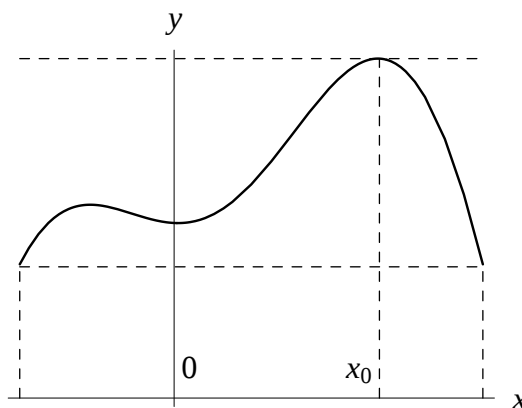


Figura 7.2: Teorema di Rolle.

Dal teorema di Rolle possono essere dedotti facilmente i seguenti ulteriori risultati.

Teorema 7.2.2 (Teorema di Cauchy)

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ e si supponga che, per ogni $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed inoltre esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (7.2.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Se fosse $g(a) = g(b)$, si potrebbe applicare il teorema di Rolle precedente alla funzione g e si otterrebbe l'esistenza di un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui

la derivata di g si annullerebbe, il che è stato escluso per ipotesi. Quindi deve essere $g(a) \neq g(b)$.

Si definisce ora la funzione $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in [a, b]$,

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) .$$

Tale funzione è continua in quanto somma di funzioni continue ed è derivabile in $]a, b[$ in quanto somma di funzioni derivabili in $]a, b[$; si ha inoltre

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a) , \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a) , \end{aligned}$$

e quindi $h(a) = h(b)$. Si può pertanto applicare il teorema di Rolle alla funzione h , e si conclude che esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $h'(x_0) = 0$. Poiché, per ogni $x \in]a, b[$,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x) ,$$

da $h'(x_0) = 0$ segue

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) ,$$

e dividendo entrambi i membri per $g'(x_0) \neq 0$, si ottiene la tesi. $\square$

Teorema 7.2.3 (Teorema di Lagrange, o del valor medio)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \quad (7.2.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri l'ulteriore funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [a, b]$, $g(x) = x$. Tale funzione è derivabile e, per ogni $x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 \neq 0$. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy precedente e pertanto esiste un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} ;$$

poiché $g'(x_0) = 1$ e $g(b) - g(a) = b - a$, la tesi è completamente dimostrata. $\square$

Anche il teorema di Lagrange può essere interpretato geometricamente in modo molto semplice. Si denoti infatti con A il punto del piano cartesiano avente coordinate $(a, f(a))$ e con B quello di coordinate $(b, f(b))$; la retta del piano passante per i punti A e B (cioè, la retta secante il grafico di f nei punti a e b) ha equazione

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ;$$

da ciò segue che il secondo membro della (7.2.2) rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B . Dal teorema di Lagrange, esiste un punto interno $x_0 \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f in x_0 abbia lo stesso coefficiente angolare della retta secante al grafico di f nei punti a e b . Quindi, si conclude che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, esiste almeno un punto interno $x_0 \in]a, b[$ in cui la retta tangente al grafico di f in x_0 e la retta secante il grafico di f nei punti estremi a e b sono parallele.

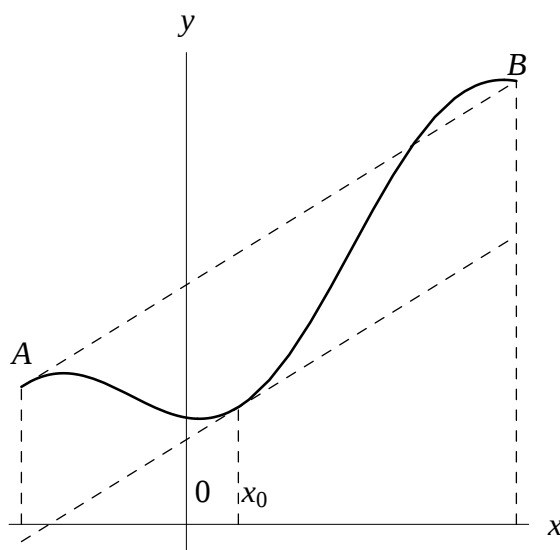


Figura 7.3: *Teorema di Lagrange.*

Il teorema di Lagrange è stato dedotto dal teorema di Cauchy il quale a sua volta è stato dimostrato come conseguenza del teorema di Rolle. Si può osservare inoltre che il teorema di Rolle è un caso particolare del teorema di Lagrange in quanto, se $f(a) = f(b)$, il secondo membro della (7.2.2) è nullo. Si conclude che i Teoremi 7.2.1, 7.2.2 e 7.2.3 sono tra loro equivalenti e conseguono dal teorema di Weierstrass per le funzioni continue e derivabili all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

7.2.2 Teoremi di L'Hôpital

Un'importante applicazione del calcolo differenziale riguarda la possibilità di risolvere in maniera elementare alcuni limiti che si presentano in una forma indeterminata. Si riconosce subito, infatti, che se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili in un punto $x_0 \in X$ con $g'(x_0) \neq 0$ e se $f(x_0) =$

$g(x_0) = 0$, allora per il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Infatti, basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Una situazione più generale viene esaminata nei risultati successivi.

Teorema 7.2.4 (Prima regola di L'Hôpital)

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e si denoti con I uno degli intervalli $]a, x_0[$ oppure $]x_0, b[$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali tali che

1. Per ogni $x \in I$, $g(x) \neq 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
3. f e g sono derivabili con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$;
4. Esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.2.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Per brevità si considera solo il caso in cui $I =]a, x_0[$. Si ponga $\ell := \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$. Per ogni $x \in I$, risulta $g(x) \neq 0$, altrimenti g tenderebbe allo stesso valore 0 in due punti distinti e la sua derivata, come conseguenza del Teorema 7.2.1, si dovrebbe annullare in almeno un punto interno all'intervallo che ha come estremi tali due punti e ciò è escluso dalle ipotesi. In una prima fase si considera il caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, deve esistere $x_1 \in I$ tale che, per ogni $x \in]x_1, x_0[$,

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni $x, t \in]x_1, x_0[, x \neq t$, dal Teorema 7.2.2 di Cauchy, esiste $c \in]x_1, x_0[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)}$$

e quindi

$$\left| \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Sia ora $x \in]x_1, x_0[$; dal fatto che $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow x_0} g(t) = 0$, segue anche $\lim_{t \rightarrow x_0} (f(x) - f(t))/(g(x) - g(t)) = f(x)/g(x)$; se fosse

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| > \frac{\varepsilon}{2},$$

dal fatto che $] -\infty, \ell - \varepsilon/2[\cup] \ell + \varepsilon/2, +\infty[$ è un intorno di $f(x)/g(x)$, seguirebbe l'esistenza di $\delta > 0$ tale che, per ogni $t \in I \cap]x - \delta, x + \delta[\setminus \{x\}$,

$$\left| \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} - \ell \right| > \frac{\varepsilon}{2}$$

e ciò contraddice la (1).

Quindi deve essere, per ogni $x \in]x_1, x_0[$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue quindi la tesi.

Si considera ora il caso in cui $\ell = +\infty$ (se $\ell = -\infty$ si procede analogamente). Allora, fissato $M \in \mathbb{R}$, esiste $x_1 \in I$ tale che, per ogni $x \in]x_1, x_0[$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M + 1.$$

Come nel caso precedente, per ogni $x, t \in]x_1, x_0[, x \neq t$, dal Teorema 7.2.2 di Cauchy, si trova $c \in]x_1, x_0[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)}$$

e quindi

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} > M + 1. \quad (2)$$

Sia ora $x \in]x_1, x_0[$; dal fatto che $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow x_0} g(t) = 0$, segue anche $\lim_{t \rightarrow x_0} (f(x) - f(t))/(g(x) - g(t)) = f(x)/g(x)$; se fosse

$$\frac{f(x)}{g(x)} < M + 1,$$

esisterebbe $\delta > 0$ tale che, per ogni $t \in I \cap]x - \delta, x + \delta[\setminus \{x\}$,

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} < M + 1$$

e ciò contraddice la (2). Allora, per ogni $x \in]x_1, x_0[$, deve essere

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq M + 1 > M$$

e dall'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$ si ha la tesi anche in questo caso. $\square$

Teorema 7.2.5 (Seconda regola di L'Hôpital)

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e si denoti con I uno degli intervalli $]a, x_0[$ oppure $]x_0, b[$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali tali che

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty;$
2. f e g sono derivabili con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$;
3. Esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.2.4)$$

DIMOSTRAZIONE. In questo caso l'ipotesi che g sia diversa da 0 in un intorno di x_0 è assicurata dal fatto che il limite del suo valore assoluto è infinito. Anche ora si considera per brevità il caso in cui $I =]a, x_0[$ e si pone $\ell := \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$.

Si suppone in una prima fase che $\ell \in \mathbb{R}$ e si fissa $\varepsilon > 0$. Essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x) = \ell$, si può trovare $x_1 \in I$ tale che, per ogni $x \in]x_1, x_0[$,

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si fissi $t \in]x_1, x_0[$; per ogni $x \in]x_1, x_0[$, $x \neq t$, dal Teorema 7.2.2 di Cauchy, esiste $c \in]x_1, x_0[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)}$$

e quindi

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$, si può trovare $x_2 \in]x_1, x_0[$ tale che, per ogni $x \in]x_2, x_0[$, $|f(t)| < |f(x)|$ e $|g(t)| < |g(x)|$. Pertanto, posto

$$\chi(x) := \frac{1 - \frac{f(t)}{f(x)}}{1 - \frac{g(t)}{g(x)}}$$

per ogni $x \in]x_2, x_0[$, si ha $\chi(x) > 0$ e

$$\frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \chi(x) ;$$

conseguentemente, la (1) può essere scritta al modo seguente, per ogni $x \in]x_2, x_0[$,

$$\frac{\ell - \varepsilon/2}{\chi(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{\ell + \varepsilon/2}{\chi(x)} . \quad (2)$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x) = 1$, si può considerare $x_3 \in]x_2, x_0[$ tale che, per ogni $x \in]x_3, x_0[$,

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{\ell - \varepsilon/2}{\chi(x)} , \quad \frac{\ell + \varepsilon/2}{\chi(x)} \leq \ell + \varepsilon$$

e quindi, dalla (2),

$$\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \ell$ e quindi la tesi.

