

Capitolo 8

Calcolo integrale

Nel presente capitolo viene introdotta la teoria generale dell'integrazione su intervalli limitati e successivamente viene anche considerato l'integrale improprio di funzioni non limitate oppure su intervalli non limitati.

8.1 L'integrale secondo Riemann

La teoria dell'integrazione secondo Riemann risponde in maniera soddisfacente a criteri di semplicità e naturalezza.

Tale integrale sarà sufficiente nelle applicazioni che si ci propone di considerare anche a riguardo delle connessioni con la teoria della misura, concernenti prevalentemente misure di aree, volumi e lunghezza di curve.

8.1.1 Suddivisioni di un intervallo

Sono necessarie alcune considerazioni introduttive riguardanti gli intervalli chiusi e limitati. Nel seguito del paragrafo si intenderà fissato un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Se $n \geq 1$, si dice che una famiglia finita $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ di numeri reali è una *suddivisione* di $[a, b]$ se

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \forall i = 0, \dots, n-1 : x_i < x_{i+1}. \quad (8.1.1)$$

L'insieme di tutte le suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ viene denotato per comodità con il simbolo $\Sigma([a, b])$.

Se $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ è una suddivisione di $[a, b]$, si denomina *ampiezza* di P , e la si denota con $|P|$, il seguente numero reale

$$|P| := \max_{i=1, \dots, n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

► Una prima proprietà utile per il seguito riguarda la possibilità di ottenere suddivisioni di ampiezza arbitrariamente piccola. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $|P| \leq \varepsilon$.

(Infatti, considerato un numero naturale $n \geq 1$ tale che $n \geq (b-a)/\varepsilon$ e posto, per ogni $i = 0, \dots, n$,

$$x_i := a + \frac{i}{n}(b-a);$$

allora la famiglia finita $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ è una suddivisione di $[a, b]$ e si ha, per ogni $i = 0, \dots, n-1$, $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n \leq \varepsilon$, da cui anche $|P| \leq \varepsilon$. $\square$)

Le suddivisioni considerate nella dimostrazione precedente hanno la particolare proprietà che la distanza tra due elementi successivi x_i e x_{i+1} , $i = 0, \dots, n-1$, è costante e coincide con l'ampiezza della suddivisione; tali suddivisioni vengono denominate *equispaziate*.

► La possibilità di confrontare due suddivisioni è basata sulla seguente definizione. Se $P_1 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ e $P_2 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ sono due suddivisioni di $[a, b]$, si dice che P_1 è *meno fine* di P_2 (oppure, equivalentemente, che P_2 è *più fine* di P_1) se l'insieme degli elementi di P_1 è contenuto nell'insieme degli elementi di P_2 , cioè se

$$\forall i = 0, \dots, n : \exists j = 0, \dots, m \text{ t.c. } x_i = y_j.$$

Si verifica facilmente che se P_1 è meno fine di P_2 , allora $|P_2| \leq |P_1|$.

► Una proprietà importante riguardante la relazione introdotta riguarda il fatto che, se $P_1 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ e $P_2 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ sono due arbitrarie suddivisioni di $[a, b]$, allora esiste sempre un'ulteriore suddivisione P di $[a, b]$ più fine sia di P_1 che di P_2 .

(Infatti, basta riordinare tutti gli elementi delle due suddivisioni per ottenere quelli della suddivisione P . Precisamente, siano X_1 l'insieme degli elementi della suddivisione P_1 , X_2 l'insieme degli elementi della suddivisione P_2 e si ponga $X := X_1 \cup X_2$. L'insieme X è finito; posto $p = \text{card}(X)$, si può definire la famiglia finita $P = (z_i)_{i=0, \dots, p}$ ponendo $z_0 := \min X$ e per ogni $i = 1, \dots, p$, $z_i = \min(X \setminus \{z_0, \dots, z_{i-1}\})$; è facile verificare a questo punto che P è una suddivisione di $[a, b]$ e che verifica le condizioni richieste. $\square$)

8.1.2 Integrabilità delle funzioni limitate

Si fissa ora una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Se $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ è una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, per ogni $i = 0, \dots, n$, si possono considerare

$$M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Si denomina *somma superiore* (rispettivamente, *somma inferiore*) di f relativa alla suddivisione P , e la si denota con il simbolo $S(f, P)$ (rispettivamente, $s(f, P)$), il seguente numero reale

$$S(f, P) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{rispettivamente, } s(f, P) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)). \quad (8.1.2)$$

Si può fornire facilmente una interpretazione geometrica delle somme superiori ed inferiori tenendo presente che l'addendo i -esimo delle somme in (8.1.2) rappresenta l'area di un rettangolo avente come base $x_{i+1} - x_i$ ed altezza M_i (rispettivamente, m_i). Pertanto, la somma superiore ed inferiore relativa ad una suddivisione rappresenta l'area di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito da un numero finito di rettangoli, illustrati nella Figura 8.1 successiva.

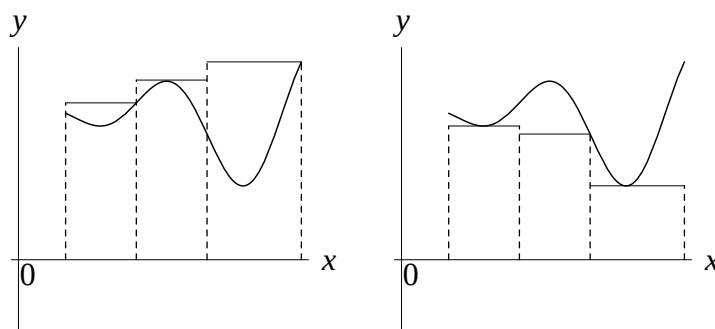


Figura 8.1: *Somma superiore ed inferiore relativa ad una suddivisione.*

Si indicano ora alcune proprietà importanti delle somme superiori ed inferiori.

Proposizione 8.1.1 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. 1) Se P è una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, allora $s(f, P) \leq S(f, P)$.
2. Se P_1 e P_2 sono suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ e se P_1 è meno fine di P_2 , allora

$$S(f, P_2) \leq S(f, P_1), \quad s(f, P_1) \leq s(f, P_2).$$

3. Se P_1 e P_2 sono due arbitrarie suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$, allora

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Segue direttamente dalle definizioni adottate.

2) Sia $P_1 = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ una suddivisione meno fine di un'ulteriore suddivisione $P_2 = (y_i)_{i=0,\dots,m}$. Per ogni $i = 0, \dots, n$ si denoti con $j(i)$ il numero naturale tale che $y_{j(i)} = x_i$. Allora

$$M_i(x_{i+1} - x_i) = M_i(y_{j(i+1)} - y_{j(i)}) \geq \sum_{j=j(i)}^{j(i+1)-1} M_j(y_{j+1} - y_j),$$

e analogamente

$$m_i(x_{i+1} - x_i) = m_i(y_{j(i+1)} - y_{j(i)}) \leq \sum_{j=j(i)}^{j(i+1)-1} m_j(y_{j+1} - y_j).$$

Sommando i termini precedenti per $i = 0, \dots, n-1$ si ottiene la tesi.

