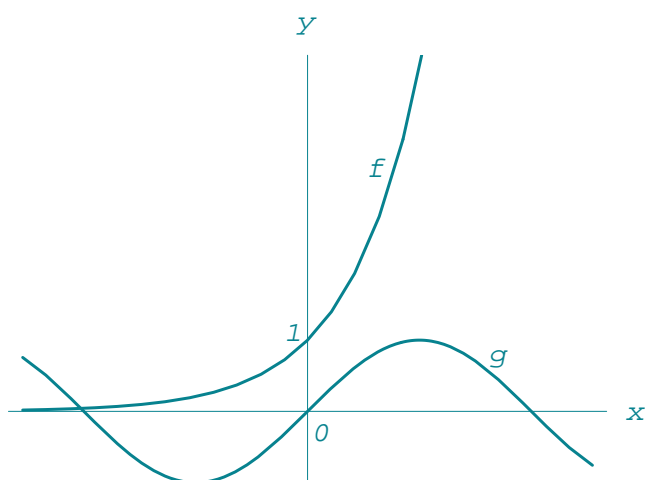


Michele Campiti

---

# Analisi Matematica

elementi principali della teoria



a.a. 2004-2005

---

Per i corsi di “*Analisi Matematica I & II*” per la *Facoltà di Ingegneria*, Università degli Studi di Lecce

---

*In copertina:* Grafico delle funzioni  $f(x) := \exp(x)$  e  $g(x) := \sin x$

# Prefazione

Il presente manuale contiene gli elementi principali della teoria dei corsi di Analisi Matematica I e II ed è indirizzato principalmente agli studenti dei Corsi di Laurea in Ingegneria di nuova istituzione. È stato pertanto privilegiato l'obiettivo della sintesi, in qualche caso anche a discapito della completezza, degli argomenti trattati, e diverse parti della teoria sono state introdotte in modo da basare l'esposizione su un numero abbastanza contenuto di definizioni di base. Sono stati spesso anche utilizzati strumenti intuitivi, soprattutto per ciò che riguarda gli argomenti introduttivi quali la teoria degli insiemi, gli insiemi numerici e la topologia degli spazi euclidei. Si è rinunciato a qualsiasi giustificazione teorica sull'introduzione degli insiemi numerici per cercare di introdurre subito gli strumenti fondamentali per lo studio delle funzioni reali, come la teoria dei limiti, il calcolo differenziale e quello integrale. Nonostante quanto sopra il presente manuale non è concepito come un mero testo di calcolo; si è cercato di esporre gli elementi della teoria in modo da favorire la formazione scientifica degli studenti e da incentivare l'interesse verso un'analisi critica dei problemi posti, nei limiti di tempo disponibile per il corso. La successiva acquisizione di nuove nozioni trova inoltre una base di partenza che non richiede la revisione di parti e concetti già appresi; viene favorito così in modo naturale il successivo approfondimento dei risultati esposti.

Sono ovviamente graditi suggerimenti e segnalazioni di errori da far pervenire preferibilmente per e-mail all'indirizzo: [michele.campiti@unile.it](mailto:michele.campiti@unile.it).

Michele Campiti



# Indice

<b>1</b>	<b>Preliminari</b>	<b>1</b>
1.1	Notazioni . . . . .	1
1.1.1	Notazioni insiemistiche . . . . .	1
1.1.2	Notazioni logiche . . . . .	3
1.1.3	Notazioni numeriche . . . . .	4
1.2	Alcune proprietà degli insiemi numerici . . . . .	7
1.2.1	Principio di induzione . . . . .	7
1.2.2	Formula del binomio di Newton . . . . .	7
1.2.3	Cenni di calcolo combinatorio . . . . .	9
1.2.4	Valore assoluto e distanza in $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.2.5	Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^n$ , $n \leq 3$ . . . . .	13
1.3	Proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ . . . . .	16
1.4	Funzioni . . . . .	18
1.5	Funzioni reali . . . . .	21
1.5.1	Operazioni con le funzioni reali . . . . .	21
1.5.2	Estremi di funzioni reali . . . . .	23
1.5.3	Proprietà di monotonia . . . . .	25
1.5.4	Proprietà di simmetria e periodicità . . . . .	29
1.6	Successioni . . . . .	30
1.6.1	Numero di Nepero . . . . .	31
1.7	Funzioni elementari . . . . .	33
1.7.1	Funzioni potenza ad esponente intero positivo . . . . .	33
1.7.2	Funzioni radice . . . . .	34
1.7.3	Funzione potenza ad esponente intero negativo . . . . .	36
1.7.4	Funzioni potenza ad esponente razionale e reale . . . . .	38
1.7.5	Funzioni esponenziali e logaritmiche . . . . .	39
1.7.6	Richiami di trigonometria e funzioni trigonometriche . . . . .	43
1.7.7	Funzioni trigonometriche inverse . . . . .	49