Si considera ora il caso in cui $\ell = +\infty$ (se $\ell = -\infty$ il procedimento è analogo). Fissato $M \in \mathbb{R}$, da $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x) = \ell$, segue l'esistenza di $x_1 \in I$ tale che, per ogni $x \in]x_1, x_0[$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M + 1 .$$

Si fissi ora $t \in]x_1, x_0[$; per ogni $x \in]x_1, x_0[$, $x \neq t$, dal Teorema 7.2.2 di Cauchy, esiste $c \in]x_1, x_0[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)}$$

e quindi

$$\frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} > M + 1 . \quad (3)$$

Come nel caso precedente, poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$, esiste $x_2 \in]x_1, x_0[$ tale che, per ogni $x \in]x_2, x_0[$, $|f(t)| < |f(x)|$ e $|g(t)| < |g(x)|$ e quindi, posto

$$\chi(x) := \frac{1 - \frac{f(t)}{f(x)}}{1 - \frac{g(t)}{g(x)}} ;$$

dunque, la (3) diviene, per ogni $x \in]x_2, x_0[$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{M + 1}{\chi(x)} . \quad (4)$$

Essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x) = 1$, risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} (M + 1)/\chi(x) = M + 1$ e pertanto si può considerare $x_3 \in]x_2, x_0[$ tale che, per ogni $x \in]x_3, x_0[$,

$$\frac{M + 1}{\chi(x)} > M .$$

Dalla (4) segue, per ogni $x \in]x_3, x_0[$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M.$$

Dall'arbitrarietà di $M \in \mathbb{R}$ si ottiene la tesi. $\square$

► Nei risultati precedenti sono state considerate funzioni reali definite in intervalli del tipo $]a, x_0[$ oppure $]x_0, b[$ e quindi i limiti considerati coincidono con i limiti da sinistra oppure da destra in x_0 . Naturalmente, considerando separatamente i limiti da destra e da sinistra in x_0 , gli stessi risultati valgono per funzioni definite in $]a, b[\setminus \{x_0\}$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

► Conviene osservare che i Teoremi 7.2.4 e 7.2.5 forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza del limite del rapporto di due funzioni. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni non esista, non si può concludere nulla per quanto riguarda il limite del rapporto delle due funzioni e bisogna ricorrere a metodi differenti.

► Ad esempio, si consideri il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sin x},$$

il quale si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$; tenendo presente che, per ogni $x > 1$,

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{x+\sin x} \leq \frac{x}{x-1},$$

si riconosce subito che tale limite è uguale ad 1; invece, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/(1 + \cos x)$ del rapporto delle derivate non esiste.

► Bisogna naturalmente anche accertarsi che il limite si presenti in una delle forme indeterminate previste nei teoremi precedenti, altrimenti l'applicazione delle regole di L'Hôpital può portare a risultati errati.

Ad esempio, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \tan x}{x+1}$$

non esiste, mentre il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tan x + x(1 + \tan^2 x))$ del rapporto delle derivate è uguale a $+\infty$.

► In generale, può anche capitare che il limite del rapporto delle derivate si presenti anch'esso in una forma indeterminata. In tal caso, si può cercare di continuare ad applicare ancora la stessa regola di L'Hôpital e studiare così il limite del rapporto delle derivate seconde o ancora successive delle due funzioni. Più precisamente, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni reali

derivabili n volte ($n \geq 1$) e si supponga che, per ogni $k = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in I$, $g^{(k)}(x) \neq 0$. Se, per ogni $k = 0, \dots, n-1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g^{(k)}(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f^{(k)}(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g^{(k)}(x)| = +\infty,$$

e se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, allora esiste anche il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

► Le regole di L'Hôpital possono essere applicate in maniera opportuna anche ad altre forme indeterminate.

- la forma indeterminata $0 \cdot (\pm\infty)$ può essere ricondotta a quelle previste nei risultati precedenti tenendo presente che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

- Anche la forma indeterminata $+\infty - \infty$ può essere ricondotta a quelle previste dalle regole di L'Hôpital tenendo presente che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) + g(x) = \frac{\frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Alternativamente, si può tenere presente che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) + g(x) = f(x) \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)} \right) = g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1 \right).$$

- Anche le forme indeterminate $1^{+\infty}$, 0^0 , $(\pm\infty)^0$ possono essere ricondotte ai casi già considerati tenendo presente che, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni reali e se, per ogni $x \in I$, $f(x) > 0$ allora, per ogni $x \in I$,

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))}.$$

► Una interessante conseguenza della prima regola di L'Hôpital riguarda la continuità della derivata prima; si può osservare, infatti, che il limite del rapporto incrementale $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ di una funzione f continua in un punto x_0 si presenta nella forma indeterminata $0/0$; applicando il Teorema 7.2.4 a tale limite si ottiene il seguente criterio di derivabilità.

Teorema 7.2.6 (Continuità della derivata)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, allora f è dotata di derivata in x_0 e si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) . \quad (7.2.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è continua in x_0 , il limite del rapporto incrementale di f in x_0 si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Inoltre, per tale limite sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 7.2.4 e da esso si ottiene la tesi. $\square$

Dal risultato precedente segue che se il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ esiste ed è finito, la funzione f è derivabile in x_0 e vale la (7.2.5) (se il limite esiste ma non è finito, la funzione risulta solamente dotata di derivata in x_0).

Come conseguenza di tale risultato, se la derivabilità di una funzione in un punto non viene assicurata dalle regole di derivazione si può studiare semplicemente il limite della derivata prima in tale punto piuttosto che il limite del rapporto incrementale.

7.2.3 Formula di Taylor

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in X$ di accumulazione per X ; si è visto nella sezione precedente che il grafico di f è dotato di retta tangente nel punto x_0 avente equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Se $x \in X$, la differenza tra il valore della funzione e quello della retta tangente in x è data da $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 ;$$

quindi la differenza tra il valore della funzione e quello della retta tangente al grafico di f in x_0 è un infinitesimo di ordine maggiore di 1. Ci si può ora chiedere in modo abbastanza naturale se sia possibile ottenere un'approssimazione più soddisfacente dei valori della funzione considerando polinomi di grado maggiore di 1. I polinomi adatti a tale scopo si ottengono imponendo

nel punto x_0 il valore del polinomio e quello delle sue derivate fino ad un ordine fissato uguali rispettivamente al valore della funzione e delle sue derivate nel punto x_0 fino allo stesso ordine.

Definizione 7.2.7 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile n volte in x_0 ($n \in \mathbb{N}$). Si dice polinomio di Taylor di f di grado n relativo ad x_0 il polinomio $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definito ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,*

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \quad (7.2.6)$$

$$+ \cdots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \quad (7.2.7)$$

(per $k = 0$, valgono le convenzioni $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $(x - x_0)^0 = 1$ se $x = x_0$).¹

Il polinomio T_0 si riduce alla funzione costante di costante valore $f(x_0)$, mentre T_1 fornisce l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 .

Si riconosce facilmente che, per ogni $k, p \in \mathbb{N}$,

$$D^p((x - x_0)^k) = \begin{cases} k(k-1) \cdots (k-p+1)(x - x_0)^{k-p}, & p < k, \\ k!, & p = k, \\ 0, & p > k, \end{cases} \quad (7.2.8)$$

e conseguentemente, per ogni $k = 0, \dots, n$,

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0). \quad (7.2.9)$$

Si osserva ancora che, per induzione su $j = 0, \dots, n$, dalla (7.2.8) si riconosce facilmente la validità della formula

$$T_n(f)^{(j)} = T_{n-j}(f^{(j)}), \quad (7.2.10)$$

cioè la derivata j -esima del polinomio di Taylor di ordine n della funzione f in x_0 coincide con il polinomio di Taylor di ordine $n-j$ della derivata j -esima di f in x_0 .

¹Se occorre specificare la funzione f alla quale si riferisce il polinomio di Taylor T_n viene preferita la notazione $T_n(f)$ e se occorre specificare anche il punto x_0 si usa la notazione $T_n(f, x_0)$.

► Ad esempio, si consideri la funzione $f(x) := x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ ed il punto iniziale $x_0 = 0$; si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 0, & T_6(x) &= T_7(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120}, \\ T_2(x) &= T_3(x) = x^2, & T_8(x) &= T_9(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^8}{5040}, \\ T_4(x) &= T_5(x) = x^2 - \frac{x^4}{6}, & T_{10}(x) &= x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^8}{5040} + \frac{x^{10}}{362880}; \end{aligned}$$

nella Figura 7.4 viene tracciato approssimativamente il grafico di T_2 , T_4 , T_6 , T_8 e $T_{10} = x^2 - x^4/6 + x^6/120 - x^8/5040 + x^{10}/362880$ e si può notare come i polinomi di Taylor approssimino sempre meglio la funzione assegnata in un intorno del punto 0.

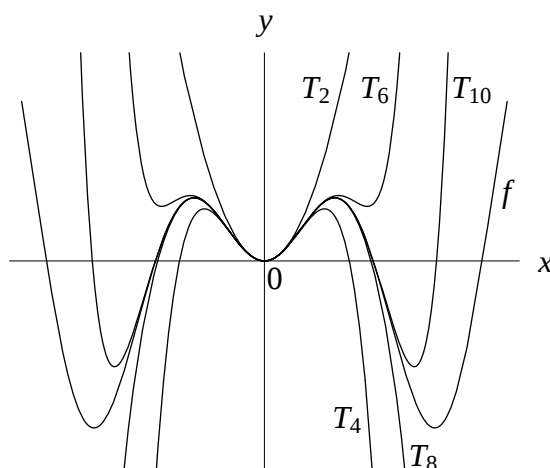


Figura 7.4: Polinomi di Taylor.

Tale aspetto dei polinomi di Taylor viene messo in evidenza nel risultato seguente.

Teorema 7.2.8 (Formula di Taylor con il resto di Peano)

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile n volte in x_0 ed $n - 1$ volte in $I \setminus \{x_0\}$ con $n \geq 1$.

Allora esiste una funzione $\sigma_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = T_n(x) + \sigma_n(x) \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad (7.2.11)$$

ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x) = 0. \quad (7.2.12)$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza (3.6) è verificata considerando la funzione $\sigma_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$\sigma_n(x) := \begin{cases} \frac{n!}{(x-x_0)^n} (f(x) - T_n(x)) , & x \neq x_0 , \\ 0 , & x = x_0 . \end{cases}$$

Bisogna pertanto dimostrare la (7.2.12), cioè che σ_n è continua in x_0 . Il limite (7.2.12) si presenta nella forma indeterminata $0/0$ e ad esso si può applicare la regola di L'Hôpital.