3) Si consideri una suddivisione P di $[a, b]$ più fine sia di P_1 che di P_2 . Dalla 2) e dalla 1) già dimostrate segue allora $s(f, P_1) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2)$. $\square$

Dalla Proposizione 8.1.1, 3) precedente segue, per ogni $P \in \Sigma([a, b])$, $s(f, P_1) \leq S(f, P)$ e quindi il sottoinsieme

$$S(f) := \{S(f, P) \mid P \in \Sigma([a, b])\}$$

di $\mathbb{R}$ costituito da tutte le somme superiori di f è limitato inferiormente; l'estremo inferiore di tale sottoinsieme viene denominato *integrale superiore* di f in $[a, b]$ e denotato con uno dei simboli

$$\overline{\int_a^b f}, \quad \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Pertanto, l'integrale superiore di f è l'estremo inferiore delle somme superiori di f e soddisfa la seguente condizione, per ogni $P_1 \in \Sigma([a, b])$

$$s(f, P_1) \leq \overline{\int_a^b f},$$

cioè l'integrale superiore è un maggiorante di tutte le somme inferiori di f . Pertanto, anche il sottoinsieme

$$s(f) := \{s(f, P) \mid P \in \Sigma([a, b])\}$$

di $\mathbb{R}$ costituito da tutte le somme inferiori di f è limitato superiormente ed il suo estremo superiore viene denominato *integrale inferiore* di f in $[a, b]$ e denotato con uno dei simboli

$$\underline{\int_a^b f}, \quad \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Pertanto, l'integrale inferiore di f è l'estremo superiore delle somme superiori di f e ricordando che l'integrale superiore è un maggiorante delle somme inferiori, si ottiene la relazione

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}.$$

► L'integrale superiore ed inferiore può essere definito per una qualsiasi funzione limitata in $[a, b]$. In generale, non ci si può aspettare che nella formula precedente valga un'uguaglianza.

Ad esempio, si consideri la funzione di Dirichlet $d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1]$,

$$d(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Tale funzione è stata già considerata nella (6.1.1) e si è osservato che essa non è continua in alcun punto dell'intervallo $[0, 1]$. Se $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ è una suddivisione di $[a, b]$, in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, vi sono sia punti razionali che irrazionali e quindi risulta $M_i = 1$ e $m_i = 0$; pertanto

$$S(d, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = 1, \quad s(d, P) = 0;$$

dall'arbitrarietà della suddivisione segue $S(d) = \{1\}$, $s(d) = \{0\}$ e quindi anche

$$\int_a^b d = 0, \quad \overline{\int_a^b d} = 1.$$

Le considerazioni precedenti giustificano la seguente definizione di funzione integrabile.

Definizione 8.1.2 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata, si dice che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se l'integrale superiore di f coincide con l'integrale inferiore di f

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

In tal caso il valore comune dell'integrale superiore ed inferiore di f viene denominato integrale di f esteso all'intervallo $[a, b]$ e si denota con uno dei seguenti simboli

$$\int_{[a,b]} f, \quad \int_{[a,b]} f(x) dx \quad (= \int_a^b f = \overline{\int_a^b f}).$$

(Talvolta viene anche utilizzata la notazione $\int_a^b f$.)

L'insieme delle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ viene denotato con il simbolo $\mathcal{R}([a, b])$.

► Dalla definizione adottata segue subito che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione costante di costante valore $c \in \mathbb{R}$, essa è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e si ha

$$\int_{[a,b]} c \, dx = c(b-a) .$$

Infatti in questo caso si ha $s(f, P) = S(f, P) = c(b-a)$ per ogni $P \in \Sigma([a, b])$.

Tuttavia, in generale la definizione precedente non risulta sufficientemente maneggevole nelle applicazioni al fine di stabilire se una funzione è o meno integrabile secondo Riemann. Per questo motivo, è particolarmente utile avere a disposizione dei criteri di integrabilità di più semplice applicazione.

Proposizione 8.1.3 (Primo criterio di integrabilità mediante suddivisioni)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists P_1, P_2 \in \Sigma([a, b])$ t.c. $S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$.
- c) $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \Sigma([a, b])$ t.c. $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. a) $\Rightarrow$ b) Si supponga che f sia integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $\varepsilon > 0$; dalla definizione di integrale inferiore e dalla seconda proprietà dell'estremo superiore, si può trovare una suddivisione P_1 di $[a, b]$ tale che

$$\int_{[a,b]} f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1) ;$$

analogamente, dalla definizione di integrale superiore e dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore, si può trovare una suddivisione P_2 di $[a, b]$ tale che

$$S(f, P_2) < \int_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Allora, $S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ e ciò dimostra la b).

b) $\Rightarrow$ c) Si fissi $\varepsilon > 0$; dalla b), si possono trovare $P_1, P_2 \in \Sigma([a, b])$ tali che $S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$. Allora, considerata una suddivisione P di $[a, b]$ più fine sia di P_1 che di P_2 , si ha $S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$.

c) $\Rightarrow$ a) Bisogna dimostrare che $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$ o equivalentemente che, fissato $\varepsilon > 0$, risulta $\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} < \varepsilon$; infatti dalla c), si può considerare una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $S(f, P) -$

$s(f, P) < \varepsilon$; allora, dalla prima proprietà dell'estremo inferiore e superiore, risulta $\overline{\int_a^b f} \leq S(f, P)$ e analogamente, dalla prima proprietà dell'estremo superiore, segue $s(f, P) \leq \underline{\int_a^b f}$. Pertanto

$$\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon. \quad \square$$

Il primo criterio di integrabilità stabilito nella proposizione precedente è sufficiente per stabilire l'integrabilità di diverse classi di funzioni. Si riconosce subito, ad esempio, l'integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue.

Teorema 8.1.4 (Integrabilità delle funzioni monotone)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona, allora f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Si osserva innanzitutto che f è limitata; infatti, se f è crescente risulta, per ogni $x \in [a, b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ mentre, se f è decrescente si ha, per ogni $x \in [a, b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Si supponga che f sia crescente e si fissi $\varepsilon > 0$. Posto $\delta = \varepsilon / (f(b) - f(a) + 1)$, si può considerare una suddivisione $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ di $[a, b]$ tale che $|P| \leq \delta$. Per ogni $i = 0, \dots, n-1$, dalla crescenza di f segue $M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1})$ e $m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i)$ da cui

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \delta \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \delta (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalla Proposizione 8.1.3, segue che f è integrabile. $\square$

Teorema 8.1.5 (Integrabilità delle funzioni continue)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Anche ora conviene osservare subito che f è sicuramente limitata come conseguenza del teorema di Weierstrass (Teorema 6.2.1).

Dal teorema sull'uniforme continuità di Cantor (Teorema 6.4.2), f è uniformemente continua e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in [a, b]$ verificanti la condizione $|x - y| \leq \delta$, si abbia $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon / (b - a)$. Si fissi ora una suddivisione $P = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ di $[a, b]$ tale che $|P| \leq \delta$. Per ogni $i = 0, \dots, n-1$, dal teorema di Weierstrass applicato alla restrizione di f all'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, si possono trovare $c_i, d_i \in [x_i, x_{i+1}]$

tali che $f(c_i) = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) =: M_i$ e $f(d_i) = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) =: m_i$. Poiché $|c_i - d_i| \leq x_{i+1} - x_i \leq |P| \leq \delta$, deve essere anche $f(d_i) - f(c_i) \leq \varepsilon/(b-a)$; pertanto,

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(d_i) - f(c_i))(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (-x_0 + x_n) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque è verificata la condizione c) della Proposizione 8.1.3 e pertanto f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. $\square$

8.1.3 Interpretazione geometrica e proprietà dell'integrale esteso

La definizione fornita di integrale definito di una funzione limitata si presta in modo naturale ad essere interpretata come area di una opportuna figura piana.

Se $X \subset \mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva, si denomina *trapezoide* relativo ad f di base X e lo si denota con $T(f)$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Sia ora $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Si supponga dapprima che f sia positiva. Fissata una suddivisione P di $[a, b]$, si è visto che la somma superiore di f relativa a P rappresenta l'area di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, più precisamente di un plurintervallo chiuso¹ contenente $T(f)$, mentre la somma inferiore di f relativa a P rappresenta l'area di un plurintervallo chiuso contenuto in $T(f)$.