<b>2</b>	<b>Numeri complessi e polinomi</b>	<b>55</b>
2.1	Proprietà generali dei numeri complessi . . . . .	55
2.2	Coordinate polari . . . . .	59
2.3	Forma trigonometrica dei numeri complessi . . . . .	60
2.4	Forma esponenziale dei numeri complessi . . . . .	64
2.5	Polinomi ed equazioni algebriche . . . . .	65
2.5.1	Polinomi e relative radici . . . . .	65
2.5.2	Polinomi a coefficienti reali . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Equazioni e disequazioni</b>	<b>73</b>
3.1	Equazioni e disequazioni razionali intere . . . . .	73
3.2	Equazioni e disequazioni razionali fratte . . . . .	76
3.3	Sistemi di equazioni e disequazioni . . . . .	78
3.4	Equazioni e disequazioni irrazionali . . . . .	80
3.5	Equazioni e disequazioni con valore assoluto . . . . .	83
3.6	Metodo grafico . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Limiti delle funzioni reali</b>	<b>89</b>
4.1	Definizione generale di limite . . . . .	89
4.2	Prime proprietà dei limiti . . . . .	91
4.3	Limiti destri e sinistri . . . . .	93
4.4	Teoremi di confronto . . . . .	95
4.5	Operazioni sui limiti . . . . .	96
4.6	Limiti delle funzioni monotone . . . . .	102
4.7	Limiti delle funzioni elementari . . . . .	105
4.7.1	Funzioni potenza ad esponente intero positivo . . . . .	105
4.7.2	Funzioni radice . . . . .	106
4.7.3	Funzioni potenza ad esponente intero negativo . . . . .	106
4.7.4	Funzioni potenza ad esponente reale . . . . .	107
4.7.5	Funzioni esponenziali . . . . .	107
4.7.6	Funzioni logaritmo . . . . .	107
4.7.7	Funzioni trigonometriche . . . . .	108
4.7.8	Funzioni trigonometriche inverse . . . . .	108
4.8	Limiti di polinomi e funzioni razionali . . . . .	109
4.9	Limiti notevoli . . . . .	111
4.10	Infinitesimi ed infiniti . . . . .	116
4.10.1	Operazioni con infinitesimi ed infiniti . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Successioni e serie numeriche</b>	<b>125</b>
5.1	Limiti di successioni . . . . .	125
5.1.1	Successioni estratte . . . . .	133

5.1.2	Massimo e minimo limite . . . . .	134
5.1.3	Criterio di convergenza di Cauchy . . . . .	139
5.1.4	Massimo e minimo limite per le funzioni . . . . .	140
5.2	Serie numeriche . . . . .	142
5.2.1	Definizioni e proprietà preliminari . . . . .	142
5.2.2	Serie a termini positivi . . . . .	145
5.2.3	Serie alternanti . . . . .	152
5.2.4	Proprietà algebriche . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Funzioni continue</b>	<b>157</b>
6.1	Definizioni e proprietà preliminari . . . . .	157
6.2	Funzioni continue su intervalli chiusi e limitati . . . . .	161
6.3	Continuità delle funzioni monotone . . . . .	165
6.4	Funzioni uniformemente continue . . . . .	167
<b>7</b>	<b>Calcolo differenziale</b>	<b>171</b>
7.1	Funzioni derivabili . . . . .	171
7.1.1	Definizioni ed interpretazione geometrica . . . . .	171
7.1.2	Regole di derivazione . . . . .	177
7.1.3	Derivate delle funzioni elementari . . . . .	181
7.2	Applicazioni del calcolo differenziale . . . . .	187
7.2.1	Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange . . . . .	187
7.2.2	Teoremi di L'Hôpital . . . . .	190
7.2.3	Formula di Taylor . . . . .	197
7.2.4	Simboli di Landau e applicazioni della formula di Taylor al calcolo dei limiti . . . . .	205
7.3	Studio del grafico delle funzioni reali . . . . .	207
7.3.1	Monotonia e massimi e minimi relativi ed assoluti . . . . .	207
7.3.2	Convessità, concavità e flessi . . . . .	215
7.3.3	Asintoti . . . . .	221
7.3.4	Studio del grafico di una funzione reale . . . . .	224
<b>8</b>	<b>Calcolo integrale</b>	<b>231</b>
8.1	L'integrale secondo Riemann . . . . .	231
8.1.1	Suddivisioni di un intervallo . . . . .	231
8.1.2	Integrabilità delle funzioni limitate . . . . .	232
8.1.3	Interpretazione geometrica e proprietà dell'integrale esteso . . . . .	238
8.1.4	Primitive ed integrale indefinito . . . . .	241
8.1.5	Integrali indefiniti immediati . . . . .	246
8.1.6	Prime regole di integrazione . . . . .	248