Dalle (7.2.9) e (7.2.10), segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n-j)}(x) - T_j(f^{(n-j)})(x) = f^{(n-j)}(x_0) - T_j(f^{(n-j)})(x_0) = 0$$

per ogni $j = 1, \dots, n-1$ e quindi, ancora dalla (7.2.10) e dal Teorema 7.2.4, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x) &= n! \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(f)(x)}{(x-x_0)^n} = n! \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}(f')(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\ &= (n-1)! \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - T_{n-2}(f'')(x)}{(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_1(f^{(n-1)})(x)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0 \end{aligned}$$

e quindi la tesi è completamente dimostrata. $\square$

La formula (7.2.8) viene denominata *formula di Taylor* di f di punto iniziale x_0 e di ordine n con il *resto di Peano*. Nel caso in cui $x_0 = 0$, essa viene denominata *formula di McLaurin* di f di ordine n con il *resto di Peano* e diventa, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \sigma_n(x) \frac{x^n}{n!} . \quad (7.2.13)$$

► Un modo alternativo di esprimere il resto è espresso nel risultato successivo che rappresenta una generalizzazione del teorema di Lagrange. Per comodità, se x_0 ed x sono numeri reali distinti, conviene denotare con $I(x_0, x)$ l'intervallo aperto di estremi x_0 ed x , cioè

$$I(x_0, x) := \begin{cases}]x_0, x[, & x_0 < x , \\]x, x_0[, & x < x_0 . \end{cases}$$

Teorema 7.2.9 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile n volte ($n \geq 1$) in $I \setminus \{x_0\}$ ed $n-1$ volte in x_0 con $f^{(n-1)}$ continua in x_0 .

Allora, per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, esiste $\xi \in I(x_0, x)$ tale che

$$f(x) = T_{n-1}(x) + f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!} . \quad (7.2.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Si fissi $x \in I \setminus \{x_0\}$ e si denoti con I l'intervallo chiuso avente x ed x_0 come estremi. Si definisce ora la funzione $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $t \in I$,

$$\begin{aligned} F(t) &:= T_{n-1}(f, t)(x) + \frac{(x - t)^n}{(x - x_0)^n} (f(x) - T_{n-1}(f, x_0)(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(t) \frac{(x - t)^k}{k!} + \frac{(x - t)^n}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) . \end{aligned}$$

Dalle ipotesi assunte sulla funzione f , segue che F è continua in I e derivabile in $I(x_0, x)$; inoltre

$$\begin{aligned} F(x) &= T_{n-1}(f, x)(x) = f(x) , \\ F(x_0) &= T_{n-1}(f, x_0)(x) + (f(x) - T_{n-1}(f, x_0)(x)) = f(x) , \end{aligned}$$

e quindi, dal Teorema 7.2.1 di Rolle, esiste $\xi \in I(x_0, x)$ tale che $F'(\xi) = 0$. Tenendo presente che, per ogni $t \in I(x_0, x)$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f^{(k+1)}(t) \frac{(x - t)^k}{k!} - f^{(k)}(t) \frac{(x - t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &\quad - \frac{n(x - t)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) \\ &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(t) \frac{(x - t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k+1)}(t) \frac{(x - t)^k}{k!} \\ &\quad - \frac{n(x - t)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) \\ &= f'(t) + f^{(n)}(t) \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} - f'(t) \\ &\quad - \frac{n(x - t)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) \\ &= f^{(n)}(t) \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n(x - t)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) \\ &= \frac{n(x - t)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \left(f^{(n)}(t) \frac{(x - x_0)^n}{n!} - \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) \right) , \end{aligned}$$

si conclude che deve essere

$$f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!} = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

e da quest'ultima si ottiene la tesi. $\square$

La formula (7.2.14) viene denominata *formula di Taylor* di f di punto iniziale x_0 e di ordine n con il *resto di Lagrange*.

Anche in questo caso, se $x_0 = 0$, essa viene denominata *formula di McLaurin* di f di ordine n con il resto di Lagrange e si scrive nel seguente modo, per ogni $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + f^{(n)}(\xi) \frac{x^n}{n!}, \quad (7.2.15)$$

$|\xi| < |x|$.

Nel caso $n = 1$, la (7.2.14) si riduce ovviamente al Teorema 7.2.3 di Lagrange.

Osservazione 7.2.10 La formula di Taylor con il resto di Lagrange consente anche di valutare l'errore che si commette approssimando una funzione con il polinomio di Taylor di ordine n in un intorno di un punto x_0 .

Infatti, nelle ipotesi del Teorema 7.2.9 e supposto che $f^{(n)}$ sia limitata in $I \setminus \{x_0\}$, allora, posto $M := \sup_{x \in I \setminus \{x_0\}} |f^{(n)}(x)|$, per ogni $x \in I$, si ha

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \quad (7.2.16)$$

Convienne a questo punto scrivere la formula di Taylor per alcune funzioni elementari.

Formula di Taylor per i polinomi

Sia $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio di grado n e siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$, tali che $P(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ovviamente, P è una funzione infinite volte derivabile e si ha $P^{(n)}(x) = a_n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre tutte le derivate successive $P^{(k)}$ con $k > n$ sono nulle. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, la formula di Taylor di P di ordine n relativa ad x_0 con il resto di Lagrange; in questo caso, per ogni $x \in \mathbb{R}$, considerato l'elemento $\xi \in I(x_0, x)$ previsto nella (7.2.14), si ha $P^{(n)}(\xi) = a_n = P^{(n)}(x_0)$ e quindi

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque il polinomio P viene completamente determinato dal valore che assume in x_0 insieme a quelli delle sue derivate in x_0 fino all'ordine n .

Formula di Taylor per le funzioni esponenziali

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e si consideri la funzione esponenziale $\exp_a$ di base a . Tale funzione è infinite volte derivabile e si riconosce facilmente per induzione su n che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, risulta $D^n(a^x) = a^x \log^n a$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la derivata n -esima della funzione $\exp_a$ assume il valore $\log^n a$ nel punto 0; pertanto, la formula di Mc Laurin di $\exp_a$ di ordine n si scrive, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$a^x = \sum_{k=0}^{n-1} \log^k a \frac{x^k}{k!} + a^\xi \log^n a \frac{x^n}{n!},$$

con $\xi \in I(0, x)$.

Inoltre, dalla (7.2.16) si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| a^x - \sum_{k=0}^{n-1} \log^k a \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max\{a^x, 1\} |\log^n a| \frac{|x|^n}{n!}.$$

Nel caso della funzione esponenziale avente come base il numero di Nepero, le formule precedenti diventano, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^n}{n!},$$

con $\xi \in I(0, x)$ e

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max\{e^x, 1\} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Formula di Taylor per le funzioni logaritmiche

Sia $a > 0$ con $a \neq 1$ e si consideri la funzione logaritmo $\log_a$ di base a . Tale funzione è infinite volte derivabile e procedendo per induzione su n , si riconosce che, per ogni $n \geq 1$ ed $x \in]0, +\infty[$,

$$D^n(\log_a x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \log a}.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la derivata n -esima della funzione $\log_a$ assume il valore $(-1)^{n-1} (n-1)! / \log a$ nel punto 1. Conseguentemente, tenendo presente che $\log_a 1 = 0$, la formula di Taylor di $\log_a$ di ordine n relativa al punto 1 si scrive, per ogni $x \in]0, +\infty[$,

$$\log_a x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k \log a} (x-1)^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n \xi^n \log a} (x-1)^n,$$

con $\xi \in I(1, x)$. In varie applicazioni può essere utile scrivere quest'ultima formula nella forma seguente, per ogni $x \in]-1, 1]$,

$$\log_a(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k \log a} x^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n \xi^n \log a} x^n ;$$

poiché $x \in]-1, 1]$, si ha anche $|\xi| < |x|$ e quindi il resto di Lagrange verifica la condizione

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n \xi^n \log a} x^n \right| \leq \frac{1}{n |\log a|} .$$

Formula di Taylor per le funzioni seno e coseno

Procedendo con gli stessi metodi dei casi precedenti, si possono scrivere le formule di Mc Laurin di ordine $2n+1$ e rispettivamente $2n$ delle funzioni seno e coseno. Tenendo presente che $D(\sin x) = \cos x$ e $D(\cos x) = -\sin x$, si deduce che le derivate di ogni ordine di tali funzioni assumono valori compresi tra -1 ed 1 . Inoltre, nel punto 0 le derivate di ordine pari della funzione seno e quelle di ordine dispari della funzione coseno sono nulle. Pertanto le relative formule di Mc Laurin assumono la seguente forma, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \theta(x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \eta(x) \frac{x^{2n}}{(2n)!} , \end{aligned}$$

con $\theta(x) \in [-1, 1]$ ed $\eta(x) \in [-1, 1]$ opportuni.

Si ottiene ovviamente, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \sin x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| &\leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} . \end{aligned}$$

Gli esempi precedenti possono essere estesi con gli stessi metodi per scrivere la formula di Taylor di ogni funzione elementare relativa ad un fissato punto x_0 .

7.2.4 Simboli di Landau e applicazioni della formula di Taylor al calcolo dei limiti

La formula di Taylor può essere utilizzata alternativamente alle regole di L'Hôpital per la risoluzione delle forme indeterminate.

Si introducono innanzitutto alcune notazioni che evidenziano la parte principale di un infinitesimo; tali notazioni consistono nell'uso dei *simboli di Landau* che vengono introdotti nel modo seguente.

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni definite in X .

Si dice che “ $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per x tendente verso x_0 ” e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) , \quad x \rightarrow x_0 ,$$

se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (se f e g sono infinitesime in x_0 , ciò equivale al fatto che f è un infinitesimo in x_0 di ordine maggiore di g).

Inoltre, si dice che “ $f(x)$ è o grande di $g(x)$ per x tendente verso x_0 ” e si scrive

$$f(x) = O(g(x)) , \quad x \rightarrow x_0 ,$$

se il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitato in un intorno di x_0 (se f e g sono infinitesime in x_0 , ciò equivale al fatto che f è un infinitesimo in x_0 di ordine maggiore o uguale di g).

Tali notazioni consentono di scrivere in modo più semplice diverse formule evitando l'introduzione di funzioni che denotano infinitesimi di ordine superiore.

Ad esempio, la formula di Taylor (7.2.11) si può scrivere

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) , \quad x \rightarrow x_0 ,$$

in quanto $\sigma_n(x)(x - x_0)^n/n! = o((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$.