Poiché f è integrabile, l'estremo inferiore dei plurintervalli contenenti $T(f)$ è uguale all'estremo superiore dei plurintervalli contenuti in $T(f)$ e quindi il valore comune di tali estremi, cioè l'integrale esteso di f , deve necessariamente coincidere con l'area del trapezoide $T(f)$ relativo ad f .

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è invece negativa, si può applicare quanto sopra alla funzione $-f$ e riconoscere che l'integrale esteso di f ad $[a, b]$ coincide con l'opposto dell'area dell'insieme $T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq 0\}$.

Infine, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ non è né positiva né negativa, si può comunque fornire un'interpretazione geometrica dell'integrale definito di f considerando separatamente gli intervalli in cui la funzione è positiva e quelli in cui è

¹Si denomina *intervallo chiuso* in $\mathbb{R}^n$ ogni insieme del tipo $I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, cioè prodotto cartesiano di n intervalli chiusi reali. Un *plurintervallo chiuso* è l'unione di un numero finito di intervalli chiusi.

negativa; si stabilisce in questo modo che l'integrale esteso di f ad $[a, b]$ coincide con l'area dell'insieme $T_+(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ alla quale bisogna sottrarre l'area dell'insieme $T_-(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq 0\}$.

Si considerano ora alcune proprietà generali degli integrali estesi.

Proposizione 8.1.6 *Valgono le seguenti proprietà dell'integrale esteso:*

1. (Proprietà dei linearità dell'integrale esteso) *Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e si ha*

$$\int_{[a,b]} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_{[a,b]} f(x) dx + \beta \int_{[a,b]} g(x) dx .$$

2. (Proprietà di monotonia dell'integrale esteso) *Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ e tali che, per ogni $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Allora*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} g(x) dx .$$

3. (Proprietà di integrabilità del valore assoluto) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Allora, la funzione $|f|$ è anch'essa integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e si ha*

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx .$$

4. (Proprietà di additività in intervalli dell'integrale esteso) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $c \in]a, b[$ allora, le funzioni $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ sono integrabili secondo Riemann in $[a, c]$ e rispettivamente $[c, b]$ e si ha*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx .$$

5. (Proprietà di monotonia dell'integrale esteso delle funzioni positive rispetto ad intervalli) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva e integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e siano $c, d \in [a, b]$ tali che $c < d$. Allora $f|_{[c,d]}$ è integrabile secondo Riemann in $[c, d]$ e si ha*

$$\int_{[c,d]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} f(x) dx .$$

6. (Proprietà di invarianza dell'integrale esteso rispetto ad insiemi finiti)
 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se esiste un sottoinsieme finito H di $[a, b]$ tale che $f|_{[a, b] \setminus H} = g|_{[a, b] \setminus H}$, allora anche g è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e si ha

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \int_{[a, b]} g(x) dx .$$

DIMOSTRAZIONE. Le proprietà enunciate sono tutte basate sulle definizioni e sul criterio di integrabilità mediante suddivisioni. Per brevità, si omettono i dettagli della dimostrazione. $\square$

Si considerano a questo punto alcune proprietà valide per le funzioni continue.

► Un criterio di integrabilità (*Teorema di Vitali*) può essere enunciato considerando il sottoinsieme H di $[a, b]$ costituito dagli elementi di $[a, b]$ in cui una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ non è continua. Tale risultato stabilisce che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se e solo se l'insieme H verifica la seguente condizione:

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli contenuti in $[a, b]$ tali che

$$H \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon .$$

Tale condizione esprime il fatto che l'insieme H ha misura nulla secondo una teoria della misura denominata di Lebesgue. Per brevità, si rinuncia alla dimostrazione di tale risultato.

► Si riconosce facilmente, invece, che l'unica funzione continua e positiva avente integrale uguale a 0 è la funzione nulla. Precisamente, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e positiva e se esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) > 0$, allora $\int_{[a, b]} f > 0$.

(Infatti f è continua in x_0 e quindi, dalla proprietà di permanenza del segno, esistono $r > 0$ e $\delta > 0$ tali che, per ogni $x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $f(x) \geq r$. Allora, posto $c := \max\{x_0 - \delta, a\}$ e $d := \min\{x_0 + \delta, b\}$, si ha

$$\int_{[a, b]} f(x) dx \geq \int_{[c, d]} f(x) dx \geq \int_{[c, d]} r dx \geq r(d - c) > 0 . \quad \square)$$

Si enuncia infine un ulteriore risultato importante per le funzioni continue.

Teorema 8.1.7 (Teorema della media integrale)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = f(x_0)(b-a) .$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è continua, dal Teorema 6.2.1 di Weierstrass, essa è dotata di massimo e di minimo e quindi esistono $c, d \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. Dalla proprietà di monotonia dell'integrale definito segue allora

$$f(c)(b-a) = \int_{[a,b]} f(c) dx \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} f(d) dx = f(d)(b-a)$$

e pertanto

$$f(c) \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x) dx \leq f(d) .$$

Allora il numero reale $\int_{[a,b]} f(x) dx / (b-a)$ è compreso tra il minimo ed il massimo di f e quindi dal teorema di Bolzano (Corollario 6.2.3), segue l'esistenza di $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = \int_{[a,b]} f(x) dx / (b-a)$.

Infine, il punto x_0 può essere considerato in $]a, b[$. Infatti, se il teorema fosse valido solamente per $x_0 = a$ o per $x_0 = b$, la funzione essendo continua dovrebbe assumere valori sempre strettamente maggiori oppure sempre strettamente minori di $f(x_0)$ in $]a, b[$. Nel primo caso, $f(x_0)$ sarebbe il minimo di f ; si consideri $x_1 \in]a, b[$ tale che $f(x_1) > f(x_0)$ e si fissi $r \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) < r < f(x_1)$; dalla continuità di f ed essendo $[r, +\infty[$ un intorno di $f(x_1)$, si può trovare un intervallo $]x_1 - \delta, x_1 + \delta[\subset]a, b[$ tale che $f(x) \geq r$ per ogni $x \in]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$; allora

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f &= \int_{[a, x_1 - \delta]} f + \int_{[x_1 - \delta, x_1 + \delta]} f + \int_{[x_1 + \delta, b]} f \\ &\geq f(x_0)(x_1 - \delta - a) + r(x_1 + \delta - (x_1 - \delta)) + f(x_0)(b - x_1 - \delta) \\ &\geq f(x_0)(x_1 - \delta - a) + 2r\delta + f(x_0)(b - x_1 - \delta) \\ &= f(x_0)(b - a) + 2(r - f(x_0))\delta > f(x_0)(b - a) , \end{aligned}$$

e quindi non potrebbe valere l'uguaglianza prevista nella tesi. Allo stesso risultato si perviene in maniera analoga se f assume sempre valori strettamente minori di $f(x_0)$ in $]a, b[$. Pertanto la tesi è completamente dimostrata. $\square$

Geometricamente, il Teorema 8.1.7 esprime il fatto che l'area del trapezoide relativo ad una funzione continua e positiva è equivalente all'area di un rettangolo avente come base l'intervallo $[a, b]$ ed altezza l'intervallo $[0, f(x_0)]$ per un opportuno elemento x_0 di $]a, b[$ (vedasi la Figura 8.2 successiva).

8.1.4 Primitive ed integrale indefinito

Uno degli strumenti più efficaci per il calcolo dell'integrale definito di una funzione viene fornito dalle primitive di una funzione, di cui ci si occupa nel presente paragrafo.