8.2	Integrali impropri . . . . .	251
8.2.1	Integrali impropri di funzioni non limitate . . . . .	251
8.2.2	Integrali impropri su intervalli non limitati . . . . .	259

<i><b>Bibliografia</b></i>	<b>265</b>
----------------------------	------------



# Elenco delle figure

1.1	<i>Rappresentazione del prodotto cartesiano di due insiemi.</i>	3
1.2	<i>Rappresentazione geometrica dei numeri reali.</i>	13
1.3	<i>Riferimento cartesiano non ortogonale.</i>	14
1.4	<i>Riferimento cartesiano ortonormale.</i>	15
1.5	<i>Riferimento cartesiano dello spazio.</i>	16
1.6	<i>Esempio di massimo assoluto e relativo.</i>	25
1.7	<i>Funzione strettamente crescente (decrescente) in un intervallo.</i>	26
1.8	<i>Funzione strettamente crescente (decrescente) in un punto.</i>	28
1.9	<i>Funzione potenza ad esponente pari (<math>\geq 2</math>).</i>	34
1.10	<i>Funzione potenza ad esponente dispari (<math>\geq 3</math>).</i>	35
1.11	<i>Funzione radice con indice pari.</i>	36
1.12	<i>Funzione radice con indice dispari.</i>	37
1.13	<i>Funzione potenza ad esponente intero negativo pari.</i>	37
1.14	<i>Funzione potenza ad esponente intero negativo dispari.</i>	38
1.15	<i>Funzione potenza con esponente razionale o reale.</i>	40
1.16	<i>Funzione esponenziale.</i>	41
1.17	<i>Funzione logaritmo.</i>	42
1.18	<i>Circonferenza trigonometrica.</i>	43
1.19	<i>Funzioni seno e coseno.</i>	46
1.20	<i>Interpretazione geometrica della tangente.</i>	47
1.21	<i>Funzione tangente.</i>	48
1.22	<i>Interpretazione geometrica della cotangente.</i>	49
1.23	<i>Funzione cotangente.</i>	50
1.24	<i>Funzione arcoseno.</i>	51
1.25	<i>Funzione arcocoseno.</i>	52
1.26	<i>Funzione arcotangente.</i>	53
1.27	<i>Funzione arcocotangente.</i>	53
2.1	<i>Coordinate polari.</i>	60
2.2	<i>Radici terze e quinte di un numero complesso.</i>	63

3.1	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 1</i>	86
3.2	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 2</i>	87
3.3	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 3</i>	88
3.4	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 4</i>	88
4.1	<i>Limiti di una funzione monotona.</i>	105
4.2	<i>Limite notevole <math>\sin x/x</math> in 0.</i>	112
5.1	<i>Prodotto secondo Cauchy di due serie</i>	154
6.1	<i>Teorema degli zeri.</i>	163
6.2	<i>Approssimazione delle soluzioni con il teorema degli zeri.</i>	164
7.1	<i>Interpretazione geometrica della derivata.</i>	175
7.2	<i>Teorema di Rolle.</i>	188
7.3	<i>Teorema di Lagrange.</i>	190
7.4	<i>Polinomi di Taylor.</i>	199
7.5	<i>Funzione convessa o concava in un punto e punti di flesso.</i>	216
7.6	<i>Asintoto orizzontale e verticale.</i>	223
7.7	<i>Grafico della funzione.</i>	228
7.8	<i>Grafico della funzione.</i>	229
8.1	<i>Somma superiore ed inferiore relativa ad una suddivisione.</i>	233
8.2	<i>Teorema della media integrale.</i>	242