In modo analogo, nelle ipotesi dell'Osservazione 7.2.10, la (7.2.16) diventa

$$f(x) - T_{n-1}(x) = O((x - x_0)^n) , \quad x \rightarrow x_0 ,$$

in quanto $M(x - x_0)^n/n! = O((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$.

Si lascia per esercizio lo sviluppo delle funzioni elementari utilizzando i simboli di Landau e le formule di McLaurin con il resto di Peano; ad esempio,

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \\ \log_a(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k \log a} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

► Nel calcolo dei limiti è spesso conveniente utilizzare la formula di Taylor per esprimere un infinitesimo in maniera equivalente mediante funzioni potenza; a tal fine è sufficiente considerare la prima derivata non nulla delle funzioni in esame nel punto x_0 ; ad esempio, le prime derivate della funzione $f(x) := \arcsin^2(x)$ nel punto 0 sono date da

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2$$

e quindi $f(x) = 2x^2/2! + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$; quindi $f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$.

Si considera come esempio lo studio del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin x - \arcsin x}.$$

Si determinano dapprima le derivate della funzione $f(x) := x - \arcsin x$ nel punto 0 al fine di trovarne la prima non nulla. Si ha

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

e quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine 3 equivalente a $-x^3/3!$ (infatti $f(x) = -x^3/3! + o(x^3)$).

Si procede ora in maniera analoga per la funzione $g(x) := \sin x - \arcsin x$ e si ha

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) = -2$$

e quindi il denominatore è un infinitesimo di ordine 3 equivalente a $-2x^3/3!$ (infatti $g(x) = -2x^3/3! + o(x^3)$).

Allora, dalla regola di sostituzione Proposizione 4.10.5, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3!}{-2x^3/3!} = \frac{1}{2}.$$

► Si vuole approssimare il numero di Nepero con un errore minore di $1/100$. Applicando la stima già ottenuta nel punto $x = 1$, si ha, per ogni $n \geq 1$,

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!}.$$

Pertanto, bisogna trovare $n \geq 1$ tale che $3/n! < 1/100$ e quindi basta considerare, ad esempio, $n = 6$. Il valore approssimato richiesto è quindi dato da

$$e \sim \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \sim 2,71667.$$

7.3 Studio del grafico delle funzioni reali

Nella presente sezione verranno esaminate innanzitutto le connessioni tra il segno della derivata prima e la monotonia di una funzione; verranno poi studiate ulteriori proprietà delle funzioni reali quali la convessità, la concavità ed i punti di flesso e la loro connessione con lo studio della derivata seconda.

Inoltre si definiscono gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui al grafico di una funzione reale e se ne studia l'esistenza.

Infine, viene descritto il metodo generale per lo studio del grafico di una funzione reale.

7.3.1 Monotonia e massimi e minimi relativi ed assoluti

Poiché la nozione di derivata ha carattere locale, trattandosi di un limite, si possono ottenere in maniera diretta alcune connessioni tra il segno della derivata prima in un punto e la crescita e decrescenza della funzione nello stesso punto.

Proposizione 7.3.1 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile in x_0 . Si ha*

- 1) *Se $f'(x_0) > 0$ (rispettivamente, $f'(x_0) < 0$), allora f è strettamente crescente (rispettivamente, strettamente decrescente) in x_0 .*

2) Se f è crescente (rispettivamente, decrescente) in x_0 , allora $f'(x_0) \geq 0$ (rispettivamente, $f'(x_0) \leq 0$).

DIMOSTRAZIONE. 1) Dalla proprietà di permanenza del segno per i limiti, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Pertanto il numeratore ed il denominatore del rapporto incrementale devono avere lo stesso segno, da cui

$$\begin{aligned} x_0 < x < x_0 + \delta &\implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies f(x_0) < f(x), \\ x_0 - \delta < x < x_0 &\implies f(x) - f(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0), \end{aligned}$$

e quindi f è strettamente crescente in x_0 . Il caso rispettivo si dimostra in maniera analoga.

2) Si supponga che f sia crescente in x_0 . Se fosse, per assurdo, $f'(x_0) < 0$, dal caso 1) appena dimostrato seguirebbe che f è strettamente decrescente in x_0 e si avrebbe una contraddizione. Il caso rispettivo è analogo. $\square$

Una prima conseguenza della Proposizione 7.3.1 riguarda una condizione necessaria per massimi e minimi relativi di una funzione.

Corollario 7.3.2 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione a sinistra e a destra per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile in x_0 . Se x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo per f , allora $f'(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga per assurdo che $f'(x_0) > 0$. Dalla Proposizione 7.3.1, segue che f è strettamente crescente in x_0 e quindi esiste $\delta_1 > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\}$,

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \implies f(x) > f(x_0), \quad x_0 - \delta_1 < x < x_0 \implies f(x) < f(x_0).$$

Inoltre, x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f e quindi esiste $\delta_2 > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{rispettivamente, } f(x) \geq f(x_0)).$$

Si ponga ora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; poiché x_0 è di accumulazione a destra per X , si può considerare $\bar{x} \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[$, per il quale si ottiene contemporaneamente $f(\bar{x}) > f(x_0)$ e $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$ e quindi una contraddizione; nel caso rispettivo, poiché x_0 è di accumulazione anche a sinistra, si considera $\bar{x} \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e si ricava ancora una contraddizione. Dunque non può essere $f'(x_0) > 0$. In modo analogo si riconosce che la condizione $f'(x_0) < 0$ conduce ad una contraddizione e quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. $\square$

Si osservi che nella dimostrazione precedente l'assurdo è derivato dal fatto che il punto x_0 è stato supposto di accumulazione sia a sinistra che a destra

per X . Infatti, si riconosce facilmente che una funzione che ammette un massimo o un minimo relativo in un estremo ed è ivi derivabile, non ha necessariamente derivata nulla in tale estremo. Ad esempio, si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1]$, $f(x) := x$.

► Se una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è definita in un intervallo I , le connessioni tra la monotonia globale e locale studiate nell'Osservazione 1.5.5 insieme alla Proposizione 7.3.1 forniscono subito il seguente risultato.

Proposizione 7.3.3 *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile. Si ha*

1. *(Caratterizzazione della monotonia) f è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se verifica la condizione seguente*

$$\forall x_0 \in I : f'(x_0) \geq 0 \quad (\text{rispettivamente, } f'(x_0) \leq 0). \quad (7.3.1)$$

2. *(Caratterizzazione della stretta monotonia) f è strettamente crescente (rispettivamente, strettamente decrescente) se e solo se verifica la condizione (7.3.1) ed inoltre f' non è costantemente nulla in alcun intervallo contenuto in I , cioè*

$$a, b \in I, a < b \implies \exists x_0 \in]a, b[\text{ t.c. } f'(x_0) \neq 0. \quad (7.3.2)$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Se f è crescente, essa verifica ovviamente la condizione (7.3.1) come conseguenza della Proposizione 7.3.1. Viceversa, si supponga che, per ogni $x_0 \in I$, $f'(x_0) \geq 0$. Se f non fosse crescente, esisterebbero due elementi $a, b \in I$ con $a < b$ tali che $f(b) < f(a)$. Dal Teorema 7.2.3 di Lagrange applicato alla restrizione di f all'intervallo $[a, b]$, si otterrebbe $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = (f(b) - f(a))/(b - a) < 0$ e ciò è escluso. Quindi f deve essere crescente. La dimostrazione è analoga nel caso rispettivo.

2) Se f è strettamente crescente essa è anche crescente e quindi dalla prima parte deve soddisfare la condizione (7.3.1). Se f' fosse costantemente uguale a 0 in un intervallo $[a, b] \subset I$, dalla stretta crescita si avrebbe innanzitutto $f(a) < f(b)$; inoltre, dal Teorema 7.2.3 di Lagrange applicato alla restrizione di f all'intervallo $[a, b]$, si otterrebbe $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = (f(b) - f(a))/(b - a) > 0$ e ciò è assurdo in quanto deve essere $f'(x_0) = 0$. Pertanto, anche la condizione (7.3.2) è dimostrata.

Viceversa, dalla (7.3.1) e dalla prima parte dimostrata segue innanzitutto che f è crescente e pertanto è sufficiente dimostrare che essa è anche iniettiva (vedasi la Proposizione 1.5.3). Si supponga, per assurdo, che esistano due elementi $a, b \in I$, con $a < b$, tali che $f(a) = f(b)$. Dalla monotonia di f , per ogni $x \in [a, b]$, si deve avere $f(x) = f(a) = f(b)$; essendo f costante in $[a, b]$, la sua derivata si annulla nell'intervallo $[a, b]$ e ciò contraddice la condizione (7.3.2). Quindi f è iniettiva e ciò completa la dimostrazione. Il caso rispettivo si dimostra in maniera analoga. $\square$

Le caratterizzazioni precedenti non valgono se la funzione non è definita in un intervallo; ad esempio, la derivata della funzione $f(x) = -1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

è strettamente positiva in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma la funzione non è strettamente crescente (ad esempio, $-1 < 1$ ma $f(-1) > f(1)$).

Le caratterizzazioni ottenute possono comunque essere sempre applicate alle restrizioni della funzione ad ogni intervallo contenuto nell'insieme di definizione.

► Nella dimostrazione della seconda parte della proposizione precedente, si è visto anche che se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ha derivata costantemente nulla in un intervallo I , allora essa è costante.

Anche in questo caso la tesi risulta falsa se la funzione non è definita in un intervallo; ad esempio, si consideri la funzione $f(x) = x/|x|$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

► Si studiano ora alcune condizioni sufficienti per i punti di massimo e minimo relativo.

Il primo criterio segue direttamente dalla Proposizione 7.3.1.

Proposizione 7.3.4 (Primo criterio per massimi e minimi relativi)

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0 tranne al più nel punto x_0 , cioè esiste $\delta > 0$ tale che f sia derivabile in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$.²

Se

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: f'(x) \leq 0$$

(oppure rispettivamente,

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: f'(x) \geq 0),$$

allora x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f .

Se, in più, esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, allora x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo proprio per f .

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi fatte, tenendo conto della Proposizione 7.3.3, 1), segue che f è crescente in $]x_0 - \delta, x_0[$ e decrescente in $]x_0, x_0 + \delta[$ (rispettivamente, f è decrescente in $]x_0 - \delta, x_0[$ e crescente in $]x_0, x_0 + \delta[$); dal Teorema 4.6.1 sul limite delle funzioni monotone e tenendo presente che f è continua in x_0 , si ha

$$f(x_0) = \sup_{x \in]x_0 - \delta, x_0[} f(x) = \sup_{x \in]x_0, x_0 + \delta[} f(x)$$

²Un punto x_0 si dice *interno* ad X se esiste $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset X$, in altri termini se X è un intorno di x_0 . Un punto interno ad X è sempre ovviamente di accumulazione per X . Nelle ipotesi di derivabilità di f si è pertanto supposto lecitamente che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset X$.