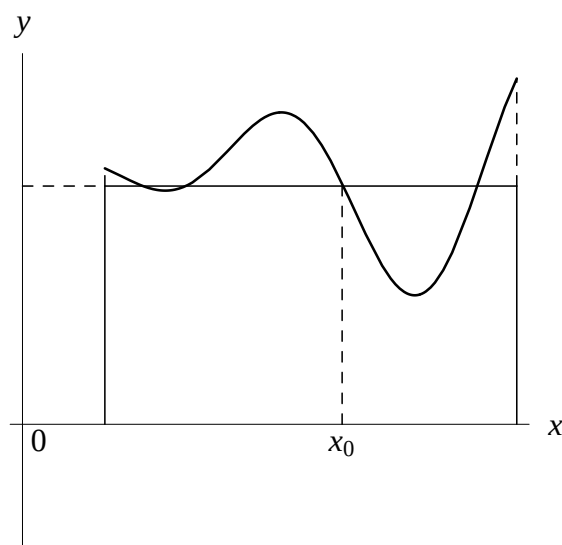


Figura 8.2: Teorema della media integrale.

Definizione 8.1.8 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice che una funzione $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva (oppure antiderivata) di f se F è derivabile e, per ogni $x \in X$,

$$F'(x) = f(x) .$$

Inoltre, l'insieme di tutte le primitive di f viene denominato integrale indefinito di f e denotato con uno dei seguenti simboli

$$\int f , \quad \int f(x) dx .$$

► Valgono le seguenti proprietà delle primitive:

1. Siano X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale ed $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f . Allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, anche la funzione $F + c$ è una primitiva di f .

DIMOSTRAZIONE. Infatti $F + c$ è derivabile e, per ogni $x \in X$, $(F + c)'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. $\square$

2. Viceversa, se la funzione f è definita in un intervallo, due qualsiasi primitive di f differiscono sempre per una costante. Precisamente, siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale ed $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ due primitive di f . Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G = F + c$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $G - F$ è derivabile in quanto differenza di funzioni derivabili e, per ogni $x \in I$, si ha $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Poiché I è un intervallo, $G - F$ è costante e quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G - F = c$, da cui la tesi. $\square$

► Il risultato precedente non vale se f non è definita in un intervallo. Ad esempio, è facile constatare che la funzione $\log |x|$ è una primitiva della funzione $f(x) := 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma tutte le primitive di f non si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a tale funzione, bensì sono del tipo

$$F(x) := \begin{cases} \log |x| + c_1, & x < 0, \\ \log |x| + c_2, & x > 0, \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In generale, per ottenere tutte le primitive e quindi l'integrale indefinito, bisogna aggiungere una costante arbitraria per ognuno degli intervalli (massimali) in cui la funzione è definita.

Ritornando al caso delle funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definite in un intervallo I , da quanto osservato segue che, se è nota una primitiva F di f , tutte le primitive di f si ottengono considerando le funzioni $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ e pertanto

$$\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\};$$

più frequentemente si usa scrivere per convenzione

$$\int f = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R};$$

in quanto in generale i procedimenti applicati per il calcolo degli integrali indefiniti conducono direttamente all'espressione $F(x)$ della primitiva in un generico elemento x in cui questa è definita.

In particolare, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e se f' è continua, risulta

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

► Si approfondisce ora lo studio delle proprietà degli integrali indefiniti di una funzione continua. Si può dimostrare che tali funzioni sono sempre dotate di primitive e inoltre vale un importante legame tra l'integrale esteso ad un intervallo $[a, b]$ e la differenza dei valori che una primitiva assume negli estremi b ed a .

Per enunciare tali proprietà è necessario assumere alcune convenzioni riguardanti le funzioni continue su un intervallo arbitrario di $\mathbb{R}$.

Sia pertanto I un intervallo di $\mathbb{R}$ e si consideri una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se $a, b \in I$ e $a < b$, la restrizione $f|_{[a,b]}$ di f all'intervallo $[a, b]$ è sicuramente integrabile in $[a, b]$ (Teorema 8.1.5) e quindi ha senso considerare $\int_{[a,b]} f$.

Si definisce ora l'*integrale definito* di f nel modo seguente, per ogni $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x) dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f, & a < b; \\ 0, & a = b; \\ \int_{[b,a]} f, & a > b. \end{cases} \quad (8.1.3)$$

Naturalmente, le proprietà viste in generale per gli integrali estesi ad un intervallo $[a, b]$ si estendono facilmente agli integrali definiti utilizzando la definizione precedente e pertanto, per brevità, vengono omesse.

Anche il teorema della media integrale può essere rinunciato come segue considerando gli integrali definiti.

Teorema 8.1.9 (Teorema della media integrale per gli integrali definiti)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I . Allora, per ogni $a, b \in I$, esiste $x_0 \in I(a, b)$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a).$$

► Si studia ora l'esistenza delle primitive per le funzioni continue. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e se $a \in I$, dalla (8.1.3) si può considerare la funzione $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (8.1.4)$$

La funzione F_a viene denominata *funzione integrale* di f di punto iniziale a ; nel risultato successivo si riconosce che F_a è una primitiva della funzione f .

Teorema 8.1.10 (Teorema di Torricelli)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $a \in I$, la funzione $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla (8.1.4) è una primitiva di f .

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che, per ogni $x_0 \in I$, F_a è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$, cioè che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) .$$

Si fissi pertanto $x_0 \in I$ e sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x_0 , si può considerare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, si abbia $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Si fissi ora $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$; dal Teorema 8.1.7 della media, esiste un elemento $\xi \in I(x_0, x)$ tale che

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi)(x_0 - x) .$$

Poiché

$$F_a(x) - F_a(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi)(x_0 - x)$$

si ottiene

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(\xi) .$$

Inoltre $\xi \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, e quindi $f(x_0) - \varepsilon < f(\xi) < f(x_0) + \varepsilon$. Si è così dimostrato che, per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon ,$$

e ciò, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, dimostra la tesi. $\square$

Dunque l'insieme delle primitive di una funzione continua è sempre non vuoto.

Il risultato successivo mette in relazione le primitive di una funzione continua con il calcolo degli integrali definiti.

Teorema 8.1.11 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f . Allora, per ogni $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) . \quad (8.1.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, b \in I$ e si consideri la funzione integrale $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ di f di punto iniziale a . Dal Teorema 8.1.10, anche F_a è una primitiva di f e quindi, dalle proprietà generali delle primitive, deve esistere $c \in \mathbb{R}$ tale che $G = F_a + c$. Dunque $G(b) = F_a(b) + c = \int_a^b f + c$ e $G(a) = F_a(a) + c = c$ e pertanto si conclude che $G(b) - G(a) = \int_a^b f$. $\square$

Per comodità, il secondo membro della (8.1.5) viene spesso denotato con uno dei seguenti simboli

$$[G(x)]_a^b , \quad G(x) \Big|_a^b ;$$

ciò è dovuto essenzialmente al fatto che nel calcolo esplicito delle primitive di una funzione si perviene solitamente al valore che essa assume in un generico elemento x in cui è definita.

8.1.5 Integrali indefiniti immediati

Il legame espresso dal teorema fondamentale del calcolo integrale sposta il problema del calcolo dell'integrale definito di una funzione continua a quello della ricerca di una primitiva di tale funzione. Per questo motivo nel seguito ci si occuperà in modo più dettagliato dei metodi per il calcolo degli integrali indefiniti; si cominciano ad esaminare dapprima alcuni integrali indefiniti immediati che seguono direttamente dalle derivate delle funzioni elementari e successivamente di alcune regole di integrazione.

Dalle derivate delle funzioni elementari, è immediato verificare gli integrali indefiniti considerati di seguito.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, risulta

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

in ogni intervallo I in cui la funzione x^a è definita e precisamente, $I = \mathbb{R}$ se $a \in \mathbb{N}$, $I =]0, +\infty[$ oppure $I =]-\infty, 0[$ se $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $I = [0, +\infty[$ se $a \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}$ e infine $I =]0, +\infty[$ se $a \in]-\infty, 0[\setminus \mathbb{Z}$.

2. Si ha

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

in ognuno degli intervalli $[0, +\infty[$ oppure $] -\infty, 0]$.

3. Per ogni $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, risulta

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

4. Si ha

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

5. Si ha

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

in ognuno degli intervalli $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

in ognuno degli intervalli $]k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in]-1, 1[.$$

7. Si ha

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in un intervallo I , le formule precedenti possono essere generalizzate componendo la funzione f con una delle funzioni elementari sopra considerate.

Per brevità non vengono ripetuti tutti i casi precedenti ma si riportano solamente alcuni esempi, anche in previsione del fatto che l'applicazione della successiva regola di sostituzione consentirà di ottenere risultati più generali.

1. Si ha

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

purché $f(x) > 0$ per ogni $x \in I$ oppure $f(x) < 0$ per ogni $x \in I$.

2. Per ogni $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, risulta

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in I.$$

3. Si ha

$$\int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, x \in I.$$

4. Si ha

$$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) dx = \tan f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

purché esista $k \in \mathbb{Z}$ tale che $-\pi/2 + k\pi < f(x) < \pi/2 + k\pi$ per ogni $x \in I$.

Le precisazioni effettuate di volta in volta sulla validità delle formule precedenti sono indispensabili per il calcolo degli integrali definiti mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale. Il calcolo degli integrali indefiniti può invece essere esteso a funzioni definite nell'unione di più intervalli considerando una costante arbitraria in ognuno di essi.

8.1.6 Prime regole di integrazione

Per estendere il calcolo degli integrali indefiniti, è necessario ricorrere ad opportune regole di integrazione di seguito esposte.

Una prima regola di integrazione può essere ricavata direttamente dalla proprietà di linearità dell'integrale definito (Proposizione 8.1.6, 1.); tale regola può essere enunciata ovviamente anche per gli integrali indefiniti e si enuncia come segue

Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx .^2$$

Si considerano ora due ulteriori regole di integrazione di frequente applicazione.

Proposizione 8.1.12 (Regola di integrazione per sostituzione)

1. (Formula di cambiamento di variabile per gli integrali definiti). Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I tale che $\varphi([a, b]) \subset I$. Allora

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt .$$

2. Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\varphi(J) \subset I$. Se $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f , allora

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c , \quad c \in \mathbb{R} .$$

²Ricordando che l'integrale indefinito è un insieme di funzioni, si precisa che il prodotto $\alpha \cdot A$ di uno scalare per un sottoinsieme è da intendersi come $\alpha \cdot A := \{\alpha a \mid a \in A\}$; inoltre la somma di due insiemi che è da intendersi al modo seguente: $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Quindi, nel caso in esame, il secondo membro significa

$$\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \left\{ \alpha F + \beta G \mid F \in \int f(x) dx, G \in \int g(x) dx \right\}$$

DIMOSTRAZIONE. Si osserva innanzitutto che la funzione $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ è continua e quindi è integrabile per il Teorema 8.1.5. Si considerino ora le funzioni $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $y \in [a, b]$,

$$F(y) := \int_{\varphi(a)}^y f(t) dt, \quad G(y) := \int_a^y f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema 8.1.11), la funzione F è una primitiva di f e la funzione G è una primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Poiché, per ogni $t \in [a, b]$, risulta anche $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, le funzioni G ed $F \circ \varphi$ devono differire per una costante; essendo, poi, $G(a) = 0$ e $F(\varphi(a)) = 0$, tale costante deve essere nulla e si ottiene $G = F \circ \varphi$; in particolare $G(b) = F(\varphi(b))$ da cui la tesi.

2) Basta osservare che $F \circ \varphi$ è una primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. □

Nelle applicazioni concrete è come se si effettuasse materialmente la sostituzione $t = \varphi(x)$ e si sostituisse il differenziale $\varphi'(x) dx$ con dt (spesso si scrive $d\varphi(x)$ anziché $\varphi'(x)dx$). L'uguaglianza $\varphi'(x) dx = dt$ si ottiene formalmente derivando entrambi i membri dell'uguaglianza $t = \varphi(x)$ rispetto alla variabile t a primo membro ed alla variabile x a secondo membro. Tali osservazioni giustificano la denominazione attribuita alla Proposizione 8.1.12. Nelle applicazioni riguardanti il calcolo degli integrali definiti, si può scegliere se determinare dapprima una primitiva della funzione da integrare e quindi applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale oppure se applicare direttamente la parte 1) della Proposizione 8.1.12 cambiando anche gli estremi di integrazione nell'integrale assegnato.

Proposizione 8.1.13 (Regola di integrazione per parti)

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Se $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f , si ha

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx.$$

e conseguentemente, per ogni $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = [F(x) g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni risulta $(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g'$ e quindi $f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$; poiché le funzioni $f \cdot g$ e $(F \cdot g)' - F \cdot g'$ sono definite nell'intervallo I , le primitive di $f \cdot g$ coincidono con le primitive di $(F \cdot g)' - F \cdot g'$; ma $F \cdot g$ è una primitiva di $(F \cdot g)'$ e pertanto le primitive di $(F \cdot g)' - F \cdot g'$ sono date dalla differenza di $F \cdot g$ e le primitive di $F \cdot g'$ e da ciò deriva la tesi. L'ultima parte segue direttamente da quanto dimostrato. □

► Ad esempio, si vuole calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^e \log x \, dx .$$

Si determina dapprima l'integrale indefinito. Dalla regola di integrazione per parti, si ha

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x D(\log x) \, dx = x \log x - x + c ,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Allora, scegliendo la primitiva con $c = 0$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema 8.1.11) l'integrale definito assegnato è dato da

$$\int_1^e \log x \, dx = [x \log x - x]_1^e = e - e - (-1) = 1 .$$

► L'integrale seguente viene calcolato in maniera analoga

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c , \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Nell'ultima uguaglianza si è utilizzato l'integrale indefinito immediato $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log |f(x)| + c$.

► Si consideri ora l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx .$$

In ogni intervallo $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$, si può scrivere

$$\int \frac{\sin x \cos x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\sin x \cos x \, dx}{\cos^4 x (1 + \tan^4 x)} = \int \frac{\tan x \, dx}{\cos^2 x (1 + (\tan^2 x)^2)}$$

e quindi, posto $t = \tan^2 x$, da cui $dt = 2 \tan x \, dx / \cos^2 x$, si ottiene

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{2} \arctan t + c = \frac{1}{2} \arctan \tan^2 x + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Anche se la funzione assegnata è definita in tutto $\mathbb{R}$, in questo caso è stato possibile determinare una primitiva solamente in ogni intervallo $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$.

8.2 Integrali impropri

La definizione di funzione integrabile secondo Riemann è stata data inizialmente per funzioni limitate e definite in un intervallo chiuso e limitato. Si vuole ora estendere tale definizione anche al caso di funzioni non limitate oppure definite in un insieme non limitato; in tal caso si parlerà di integrali in senso improprio (oppure anche in senso generalizzato).

8.2.1 Integrali impropri di funzioni non limitate

Si considera innanzitutto il caso di funzioni non necessariamente limitate definite però su un intervallo chiuso e limitato.

Nel seguito, si intende fissato un intervallo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e si prendono in esame le funzioni che soddisfano la condizione seguente.