(rispettivamente,

$$f(x_0) = \inf_{x \in]x_0 - \delta, x_0[} f(x) = \inf_{x \in]x_0, x_0 + \delta[} f(x)).$$

Pertanto, per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, risulta $f(x) \leq f(x_0)$ (rispettivamente, $f(x_0) \leq f(x)$) e quindi x_0 è un punto di massimo relativo (rispettivamente, di minimo relativo) per f .

Per quanto riguarda l'ultima parte della tesi, se il punto x_0 non fosse un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo proprio per f , esisterebbe $x_1 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ tale che $f(x_1) = f(x_0)$; applicando il Teorema 7.2.1 di Rolle alla restrizione di f all'intervallo chiuso di estremi x_0 ed x_1 , si troverebbe $x \in I(x_0, x_1)$ tale che $f'(x) = 0$ contraddicendo le ipotesi assunte nell'ultima parte. $\square$

Proposizione 7.3.5 (Secondo criterio per massimi e minimi relativi)

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile due volte in x_0 .

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) > 0$), allora x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo proprio per f .

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è derivabile due volte in x_0 , deve innanzitutto esistere un intorno J di x_0 tale che f sia derivabile in J (si è supposto lecitamente $J \subset X$ in quanto x_0 è interno ad X); inoltre, la condizione $f''(x_0) < 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) > 0$) comporta, dalla Proposizione 7.3.1, che f' sia strettamente decrescente (rispettivamente, strettamente crescente) in x_0 e quindi deve esistere $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset J$ e, per ogni xx_0 ,

$$\begin{aligned} x < x_0 &\implies f'(x_0) < f'(x) \text{ (rispettivamente, } f'(x) < f'(x_0) \text{)}, \\ x > x_0 &\implies f'(x) < f'(x_0) \text{ (rispettivamente, } f'(x_0) < f'(x) \text{)}. \end{aligned}$$

Tenendo presente che $f'(x_0) = 0$, le condizioni precedenti consentono di applicare la Proposizione 7.3.4 e concludere che x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo proprio per f . $\square$

Corollario 7.3.6 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile due volte in x_0 . Se x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f , allora deve essere $f''(x_0) \leq 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) \geq 0$).

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se fosse $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) < 0$), dalla Proposizione 7.3.5 precedente e dal Corollario 7.3.2, x_0 sarebbe un punto di minimo (rispettivamente, di massimo) relativo proprio per f . $\square$

► Se un punto interno $x_0 \in X$ è di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f e se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile due volte in x_0 , dai Corollari 7.3.2 e 7.3.6 seguono entrambe le condizioni

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \leq 0 \text{ (rispettivamente, } f''(x_0) \geq 0 \text{)}.$$

Esse non sono tuttavia sufficienti ad assicurare che un punto x_0 sia di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f . Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, nel punto 0 verifica la condizione precedente ma è strettamente crescente in 0.

Si osserva inoltre che i criteri esposti non valgono in generale se il punto x_0 non è interno ad X ; ad esempio, la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1]$, $f(x) := x^2$ ha derivata seconda strettamente positiva nel punto di minimo 0, ma anche nel punto di massimo 1.

Infine, nei casi in cui sia la derivata prima che seconda di una funzione si annullino, può essere utile il seguente ulteriore criterio che si deduce dalla formula di Taylor.

Proposizione 7.3.7 (Terzo criterio per massimi e minimi relativi)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile n volte in x_0 , con $n \geq 2$ e si supponga che

$$\forall k = 1, \dots, n-1 : f^{(k)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

1. *Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in x_0 , mentre se $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora f è strettamente decrescente in x_0 .*
2. *Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo proprio per f , mentre se $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo proprio per f .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è derivabile n volte in x_0 , si può supporre che la derivata di ordine $n-1$ di f sia definita in un intervallo $I \cap J$, con J intorno opportuno di x_0 . Applicando la formula di Taylor (Teorema 7.2.8) alla restrizione di f a $I \cap J$ si trova una funzione $\sigma_n : I \cap J \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x) = 0$ e, per ogni $x \in I \cap J$, $f(x) = T_n(x) + \sigma_n(x)(x - x_0)^n/n!$, dove T_n denota il polinomio di Taylor di ordine n di f relativo ad x_0 ; dalle ipotesi e dalla definizione di T_n segue, per ogni $x \in I \cap J$,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} (f^{(n)}(x) + \sigma_n(x)). \quad (1)$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x) = 0$ e $|f^{(n)}(x)| > 0$, si può trovare $\delta > 0$ tale che $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I \cap J$ e inoltre, per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$|\sigma_n(x)| < \frac{|f^{(n)}(x)|}{2}. \quad (2)$$

Se $f^{(n)}(x) > 0$, dalla (2) si ottiene, per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$-\frac{f^{(n)}(x)}{2} < \sigma_n(x) < \frac{f^{(n)}(x)}{2}$$

e conseguentemente

$$0 < \frac{f^{(n)}(x)}{2} < f^{(n)}(x) + \sigma_n(x) < \frac{3f^{(n)}(x)}{2}$$

mentre, se $f^{(n)}(x) < 0$, sempre dalla (2) si ottiene, per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$\frac{f^{(n)}(x)}{2} < \sigma_n(x) < -\frac{f^{(n)}(x)}{2}$$

e quindi

$$\frac{3f^{(n)}(x)}{2} < f^{(n)}(x) + \sigma_n(x) < \frac{f^{(n)}(x)}{2} < 0.$$

Da ciò, e tenendo presente che il termine $(x - x_0)^n$ è sempre positivo per n pari, mentre è positivo in $[x_0, +\infty[$ e negativo in $] -\infty, x_0]$ per n dispari, dalla (1) si ottiene interamente la tesi. $\square$

Osservazione 7.3.8 *Massimi e minimi relativi di una funzione.* I criteri forniti sopra consentono di individuare i punti di massimo e di minimo relativo di una funzione nel caso in cui essi siano interni all'insieme di definizione e la funzione sia derivabile una o più volte in tali punti. Per determinare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di una funzione occorre pertanto tenere conto anche dei punti estremi in cui la funzione è definita e dei punti in cui la funzione non è derivabile.

Pertanto, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, si può procedere nel modo seguente:

1. Si determina l'insieme $X' = \{x_0 \in X \mid f \text{ è derivabile in } x_0\}$ dei punti in cui la funzione è derivabile. Per il Corollario 7.3.2, i punti di massimo e di minimo relativo appartenenti ad X' e di accumulazione a sinistra e a destra per X devono soddisfare l'equazione

$$f'(x) = 0, \quad x \in X'.$$

Pertanto, conviene determinare l'insieme X_0 delle soluzioni di tale equazione. In generale accade che X_0 è un sottoinsieme finito (in qualche caso numerabile) di $\mathbb{R}$.

2. Non è detto che un elemento $x_0 \in X_0$ sia un punto di massimo o di minimo relativo per f in quanto la condizione $f'(x_0) = 0$ è solamente necessaria. Quindi occorre verificare se ognuno degli elementi di X_0 è effettivamente un punto di massimo o di minimo relativo per f utilizzando i criteri esposti nelle Proposizioni 7.3.4, 7.3.5 ed eventualmente 7.3.7. Se l'applicazione di tali criteri non consente di concludere se un punto è effettivamente di massimo o di minimo relativo occorre procedere ad una verifica diretta mediante la definizione di punto di massimo e di minimo relativo.

3. Bisogna considerare i punti esclusi nei casi precedenti, che sono gli elementi di X che non appartengono ad X' (cioè in cui f non è derivabile) e gli elementi di X che non sono di accumulazione a sinistra e a destra per X (in generale gli estremi appartenenti ad X degli intervalli di cui X è costituito). Tali punti si presentano solitamente in numero finito (in qualche caso numerabile) e per ognuno di essi bisogna verificare in maniera diretta se si tratta di un punto di massimo o di minimo relativo per f .

Osservazione 7.3.9 *Massimi e minimi assoluti di una funzione.* La discussione precedente consente in generale di individuare tutti i punti di massimo e di minimo relativo per una funzione. Ci si può porre a questo punto il problema della determinazione degli eventuali punti di massimo o di minimo assoluto per f . A tale proposito, bisogna innanzitutto osservare che in generale non è detto che tali punti esistano a meno che la funzione non sia continua in un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ (in tal caso l'esistenza del massimo e del minimo assoluto di f viene assicurata dal teorema di Weierstrass). In generale, per determinare tali eventuali punti si confrontano dapprima i valori della funzione in tutti i punti di massimo e di minimo relativo (eventuali); si studia poi il comportamento della funzione in tutti i punti di accumulazione in cui non è definita oppure in cui è definita ma non è continua (in effetti, con l'estremo superiore o con l'estremo inferiore se f è limitata superiormente o inferiormente; in caso contrario, evidentemente f non può essere dotata di massimo o di minimo). Dal confronto, poi, si potrà dedurre se il massimo ed il minimo assoluto della funzione esistono e, in caso affermativo, potranno anche essere determinati.

► Ad esempio, si studiano la monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto della funzione

$$f(x) := x^2 + |x - 3|.$$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, si ha

$$f'(x) = 2x + \frac{|x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} 2x + 1, & x > 3, \\ 2x - 1, & x < 3. \end{cases}$$

dunque la derivata è strettamente positiva in $]1/2, +\infty[\setminus \{3\}$ e strettamente negativa in $] - \infty, 1/2[$; poiché f è continua nel punto 3, da ciò segue direttamente che f è strettamente crescente negli intervalli $[1/2, 3]$ e $[3, +\infty[$ (quindi in $[1/2, +\infty[$) ed è strettamente decrescente in $] - \infty, 1/2]$. Nel punto

3 la funzione non è derivabile in quanto $f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 7$ mentre $f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 5$. Inoltre, il punto $1/2$ è di minimo per la funzione e si ha $f(1/2) = 11/4$. Per quanto riguarda gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto si osserva che agli estremi dell'insieme di definizione si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; quindi f non è limitata superiormente e conseguentemente non è dotata di massimo mentre il punto $1/2$ è il punto di minimo assoluto della funzione (il minimo assoluto è uguale a $11/4$).