Definizione 8.2.1 *Una funzione reale $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice generalmente continua se ammette al più un numero finito di punti di discontinuità.*

Poiché l'integrale definito di una funzione è invariante rispetto ad insiemi finiti, non è importante per i nostri fini il valore che una funzione generalmente continua assume nei punti di discontinuità; in tali punti, anzi, la funzione potrebbe anche non essere definita. Precisamente, se H è un sottoinsieme finito di $[a, b]$ e se $f : [a, b] \setminus H \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, essa può essere considerata come funzione generalmente continua in $[a, b]$ identificandola con una qualsiasi funzione definita anche in H e che coincide con f in $[a, b] \setminus H$.

Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/\log x$ è una funzione generalmente continua nell'intervallo $[0, 1]$, in quanto attribuendole un valore arbitrario nei punti 0 e 1, tali punti risultano gli unici suoi punti di discontinuità in $[0, 1]$.

Per estendere la definizione di integrale definito a tali funzioni, si considera innanzitutto il caso in cui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ abbia un unico punto di discontinuità in uno degli estremi.

Definizione 8.2.2 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua e si supponga che a (rispettivamente, b) sia l'unico punto di discontinuità di f .*

Se esiste il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad (\text{rispettivamente, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx),^3 \quad (8.2.1)$$

³Si osservi che f è integrabile in $[a + \varepsilon, b]$ (rispettivamente, in $[a, b - \varepsilon]$) in quanto continua in tale intervallo.

esso viene denominato integrale improprio di f e denotato con il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Inoltre, se il limite (8.2.1) è un numero reale si dice anche che l'integrale improprio di f in $[a, b]$ è convergente oppure che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$; se il limite (8.2.1) è infinito, si dice che l'integrale improprio di f in $[a, b]$ è divergente.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b] \setminus \{x_0\}$, con $x_0 \in]a, b[$, l'integrale improprio può essere definito applicando la Definizione 8.2.2 separatamente alle restrizioni $f|_{[a, x_0]}$ e $f|_{[x_0, b]}$. Si richiede quindi che esistano entrambi i limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx . \quad (8.2.2)$$

Se tali limiti sono finiti, si dice che la funzione è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ oppure che l'integrale improprio di f è convergente; se uno dei due limiti è finito e l'altro è uguale a $+\infty$ (rispettivamente, a $-\infty$) oppure se i due limiti sono entrambi uguali a $+\infty$ (rispettivamente, a $-\infty$), si dice che l'integrale improprio di f è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente).

In tali casi, si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx .$$

Se f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$, dal primo teorema sul limite della somma di due funzioni (Teorema 4.5.1), il valore dell'integrale può essere calcolato considerando il limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right) . \quad (8.2.3)$$

Tuttavia, l'integrabilità in senso improprio di f non può essere dedotta dal fatto che l'ultimo limite sia finito; infatti, tale limite può essere finito anche se i due limiti (8.2.1) sono uno divergente positivamente e l'altro negativamente; in tal caso, il limite (8.2.3) viene comunque denominato *valore principale* dell'integrale improprio di f e denotato con uno dei simboli

$$(v.p.) \int_a^b f(x) dx , \quad * \int_a^b f(x) dx .$$

► Ad esempio, si consideri la funzione generalmente continua $1/x$ nell'intervallo $[-1, 1]$; si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\log \varepsilon = +\infty ,$$

e quindi tale funzione non può essere integrabile in senso improprio in $[-1, 1]$; risulta inoltre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ([\log -x]_{-1}^{-\varepsilon} + [\log x]_{\varepsilon}^1) = 0$$

e quindi (v.p.) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$.

► Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione generalmente continua discontinua in n punti $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, l'integrabilità in senso improprio di f viene definita applicando quanto sopra separatamente a ciascuno dei punti $x_1, \dots, x_n$; precisamente, si consideri una suddivisione $y_0, \dots, y_n$ di $[a, b]$ in n intervalli tali che ogni x_i appartenga solamente all'intervallo $[y_{i-1}, y_i]$, $i = 1, \dots, n$, allora si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ oppure che l'integrale improprio di f è convergente se, per ogni $i = 1, \dots, n$, la restrizione di f all'intervallo $[y_{i-1}, y_i]$ (che presenta un solo punto di discontinuità) è integrabile in senso improprio in $[y_{i-1}, y_i]$, cioè esistono e sono finiti i limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{y_{i-1}}^{x_i - \varepsilon} f(x) dx , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_i + \varepsilon}^{y_i} f(x) dx$$

(ovviamente, il primo limite non va considerato se $x_i = a$ e il secondo se $x_i = b$). Se qualcuno dei limiti precedenti è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente) ed i rimanenti sono convergenti, si dice che l'integrale improprio di f è divergente positivamente (rispettivamente, negativamente).

► In base alle definizioni assunte, si può studiare l'integrabilità in senso improprio nel caso di un unico punto di discontinuità; i criteri ottenuti vanno poi applicati separatamente a ciascun punto di discontinuità di f (affinché f sia integrabile in senso improprio è necessario che lo sia rispetto a ciascun punto di discontinuità).

Osservazione 8.2.3 Si riconoscono facilmente alcune proprietà relative alle operazioni sulle funzioni integrabili in senso improprio; ad esempio, si enunciano le seguenti omettendone per brevità la dimostrazione, basata essenzialmente sulle definizioni assunte:

1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione generalmente continua dotata di punti di discontinuità solamente eliminabili o di prima specie, essa è integrabile in senso improprio in $[a, b]$. Quindi, i punti di discontinuità in un intorno dei quali può fallire l'integrabilità della funzione sono quelli di seconda specie, che per tale motivo vengono denominati anche *punti singolari* della funzione.
2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni generalmente continue integrabili in senso improprio in $[a, b]$, allora la somma $f + g$ è anch'essa integrabile in senso improprio in $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$$

3. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni generalmente continue integrabili in senso improprio in $[a, b]$ e se esiste un sottoinsieme finito H di $[a, b]$ tale che, per ogni $x \in [a, b] \setminus H$, $f(x) \leq g(x)$, allora si ha anche

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua e positiva, integrabile in senso improprio in $[a, b]$; considerato l'insieme finito H dei punti di discontinuità di f , si definisce il trapezoide $T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \setminus H, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Allora $\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(T(f))$.

Per i criteri successivi risulta utile la definizione seguente.

Definizione 8.2.4 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua. Si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio in $[a, b]$. Inoltre, si dice che l'integrale improprio di f è assolutamente divergente se l'integrale improprio di $|f|$ è divergente positivamente.*

► Si supponga che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua in $]a, b]$. Poiché $|f|$ è positiva, la funzione $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]a, b]$, $g(x) := \int_x^b |f(t)| dt$ è decrescente e quindi, per il teorema sul limite delle funzioni monotone (Teorema 4.6.1), è dotata di limite nel punto a dato da $\sup_{x \in]a, b]} \int_x^b |f(t)| dt$.

Pertanto, l'integrale improprio di $|f|$ è necessariamente convergente oppure divergente positivamente.

Lo stesso discorso può essere applicato nel caso in cui f non sia continua in b oppure in uno o più punti interni all'intervallo $[a, b]$.

Quindi, si può concludere che una funzione generalmente continua risulta o assolutamente integrabile in senso improprio oppure l'integrale in senso improprio è assolutamente divergente.

Per questo motivo per indicare che una funzione è assolutamente integrabile in senso improprio è sufficiente scrivere

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty .$$

► Se f è positiva, l'assoluta integrabilità equivale ovviamente all'integrabilità in senso improprio.

In generale, si può solamente affermare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione generalmente continua e assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, b]$, allora f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Vale inoltre il seguente criterio di confronto.