7.3.2 Convessità, concavità e flessi

Le proprietà introdotte nel presente paragrafo costituiscono un ulteriore strumento per lo studio delle funzioni reali.

Definizione 7.3.10 Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e siano $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile in x_0 . Si dice che f è convessa (rispettivamente, concava) in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) \quad (\text{rispettivamente, } f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Inoltre, si dice che f è strettamente convessa (rispettivamente, strettamente concava) in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$,

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x) \quad (\text{rispettivamente, } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Infine, si dice che x_0 è un punto di flesso ascendente (rispettivamente, discendente) per f se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: \quad & f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) , \\ \forall x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: \quad & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) , \end{aligned}$$

(rispettivamente,

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[: \quad & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) , \\ \forall x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[: \quad & f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) , \end{aligned}$$

Se la condizione precedente è verificata con una disuguaglianza stretta si dice anche che x_0 è un punto di flesso proprio per f .

Se una funzione è convessa (rispettivamente, concava) in un punto x_0 , si dice anche che f volge la concavità verso l'alto (rispettivamente, verso il basso) in x_0 .

Una funzione convessa (rispettivamente, concava, strettamente convessa, strettamente concava) in tutti i punti di un sottoinsieme A di X viene denominata convessa (rispettivamente, concava, strettamente convessa, strettamente concava) in A ; se l'insieme A non viene precisato è da intendersi $A = X$.

► Pertanto geometricamente una funzione è convessa (rispettivamente, concava) in un punto x_0 se in un intorno di x_0 il suo grafico si trova al di sopra (rispettivamente, al di sotto) della retta tangente al grafico in x_0 ; se x_0 è un punto di flesso, la retta tangente al grafico in x_0 viene anche denominata *tangente flessionale* in x_0 oppure tangente di flesso in x_0 e in un intorno di un punto di flesso, il grafico della funzione si trova da un lato al di sotto e dall'altro al di sopra (oppure viceversa) della tangente flessionale. Per convenzione, si può continuare a denominare punto di flesso ascendente (rispettivamente, discendente) anche un elemento $x_0 \in X$ in cui f è dotata di derivata uguale a $-\infty$ (rispettivamente, $+\infty$). In tal caso, la tangente flessionale è una retta verticale di equazione $x = x_0$.

Nella Figura successiva 7.5 viene rappresentata una funzione f convessa in un punto x_0 , concava in un punto x_1 , ed un punto x_2 di flesso per f .

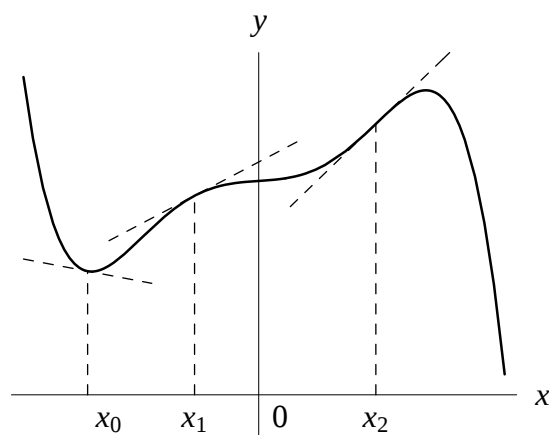


Figura 7.5: *Funzione convessa o concava in un punto e punti di flesso.*

► Si osservi che può accadere che una funzione sia derivabile in un punto x_0 e che non verifichi alcuna delle condizioni previste nella Definizione 7.3.10; ad esempio, la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile in 0 e risulta $f'(0) = 0$; conseguentemente, la retta tangente al grafico di f in 0 ha equazione $y = 0$, mentre la funzione non è né positiva né negativa in alcun intorno di 0.

► I criteri maggiormente utilizzati per lo studio della convessità e della concavità di una funzione sono collegati allo studio del segno della sua derivata seconda.

Tali criteri sono essenzialmente basati sull'osservazione seguente.

Osservazione 7.3.11 Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e siano $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale; si supponga che la derivata prima di f sia definita in $X \cap I$ con I intorno di x_0 e si consideri la funzione $\phi : X \cap I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X \cap I$,

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(ϕ rappresenta la differenza tra la funzione f e la retta tangente al grafico di f nel punto x_0).

Allora valgono le seguenti proprietà:

1. f è convessa (rispettivamente, strettamente convessa, concava, strettamente concava) in x_0 se e solo se il punto x_0 è di minimo relativo (rispettivamente, di minimo relativo proprio, di massimo relativo, di massimo relativo proprio) per ϕ .
2. Il punto x_0 è un flesso ascendente (rispettivamente, un flesso ascendente proprio, un flesso discendente, un flesso discendente proprio) per f se e solo se ϕ è decrescente (rispettivamente, strettamente decrescente, crescente, strettamente crescente) in x_0 .

(Basta tenere presente le definizioni adottate e che $\phi(x_0) = 0$, da cui segue che ϕ è positiva (rispettivamente, negativa) in un intorno di x_0 se e solo se x_0 è di minimo (rispettivamente, di massimo) relativo per ϕ . $\square$)

Dall'osservazione precedente, la proprietà di convessità, di concavità in un punto per la funzione f viene ricondotta alla proprietà di minimo e di massimo relativo per la funzione ϕ e analogamente i punti di flesso per f vengono ricondotti alla proprietà di crescita e decrescenza di ϕ . Si tenga inoltre presente che ϕ è derivabile in $X \cap I$ e che, per ogni $x \in X \cap I$, risulta $\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e in particolare $\phi'(x_0) = 0$. Quanto osservato si può chiaramente applicare nel caso in cui la funzione f sia dotata di derivata seconda in x_0 , in quanto ciò comporta che essa deve essere necessariamente derivabile in $X \cap I$, con I intorno opportuno di x_0 . In tal caso, inoltre, ϕ

risulta anch'essa derivabile due volte in x_0 e si ha $\phi''(x_0) = f''(x_0)$. Applicando tali proprietà ed i risultati ottenuti nel paragrafo precedente alla funzione ϕ , si stabiliscono direttamente i seguenti criteri.

Proposizione 7.3.12 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile due volte in x_0 . Allora*

1. *Se $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) < 0$), allora f è strettamente convessa (rispettivamente, strettamente concava) in x_0 .*
2. *Se f è convessa (rispettivamente, concava) in x_0 , allora $f''(x_0) \geq 0$ (rispettivamente, $f''(x_0) \leq 0$).*

DIMOSTRAZIONE. 1) Si ha $\phi''(x_0) > 0$ e quindi ϕ' è strettamente crescente in x_0 ; poiché $\phi'(x_0) = 0$, ϕ' deve essere strettamente negativa in un intorno sinistro di x_0 e strettamente positiva in un intorno destro di x_0 . Dalla Proposizione 7.3.4, il punto x_0 è un minimo relativo proprio per ϕ , e quindi f è strettamente convessa in x_0 . In modo analogo si stabiliscono i casi rispettivi.

2) Se f è convessa in x_0 , allora x_0 è un punto di minimo relativo per ϕ ; dal Corollario 7.3.2, segue $\phi''(x_0) \geq 0$ e quindi $f''(x_0) \geq 0$. Il caso rispettivo si stabilisce in maniera analoga. $\square$

Come conseguenza della Proposizione 7.3.12 si stabilisce una prima condizione necessaria per i punti di flesso.

Corollario 7.3.13 *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione a sinistra e a destra per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile due volte in x_0 . Se x_0 è un punto di flesso per f , allora necessariamente $f''(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga, ad esempio, che x_0 sia un punto di flesso ascendente per f . Se, per assurdo, fosse $f''(x_0) > 0$, dalla Proposizione 7.3.12, f risulterebbe strettamente convessa in x_0 . Allora, si potrebbe trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[$, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (in quanto x_0 è un flesso ascendente) e $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (in quanto f è strettamente convessa in x_0). Tenendo presente che l'intersezione $X \cap]x_0 - \delta, x_0[$ è non vuota in quanto x_0 è di accumulazione a sinistra per X , le condizioni precedenti portano ad un assurdo. In modo analogo, utilizzando il fatto che x_0 è di accumulazione anche a destra per X , si deduce che non può essere $f''(x_0) < 0$ e quindi deve essere $f''(x_0) = 0$. $\square$

La condizione $f''(x_0) = 0$ può essere soddisfatta anche quando il punto x_0 non è di flesso per f come accade, ad esempio, per la funzione $f(x) := x^4$, $x \in \mathbb{R}$, nel punto $x_0 = 0$.

Si deducono ora le seguenti condizioni per lo studio della convessità e concavità in intervalli; la loro dimostrazione viene tralasciata per brevità in quanto segue le stesse linee di quelle già viste.

Proposizione 7.3.14 *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile due volte in I . Si ha*

1. *f è convessa (rispettivamente, concava) se e solo se verifica la condizione seguente:*

$$\forall x_0 \in I : f''(x_0) \geq 0 \quad (\text{rispettivamente, } \forall x_0 \in I : f''(x_0) \leq 0). \quad (7.3.3)$$

2. *f è strettamente convessa (rispettivamente, strettamente concava) se e solo se f verifica la condizione (7.3.3) ed inoltre f'' non è costantemente nulla in alcun intervallo contenuto in I , cioè*

$$a, b \in I, a < b \implies \exists x_0 \in]a, b[\text{ t.c. } f''(x_0) \neq 0. \quad (7.3.4)$$

Si enunciano infine i criteri maggiormente utilizzati per la determinazione dei punti di flesso di una funzione.

Proposizione 7.3.15 (Primo criterio per i punti di flesso)

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si supponga che esista $\delta > 0$ tale che f sia derivabile due volte in $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ e inoltre che la derivata prima di f sia continua in x_0 . Se

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: f''(x) \geq 0$$

(oppure rispettivamente,

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: f''(x) \leq 0),$$

allora x_0 è un punto di flesso ascendente (rispettivamente, discendente) per f .

Se, in più, la derivata seconda di f non si annulla in $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, allora x_0 è un punto di flesso proprio per f .

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 7.3.4, applicata alla derivata prima di f , segue che x_0 è un punto di minimo (rispettivamente, di massimo) relativo per f' e quindi, per quanto osservato preliminarmente, anche per ϕ' , da cui la prima parte della tesi. L'ultima parte della tesi si ottiene nello stesso modo osservando che in questo caso il punto x_0 risulta un minimo (rispettivamente, un massimo) relativo proprio per f' per quanto osservato nell'ultima parte della Proposizione 7.3.4. $\square$

Proposizione 7.3.16 (Secondo criterio per i punti di flesso)

Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile tre volte in x_0 . Se $f''(x_0) = 0$ e $f^{(3)}(x_0) > 0$ (rispettivamente, $f^{(3)}(x_0) < 0$), allora x_0 è un punto di flesso ascendente (rispettivamente, discendente) proprio per f .

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 7.3.5 segue che x_0 è un punto di minimo (rispettivamente, di massimo) relativo proprio per f' e quindi anche per ϕ' ; allora, la tesi segue direttamente da quanto osservato preliminarmente. $\square$

Corollario 7.3.17 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto interno ad X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile tre volte in x_0 . Se x_0 è un punto di flesso ascendente (rispettivamente, discendente) per f , allora deve essere $f^{(3)}(x_0) \geq 0$ (rispettivamente, $f^{(3)}(x_0) \leq 0$).

DIMOSTRAZIONE. Deve essere innanzitutto $f''(x_0) = 0$ per il Corollario 7.3.13. Se, poi, fosse $f^{(3)}(x_0) < 0$ (rispettivamente, $f^{(3)}(x_0) > 0$), dalla Proposizione 7.3.16 x_0 sarebbe un punto di flesso discendente (rispettivamente, ascendente) proprio per f , in contraddizione con le ipotesi. $\square$

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile tre volte in un punto x_0 interno ad X , dai Corollari 7.3.13 e 7.3.17 si ottengono le seguenti condizioni necessarie per i punti di flesso ascendenti (rispettivamente, discendenti)

$$f''(x_0) = 0, \quad f^{(3)}(x_0) \leq 0 \quad (\text{rispettivamente, } f^{(3)}(x_0) \geq 0).$$

Infine, se le derivate seconda e terza di una funzione sono entrambe nulle, si può cercare di utilizzare il seguente ulteriore criterio dedotto dalla formula di Taylor.

Proposizione 7.3.18 (Terzo criterio per i punti di flesso)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile n volte in x_0 , con $n \geq 3$ e si supponga che

$$\forall k = 2, \dots, n-1 : f^{(k)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

1. Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di flesso ascendente proprio per f , mentre se $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di flesso discendente proprio per f .
2. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora f è strettamente convessa in x_0 , mentre se $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora f è strettamente concava in x_0 .

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la Proposizione 7.3.7 alla derivata prima di f , con $n-1$ al posto di n , tenendo conto delle osservazioni preliminari e del fatto che i punti di minimo e di massimo per f' sono gli stessi della funzione ϕ' . $\square$

In analogia con l'Osservazione 7.3.8 a proposito dei punti di massimo e di minimo relativo di una funzione, anche ora bisogna ricordare di considerare separatamente gli eventuali punti di flesso in cui la funzione non è derivabile due volte; quindi, in generale i punti di flesso vanno ricercati tra le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$ ed i punti in cui la funzione non è derivabile due volte (tali punti costituiscono di solito un sottoinsieme finito oppure numerabile dell'insieme di definizione della funzione).

► Ad esempio, si studiano la concavità, la convessità e gli eventuali punti di flesso della funzione

$$f(x) := x^2 \left(\frac{1}{20} x^3 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{4}{3} x - 2 \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione è un polinomio e quindi è infinite volte derivabile; la derivata seconda è data da $f''(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$ ed è strettamente positiva nell'intervallo $]1, +\infty[\setminus \{2\}$ e strettamente negativa in $] - \infty, 1[$; pertanto, f è strettamente convessa in $[1, +\infty[$ e strettamente concava in $] - \infty, 1]$ e, per il primo criterio per i punti di flesso (Proposizione 7.3.15), il punto 1 è un punto di flesso, mentre il punto 2 non lo è; allo stesso risultato si perviene applicando il secondo criterio per i punti di flesso nel punto 1 ed il terzo criterio nel punto 2.

7.3.3 Asintoti

Le nozioni seguenti possono risultare utili per una descrizione più dettagliata del comportamento di una funzione reale sia in punti di accumulazione reali nei quali la funzione non è definita oppure non è continua (mediante gli asintoti verticali), sia nei punti $+\infty$ e $-\infty$ nel caso in cui la funzione sia definita in un insieme non limitato superiormente oppure inferiormente (mediante gli asintoti orizzontali oppure obliqui).

Definizione 7.3.19 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione a destra (rispettivamente, a sinistra) per X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale.

Si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale a destra (rispettivamente, a sinistra) per f se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$, (rispettivamente, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$).

Più precisamente, l'asintoto viene denominato in alto se il limite è uguale a $+\infty$ ed in basso se è uguale a $-\infty$.

Evidentemente, i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ in cui vi possono essere asintoti verticali per una funzione devono essere innanzitutto di accumulazione per il suo insieme di definizione ed in essi o la funzione non deve essere definita oppure non deve essere continua in quanto solo in tali casi infatti il limite della funzione potrebbe risultare infinito. La verifica poi del fatto che la retta $x = x_0$ rappresenti o meno l'equazione di un asintoto verticale per f viene effettuata mediante il calcolo diretto del limite destro oppure sinistro della funzione.

Può accadere che se il punto x_0 è di accumulazione sia a destra che a sinistra per X , la retta di equazione $x = x_0$ rappresenti un asintoto verticale per f solamente a sinistra oppure solamente a destra; ad esempio, per la funzione $f(x) := e^{1/x}$, $x \neq 0$, la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale in alto solamente a destra. Può anche accadere che la retta di equazione $x = x_0$ sia un asintoto da un lato in alto e dall'altro in basso, come ad esempio, per la funzione $f(x) := 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nel punto $x_0 = 0$.

Definizione 7.3.20 *Siano X un sottoinsieme non limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente) di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Se $b \in \mathbb{R}$, si dice che la retta di equazione $y = b$ è un asintoto orizzontale a destra (rispettivamente, a sinistra) per f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (rispettivamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).*

Più in generale, se $a, b \in \mathbb{R}$, si dice che la retta di equazione $y = ax + b$ è un asintoto obliquo a destra (rispettivamente, a sinistra) per f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0$, (rispettivamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax - b = 0$).

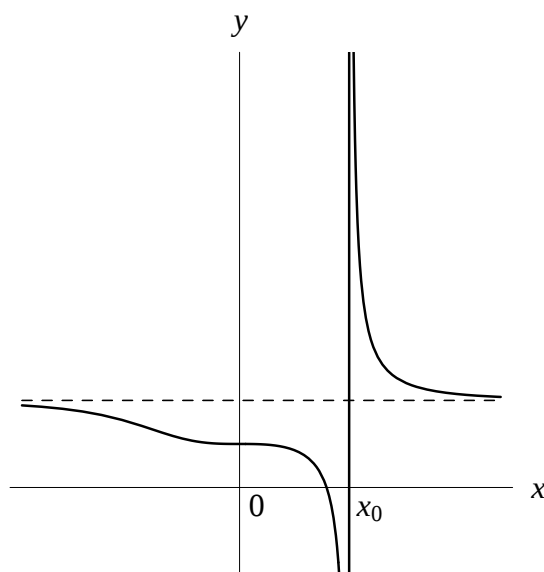
La verifica dell'esistenza di un asintoto orizzontale a destra (rispettivamente, a sinistra) per f , nel caso in cui la funzione sia definita in un insieme non limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente), è immediata in quanto basta verificare che il limite della funzione nel punto $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$) esista e sia finito; il valore b di tale limite fornisce poi direttamente l'equazione dell'asintoto orizzontale.

Nella Figura 7.6 seguente è mostrata una funzione con un asintoto orizzontale a destra e a sinistra ed un asintoto verticale nel punto x_0 .

► Per discutere l'esistenza dell'asintoto obliquo e determinarne eventualmente l'equazione, non si può invece ricorrere direttamente alla definizione in quanto i numeri $a, b \in \mathbb{R}$ previsti nell'equazione dell'asintoto obliquo non sono in generale assegnati.

Tuttavia si riconosce facilmente che f è dotata di asintoto obliquo a destra (rispettivamente, a sinistra) se e solo se esistono, e sono finiti, i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R},$$

Figura 7.6: *Asintoto orizzontale e verticale.*

(rispettivamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}.$$

In tal caso, l'asintoto obliquo a destra (rispettivamente, a sinistra) per f ha equazione $y = ax + b$.

(Infatti se F è dotata di asintoto obliquo a destra di equazione $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b}{x} = a,$$

ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) + b = b.$$

Viceversa si ottiene direttamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = b - b = 0$$

e quindi la proprietà è completamente dimostrata insieme all'espressione dell'equazione dell'asintoto obliquo. Nel caso degli asintoti obliqui a sinistra si procede in maniera del tutto analoga. $\square$)

L'importanza della proposizione precedente risiede nel fatto che essa fornisce un metodo per individuare il possibile coefficiente angolare ed il termine noto dell'equazione dell'asintoto obliquo. Bisogna tuttavia sempre verificare che entrambi i limiti previsti esistano e siano finiti; ad esempio,

la funzione logaritmo non è dotata di asintoto obliquo a destra in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x/x = 0$, ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x - 0 \cdot x) = +\infty$.

► Ad esempio, si determinano gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) := x + \frac{1}{x-1} + \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

La funzione è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e quindi può presentare un asintoto verticale solamente nei punti 0 e 1. Risulta $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 - \pi/2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 + \pi/2$ e quindi la retta di equazione $x = 0$ non è asintoto né a sinistra né a destra per f . Inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ e quindi la retta di equazione $x = 1$ è asintoto a sinistra in basso e a destra in alto per f .

Infine, si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e quindi non esistono asintoti orizzontali, mentre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \pm \frac{\pi}{2},$$

e quindi la retta di equazione $y = x + \pi/2$ è un asintoto obliquo a destra per f mentre la retta di equazione $y = x - \pi/2$ è un asintoto obliquo a sinistra per f .

7.3.4 Studio del grafico di una funzione reale

Una funzione reale viene spesso assegnata precisando il valore assunto in un generico elemento dell'insieme di definizione. Lo scopo della discussione seguente è quello di determinare le informazioni che possono essere utili ad una descrizione più dettagliata della funzione ed a tracciarne approssimativamente il grafico.