Proposizione 8.2.5 (Criterio di confronto per gli integrali impropri)

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni generalmente continue e si supponga che, per ogni $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq g(x)$. Si ha

1. Se g è integrabile in senso improprio, allora f è assolutamente integrabile in senso improprio.
2. Se l'integrale improprio di f è assolutamente divergente, allora anche l'integrale improprio di g è divergente positivamente.

footnotesizeDIMOSTRAZIONE. 1) La prima parte segue dalle definizioni applicando la proprietà di monotonia dell'integrale definito e del limite. La seconda parte segue invece direttamente dalla prima $\square$

Esempio 8.2.6 (Integrali impropri campione) Siano $x_0 \in [a, b]$ e $\alpha > 0$. Si consideri la funzione $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$,

$$f(x) := \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} .$$

Si tratta di una funzione generalmente continua in $[a, b]$ avente x_0 come unico punto di discontinuità. Si supponga $x_0 < b$; per ogni $\varepsilon > 0$, se $\alpha = 1$

$$\int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx = [\log |x-x_0|]_{x_0+\varepsilon}^b = \log(b-x_0) - \log \varepsilon ,$$

mentre, se $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx &= \frac{1}{-\alpha+1} [|x-x_0|^{-\alpha+1}]_{x_0+\varepsilon}^b \\ &= \frac{1}{-\alpha+1} ((b-x_0)^{-\alpha+1} - \varepsilon^{-\alpha+1}) . \end{aligned}$$

Si deduce allora che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(b-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} , & 0 < \alpha < 1 , \\ +\infty , & \alpha \geq 1 . \end{cases}$$

Le stesse conclusioni valgono se si suppone $a < x_0$ e si considera $\int_a^{x_0-\varepsilon} 1/|x-x_0|^\alpha dx$. Quindi f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se $0 < \alpha < 1$, mentre non lo è se $\alpha \geq 1$.

Utilizzando l'esempio e il criterio di confronto precedenti si ottiene il seguente risultato di frequente applicazione.

Teorema 8.2.7 (Criterio dell'ordine di infinito)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b] \setminus \{x_0\}$, con $x_0 \in [a, b]$. Si ha

1. *Se f è un infinito in x_0 di ordine minore o uguale di α , con $\alpha \in]0, 1[$ (oppure se f non è un infinito in x_0), allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, b]$.*
2. *Se f è un infinito in x_0 di ordine maggiore o uguale di 1, allora l'integrale improprio di f è assolutamente divergente.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Dalle ipotesi fatte, esistono $\delta > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x)| \leq M/|x-x_0|^\alpha$ (ciò vale anche se f non è un infinito in x_0 considerando $\alpha \in]0, 1[$ arbitrario). Poiché $\alpha < 1$, dall'Esempio 8.2.6 e dalla Proposizione 8.2.5, 1), segue che f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, b]$.

2) Dal fatto che f è un infinito in x_0 di ordine maggiore o uguale di 1, si deduce l'esistenza di $\delta > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x)| \geq M/|x-x_0|$.

Ancora dall'Esempio 8.2.6 e dalla Proposizione 8.2.5, 2), segue che l'integrale improprio di f è assolutamente divergente. $\square$

► In generale, per stabilire l'integrabilità in senso improprio di una funzione generalmente continua, si cerca prima di applicare il Teorema 8.2.7 in ognuno dei punti di discontinuità per f . Se si trova un punto di discontinuità in cui vale la parte 2), si conclude subito che la funzione non è integrabile in senso improprio. Se invece in tutti i punti di discontinuità è soddisfatta la parte 1), la funzione è integrabile in senso improprio in $[a, b]$.

Può capitare che in qualche punto il criterio dell'ordine di infinito non si possa applicare, cioè che la funzione sia un infinito in un punto x_0 di ordine minore di 1, ma maggiore di α per ogni $\alpha \in]0, 1[$.

In questi casi bisogna ricorrere ad altri metodi per lo studio dell'integrabilità, ad esempio, rifacendosi direttamente alle definizioni assunte. Si osserva infine che i criteri di integrabilità in senso improprio, nel caso in cui possano essere applicati, consentono di stabilire solamente l'integrabilità della funzione ma non forniscono il valore dell'integrale improprio, per il quale bisogna in generale utilizzare la definizione ed i metodi di integrazione per gli integrali definiti.

► Ad esempio, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log^n x} dx, \quad n \geq 1.$$

Nel punto 0 la funzione è un infinito di ordine minore di 1, ma di ordine maggiore di α per ogni $0 < \alpha < 1$ e pertanto il criterio sull'ordine di infinito non può essere applicato (l'ordine minore di 1 esclude la seconda parte e l'ordine maggiore di α per ogni $0 < \alpha < 1$ esclude la prima parte del teorema).

Pertanto, si ricorre direttamente alla definizione. Se $n = 1$ si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx = [\log |\log x|]_\varepsilon^{1/2} = \log \log 2 - \log |\log \varepsilon|,$$

mentre, se $n \geq 2$,

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{x \log^n x} dx = \left[\frac{\log^{-n+1} x}{-n+1} \right]_\varepsilon^{1/2} = -\frac{1}{n-1} \left(\log^{-n+1} \frac{1}{2} - \log^{-n+1} \varepsilon \right).$$

Si deduce che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log^n x} dx = \begin{cases} \frac{1}{(n-1) \log^{n-1} 2}, & n \geq 2, \\ -\infty, & n = 1. \end{cases}$$

Quindi l'integrale improprio è convergente se e solo se $n \geq 2$.

► Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-e^x) \log x}}{\sin(\pi x)} dx .$$

La funzione in esame è generalmente continua e non è definita nei punti 0 e 1. Per quanto riguarda il punto 0, la funzione $\sqrt{(1-e^x) \log x}$ è un infinitesimo di ordine minore di $1/2$, ma maggiore di ogni numero strettamente positivo minore di $1/2$, mentre la funzione $\sin \pi x$ è un infinitesimo di ordine 1. Si deduce che il rapporto è un infinito di ordine maggiore di $1/2$ ma minore di ogni numero maggiore di $1/2$, ad esempio di $3/4$; dal criterio dell'ordine di infinito (Teorema 8.2.7), segue l'assoluta integrabilità della funzione in un intorno del punto 0.

Nel punto 1 la funzione al numeratore è un infinitesimo di ordine $1/2$ e quella al denominatore è un infinitesimo di ordine 1; il rapporto è quindi un infinito di ordine $1/2$ e la funzione è integrabile nel punto 1 sempre per il criterio dell'ordine di infinito.

Poiché si è stabilita l'integrabilità della funzione in ogni punto di discontinuità, si conclude che essa è integrabile. Tuttavia le regole di integrazione note non consentono in questo caso di calcolare il valore dell'integrale improprio.

► Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\pi (2x - \pi) \tan x dx .$$

L'unico punto di discontinuità da discutere in questo caso è il punto $\pi/2$, nel quale la funzione è un il prodotto di un infinitesimo di ordine 1 e di un infinito di ordine 1; pertanto in tale punto la funzione non è un infinito ed è di conseguenza integrabile in senso improprio in $[0, \pi]$.

► Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\log^2(1-x)}{1-x} dx .$$

Vi è solamente il punto 1 da discutere; in tale punto la funzione è il rapporto di un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e di un infinitesimo di ordine 1; quindi è un infinito di ordine maggiore di 1 (e minore di $1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$); dal criterio dell'ordine di infinito, tenendo presente che la funzione è positiva, l'integrale improprio è divergente positivamente.

8.2.2 Integrali impropri su intervalli non limitati

Si considera ora il caso di funzioni definite in un intervallo illimitato. La discussione è analoga al caso precedente e per questo motivo si tralasceranno alcuni dettagli in caso di completa analogia.