Il primo passo è sicuramente quello di determinare l'insieme X di definizione della funzione ricordando che per convenzione esso è costituito da tutti i numeri reali in cui ha senso l'espressione assegnata (in altre parole, si sceglie il sottoinsieme più grande di $\mathbb{R}$ in cui la funzione può essere definita). Convienne poi subito vedere se l'insieme di definizione X è simmetrico oppure periodico, e in caso affermativo verificare se la funzione è pari, dispari oppure periodica; tali informazioni possono semplificare lo studio di tutti i punti successivi e per questo motivo è opportuno stabilire subito tali proprietà. Se una funzione è pari oppure dispari, essa può essere studiata solamente in $X \cap [0, +\infty[$ (oppure in $X \cap]-\infty, 0]$) e se è periodica di periodo $T > 0$, può essere studiata in $X \cap [a, a + T]$, dove a è un numero reale scelto arbitrariamente.

Si passa poi allo studio del segno della funzione risolvendo la disequazione $f(x) \geq 0$ ed allo studio delle intersezioni con l'asse x , fornite dalle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$; l'eventuale intersezione con l'asse y esiste se $0 \in X$ ed è in questo caso il punto di coordinate $(0, f(0))$.

Segue lo studio della continuità della funzione; i punti in cui la funzione non è continua vengono utilizzati per verificare in essi l'eventuale esistenza di asintoti verticali. Si considerano quindi anche gli eventuali asintoti orizzontali oppure obliqui se la funzione è definita in un insieme non limitato.

Infine, lo studio della derivabilità prima e seconda e del segno delle derivate prima e seconda consentono di determinare crescita e decrescenza della funzione e massimi e minimi relativi ed assoluti, e la convessità, concavità e punti di flesso.

Tutte le informazioni ottenute vengono poi riassunte con un grafico approssimativo della funzione.

Pertanto, lo schema seguente è quello che viene solitamente seguito per lo studio di una funzione di cui è assegnato il generico valore $y = f(x)$:

- 1) *Determinazione dell'insieme di definizione della funzione.*
- 2) *Eventuale parità, disparità e periodicità della funzione.*
- 3) *Studio del segno della funzione ed eventuali intersezioni con gli assi.*
- 4) *Continuità della funzione.*
- 5) *Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.*
- 6) *Derivabilità della funzione.*
- 7) *Studio della crescita, decrescenza e dei massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione.*
- 8) *Derivata seconda della funzione.*
- 9) *Studio della convessità, concavità e flessi della funzione (eventuali tangenti flessionali).*
- 10) *Grafico riassuntivo della funzione.*

► Ad esempio, si studia la seguente funzione tracciandone approssimativamente il grafico

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x^2 - 1}.$$

Per determinare l'insieme di definizione, bisogna imporre le condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 1 \neq 0; \end{cases}$$

si deduce che f è definita nell'insieme

$$X_f :=] - \infty, -1[\cup] - 1, 1[\cup] 1, 2[\cup [3, +\infty[;$$

poiché X_f non è simmetrico né periodico, la funzione non può verificare condizioni di simmetria o di periodicità.

Inoltre, il segno della funzione dipende solamente dal denominatore $x^2 - 1$ e quindi la funzione è positiva negli intervalli $] - \infty, -1[$, $] 1, 2[$ e $[3, +\infty[$ e negativa nell'intervallo $] - 1, 1[$; vi sono due intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $A(2, 0)$, $B(3, 0)$ mentre l'unica intersezione con l'asse delle ordinate è data dal punto $C(0, -\sqrt{6})$.

La funzione è continua in tutto X_f ; pertanto si possono presentare eventuali asintoti verticali solamente nei punti -1 e 1 (che sono di accumulazione ma in cui f non è definita), nei quali si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty; \end{aligned}$$

quindi la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale in alto a sinistra e in basso a destra per f , mentre la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale in basso a sinistra e in alto a destra.

Si ha inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ e quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra per f .

L'argomento della radice nella definizione di f si annulla solamente nei punti 2 e 3 e quindi la funzione è infinite volte derivabile in $X_f \setminus \{2, 3\}$ e si ha, per ogni $x \in X_f \setminus \{2, 3\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x^3 - 15x^2 + 26x - 5}{2(x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6}}, \\ f''(x) &= \frac{8x^6 - 120x^5 + 615x^4 - 1400x^3 + 1458x^2 - 720x + 287}{4(x^2 - 1)^3 \sqrt{x^2 - 5x + 6}(x^2 - 5x + 6)}. \end{aligned}$$

Nei punti 2 e 3 la derivata prima tende a $-\infty$ e rispettivamente a $+\infty$; quindi f è dotata di derivata nei punti 2 e 3 e si ha $f'(2) = -\infty$ e $f'(3) = +\infty$.

Utilizzando la regola di Ruffini si riconosce subito che il punto $x_0 := 5$ è una radice del polinomio $2x^3 - 15x^2 + 26x - 5$; a questo punto possono essere determinate facilmente anche le altre radici, che sono $x_1 := (5 - \sqrt{17})/4$ (approssimativamente, $x_1 \sim 0,22$) e $x_2 := (5 + \sqrt{17})/4$ (approssimativamente, $x_2 \sim 2,28$; dunque, $x_2 \notin X_f$); si può allora dedurre che la derivata prima è strettamente positiva in $] -\infty, -1[\cup] -1, x_1[\cup]3, 5[$ e strettamente negativa in $]x_1, 1[\cup]1, 2[\cup]5, +\infty[$. La funzione è pertanto strettamente crescente in ognuno degli intervalli $] -\infty, -1[$, $] -1, x_1[$ e $[3, 5]$ e strettamente decrescente in $[x_1, 1[$, $]1, 2[$ e $[5, +\infty[$; i punti x_0 e x_1 di massimo relativo proprio per f ed i punti corrispondenti del grafico hanno coordinate

$$D \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{4}, -\frac{\sqrt{2} \sqrt{25\sqrt{17} + 103} (\sqrt{17} + 5)}{10\sqrt{17} + 38} \right), \quad E \left(5, \frac{\sqrt{6}}{24} \right)$$

(approssimativamente, $f(x_1) \sim -2,33$, $f(x_0) \sim 0,1$). I punti 2 e 3 sono inoltre di minimo relativo proprio per f , mentre non esistono punti di massimo o di minimo assoluto in quanto f non è limitata né superiormente né inferiormente (infatti, è dotata di asintoti verticali sia in alto che in basso).

Lo studio del segno della derivata seconda si presenta abbastanza complicato e quindi si passa direttamente a tracciare il grafico della funzione delineato approssimativamente nella Figura 7.7 successiva.

► Come ulteriore esempio, si studia la seguente funzione e se ne traccia approssimativamente il grafico

$$f(x) := \left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|.$$

La funzione è definita per $(x-2)/(x+3) > 0$ e quindi nell'insieme

$$X_f :=] -\infty, -3[\cup]2, +\infty[.$$

Inoltre essa non è né pari, né dispari, né periodica; è sempre positiva e si annulla per $\log(x-2)/(x+3) = 1$, cioè per $(x-2)/(x+3) = e$; tale equazione ammette un'unica soluzione $x_0 = -(3e+2)/(e-1)$. Quindi vi è un'unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto di coordinate $A(-(3e+2)/(e-1), 0)$. Non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $0 \notin X_f$.

Inoltre f è continua in tutto X_f e, per quanto riguarda gli estremi, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1; \end{aligned}$$

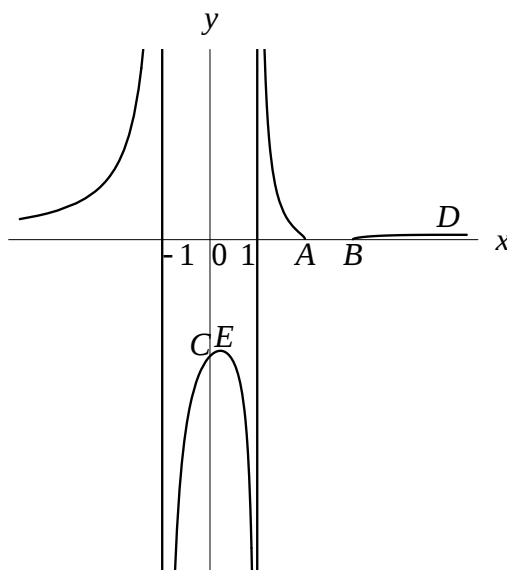


Figura 7.7: Grafico della funzione.

quindi le rette di equazione $x = -3$ e $x = 2$ sono asintoti verticali in alto per f , mentre la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra per f .

La funzione è infinite volte derivabile in $X_f \setminus \{x_0\}$ e, per ogni $x \in X_f \setminus \{x_0\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|} D \left(\log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right) = \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|} \frac{5}{(x-2)(x+3)};$$

il prodotto $(x-2)(x+3)$ è sempre positivo in $X_f \setminus \{x_0\}$ e quindi il segno della derivata prima di f dipende solamente dal fattore $\log(x-2)/(x+3) - 1$, che è positivo per $(x-2)/(x+3) > e$; si conclude che f' è strettamente positiva in $]x_0, -3[$ e strettamente negativa in $] -\infty, x_0[\cup]2, +\infty[$; quindi f è strettamente crescente in $[x_0, -3[$ e strettamente decrescente in ognuno degli intervalli $] -\infty, x_0]$ e $]2, +\infty[$; il punto x_0 è di minimo relativo (anzi assoluto) per il primo criterio sui massimi e minimi relativi (Proposizione 7.3.4) e si ha $f(x_0) = 0$. Nel punto x_0 la funzione non è derivabile in quanto

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} -\frac{5}{(x-2)(x+3)} = -\frac{(e-1)^2}{5e}, \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{(e-1)^2}{5e}. \end{aligned}$$

Infine, per ogni $x \in X_f \setminus \{x_0\}$, si ha

$$f''(x) = -\frac{5(2x+1)}{(x-2)^2(x+3)^2} \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|}.$$

Dallo studio del segno della derivata seconda, si deduce che f è strettamente convessa in ognuno degli intervalli $]2, +\infty[$ e $[x_0, -3[$ mentre è strettamente concava nell'intervallo $] -\infty, x_0]$. Il grafico della funzione viene tracciato approssimativamente nella Figura 7.8 seguente.

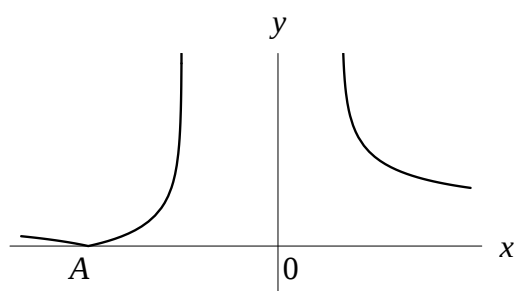


Figura 7.8: *Grafico della funzione.*