Definizione 8.2.8 Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (rispettivamente, $f :] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$) una funzione continua. Se esiste il limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (\text{rispettivamente, } \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx), \quad (8.2.4)$$

esso viene denominato integrale improprio di f in $[a, +\infty[$ (rispettivamente, in $] - \infty, b]$) e denotato con uno dei simboli

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} f, \quad (\text{rispettivamente, } \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f).$$

Inoltre, se il limite (8.2.4) è un numero reale si dice anche che l'integrale improprio di f è convergente oppure che f è integrabile in senso improprio; se il limite (8.2.4) è infinito, si dice che l'integrale improprio di f è divergente.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dirà poi che essa è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$ se esistono e sono finiti entrambi i limiti

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx, \quad (8.2.5)$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è fissato arbitrariamente. In tal caso l'integrale improprio di f può essere calcolato anche considerando il limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx; \quad (8.2.6)$$

Anche ora conviene osservare che l'esistenza del limite (8.2.6) non comporta in generale che f sia integrabile in senso improprio in tutto $\mathbb{R}$.

Se uno dei limiti (8.2.5) tende a $\pm\infty$ e l'altro ad un numero reale, oppure se tendono entrambi a $+\infty$ o a $-\infty$, si dice che l'integrale improprio di f è divergente (positivamente o negativamente).

Una situazione più generale è quella in cui la funzione è generalmente continua in un intervallo illimitato. In questo caso l'integrabilità in senso improprio viene considerata separatamente in un intorno di ogni punto di discontinuità ed eventualmente nei punti $+\infty$ e $-\infty$; è sufficiente che l'integrabilità fallisca in un intorno di tali punti per concludere che la funzione non è integrabile in senso improprio.

Per quanto osservato, si può ora trattare separatamente solamente il caso di funzioni continue su intervalli illimitati.

Nel seguito si considera l'intervallo $[a, +\infty[$; considerazioni analoghe valgono in $] -\infty, b]$ ed $\mathbb{R}$.

► Si possono stabilire proprietà analoghe a quelle enunciate per gli integrali impropri di funzioni limitate.

1. Se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue integrabili in senso improprio in $[a, +\infty[$, allora la somma $f + g$ è anch'essa integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ e si ha

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx .$$

2. Se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue integrabili in senso improprio in $[a, +\infty[$ e se, per ogni $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, allora si ha anche

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx .$$

3. Se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e positiva, integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$, considerato il trapezoide $T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$, si ha $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \text{Area}(T(f))$.

L'assoluta integrabilità viene definita come in precedenza; se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, si dice che f è *assolutamente integrabile in senso improprio* in $[a, +\infty[$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$.

Inoltre, si dice che l'integrale improprio di f è *assolutamente divergente* se l'integrale improprio di $|f|$ è divergente positivamente.

► Anche ora, dal teorema sul limite delle funzioni monotone, si deduce che una funzione continua $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ o è assolutamente integrabile in senso improprio oppure il suo integrale improprio è assolutamente divergente; per evidenziare il fatto che una funzione è assolutamente integrabile in senso improprio si scrive solitamente $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Ovviamente, le nozioni di assoluta integrabilità in senso improprio e di integrabilità in senso improprio sono equivalenti se la funzione è positiva. In generale, si può solamente dire che se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$, allora f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ e si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx .$$

Inoltre se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che, per ogni $x \in [a, +\infty[$, $|f(x)| \leq g(x)$, si ha

1. Se g è integrabile in senso improprio, allora f è assolutamente integrabile in senso improprio.
2. Se l'integrale improprio di f è assolutamente divergente, allora anche l'integrale improprio di g è divergente positivamente.

► Utilizzando la definizione si riconosce facilmente che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

è convergente per $\alpha > 1$ ed è divergente positivamente se $0 < \alpha < 1$.

Si può infine enunciare il seguente criterio dell'ordine di infinitesimo.

Teorema 8.2.9 (Criterio dell'ordine di infinitesimo) *Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:*

1. *Se f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine maggiore o uguale di α , con $\alpha > 1$, allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$.*
2. *Se f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine minore o uguale di 1 (oppure se tende ad un limite diverso da 0 in $+\infty$), allora l'integrale improprio di f è assolutamente divergente.*

DIMOSTRAZIONE. Se f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine maggiore o uguale di α , con $\alpha > 1$, si possono trovare $c \in [a, +\infty[$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in [c, +\infty[$, $|f(x)| \leq M/|x|^\alpha$. Poiché $\alpha > 1$, la funzione $1/|x|^\alpha$ è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ e quindi anche f lo è.

2) Se f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine minore o uguale di 1 oppure se f tende ad un limite diverso da 0 in $+\infty$, esistono $c \in [a, +\infty[$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in [c, +\infty[$, $|f(x)| \geq M/|x|$. Allora la tesi segue dal fatto che la funzione $M/|x|$ non è integrabile in senso improprio in $[c, +\infty[$. $\square$

Il criterio dell'ordine di infinitesimo non si può applicare se $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine maggiore di 1, ma minore di $1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. In questi casi si cerca di ricorrere ad altri metodi oppure direttamente alla definizione.

► Ad esempio, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx .$$

La funzione è continua in $[0, +\infty[$ e quindi bisogna discutere l'integrabilità solamente in un intorno del punto $+\infty$. Per ogni $x \in [0, +\infty[$, risulta

$$\left| \frac{\sin x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

e poiché $1/(x^2 + 1)$ è un infinitesimo di ordine 2 in $+\infty$, dal criterio dell'ordine di infinitesimo (Teorema 8.2.9 segue che l'integrale improprio considerato è assolutamente convergente e quindi convergente).

► Si consideri l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^n x} dx, \quad n \geq 1.$$

La funzione in esame è continua e quindi bisogna discutere l'integrabilità solamente in un intorno del punto $+\infty$. Nel punto $+\infty$ la funzione è un infinitesimo di ordine maggiore di 1, ma di ordine minore di α per ogni $\alpha > 1$ e pertanto il criterio sull'ordine di infinitesimo non può essere applicato (l'ordine maggiore di 1 esclude la seconda parte e l'ordine minore di α per ogni $\alpha > 1$ esclude la prima parte del teorema).

Pertanto, si ricorre direttamente alla definizione. Se $n = 1$ si ha, per ogni $b > 2$,

$$\int_2^b \frac{1}{x \log x} dx = [\log |\log x|]_2^b = \log \log b - \log \log 2,$$

mentre, se $n \geq 2$,

$$\int_2^b \frac{1}{x \log^n x} dx = \left[\frac{\log^{-n+1} x}{-n+1} \right]_2^b = -\frac{1}{n-1} (\log^{-n+1} b - \log^{-n+1} 2).$$

Si deduce che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log^n x} dx = \begin{cases} \frac{1}{(n-1) \log^{n-1} 2}, & n \geq 2, \\ +\infty, & n = 1 \end{cases}$$

e quindi l'integrale improprio è convergente se e solo se $n \geq 2$.

► Si consideri l'integrale improprio

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8.2.7)$$

Bisogna discutere l'integrabilità in un intorno del punto 0 ed in un intorno del punto $+\infty$.

Nel punto 0, vi è un infinito di ordine $1 - \alpha$ se $\alpha < 1$ altrimenti la funzione è limitata e quindi, per il criterio dell'ordine di infinito e tenendo conto della positività della funzione, l'integrale $\Gamma(\alpha)$ è convergente per $1 - \alpha < 1$, cioè per $\alpha > 0$ ed è divergente positivamente per $\alpha \leq 0$ in un intorno del punto 0.

Nel punto $+\infty$, la funzione è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande e quindi è sicuramente integrabile in un intorno del punto $+\infty$ per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

Si conclude che l'integrale assegnato è convergente per $\alpha > 0$ e divergente positivamente per $\alpha \leq 0$. La funzione $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla (8.2.7) è nota come *funzione gamma*.

