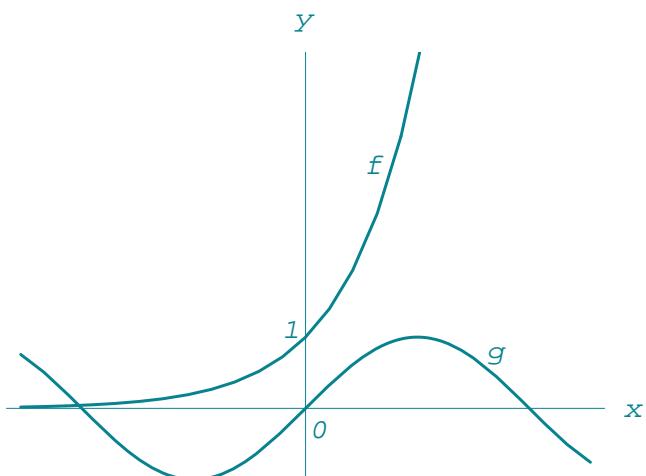


Michele Campiti

Analisi Matematica

elementi principali della teoria



a.a. 2004-2005

Per i corsi di “Analisi Matematica I & II” per la *Facoltà di Ingegneria*, Università degli Studi di Lecce

In copertina: Grafico delle funzioni $f(x) := \exp(x)$ e $g(x) := \sin x$

Prefazione

Il presente manuale contiene gli elementi principali della teoria dei corsi di Analisi Matematica I e II ed è indirizzato principalmente agli studenti dei Corsi di Laurea in Ingegneria di nuova istituzione. È stato pertanto privilegiato l'obiettivo della sintesi, in qualche caso anche a discapito della completezza, degli argomenti trattati, e diverse parti della teoria sono state introdotte in modo da basare l'esposizione su un numero abbastanza contenuto di definizioni di base. Sono stati spesso anche utilizzati strumenti intuitivi, soprattutto per ciò che riguarda gli argomenti introduttivi quali la teoria degli insiemi, gli insiemi numerici e la topologia degli spazi euclidei. Si è rinunciato a qualsiasi giustificazione teorica sull'introduzione degli insiemi numerici per cercare di introdurre subito gli strumenti fondamentali per lo studio delle funzioni reali, come la teoria dei limiti, il calcolo differenziale e quello integrale. Nonostante quanto sopra il presente manuale non è concepito come un mero testo di calcolo; si è cercato di esporre gli elementi della teoria in modo da favorire la formazione scientifica degli studenti e da incentivare l'interesse verso un'analisi critica dei problemi posti, nei limiti di tempo disponibile per il corso. La successiva acquisizione di nuove nozioni trova inoltre una base di partenza che non richiede la revisione di parti e concetti già appresi; viene favorito così in modo naturale il successivo approfondimento dei risultati esposti.

Sono ovviamente graditi suggerimenti e segnalazioni di errori da far pervenire preferibilmente per e-mail all'indirizzo: michele.campiti@unile.it.

Michele Campiti

Indice

1	Preliminari	1
1.1	Notazioni	1
1.1.1	Notazioni insiemistiche	1
1.1.2	Notazioni logiche	3
1.1.3	Notazioni numeriche	4
1.2	Alcune proprietà degli insiemi numerici	7
1.2.1	Principio di induzione	7
1.2.2	Formula del binomio di Newton	7
1.2.3	Cenni di calcolo combinatorio	9
1.2.4	Valore assoluto e distanza in \mathbb{R}	11
1.2.5	Rappresentazione geometrica di \mathbb{R}^n , $n \leq 3$	13
1.3	Proprietà dei sottoinsiemi di \mathbb{R}	16
1.4	Funzioni	18
1.5	Funzioni reali	21
1.5.1	Operazioni con le funzioni reali	21
1.5.2	Estremi di funzioni reali	23
1.5.3	Proprietà di monotonia	25
1.5.4	Proprietà di simmetria e periodicità	29
1.6	Successioni	30
1.6.1	Numero di Nepero	31
1.7	Funzioni elementari	33
1.7.1	Funzioni potenza ad esponente intero positivo	33
1.7.2	Funzioni radice	34
1.7.3	Funzione potenza ad esponente intero negativo	36
1.7.4	Funzioni potenza ad esponente razionale e reale	38
1.7.5	Funzioni esponenziali e logaritmiche	39
1.7.6	Richiami di trigonometria e funzioni trigonometriche .	43
1.7.7	Funzioni trigonometriche inverse	49

2 Numeri complessi e polinomi	55
2.1 Proprietà generali dei numeri complessi	55
2.2 Coordinate polari	59
2.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi	60
2.4 Forma esponenziale dei numeri complessi	64
2.5 Polinomi ed equazioni algebriche	65
2.5.1 Polinomi e relative radici	65
2.5.2 Polinomi a coefficienti reali	70
3 Equazioni e disequazioni	73
3.1 Equazioni e disequazioni razionali intere	73
3.2 Equazioni e disequazioni razionali fratte	76
3.3 Sistemi di equazioni e disequazioni	78
3.4 Equazioni e disequazioni irrazionali	80
3.5 Equazioni e disequazioni con valore assoluto	83
3.6 Metodo grafico	86
4 Limiti delle funzioni reali	89
4.1 Definizione generale di limite	89
4.2 Prime proprietà dei limiti	91
4.3 Limiti destri e sinistri	93
4.4 Teoremi di confronto	95
4.5 Operazioni sui limiti	96
4.6 Limiti delle funzioni monotone	102
4.7 Limiti delle funzioni elementari	105
4.7.1 Funzioni potenza ad esponente intero positivo	105
4.7.2 Funzioni radice	106
4.7.3 Funzioni potenza ad esponente intero negativo	106
4.7.4 Funzioni potenza ad esponente reale	107
4.7.5 Funzioni esponenziali	107
4.7.6 Funzioni logaritmo	107
4.7.7 Funzioni trigonometriche	108
4.7.8 Funzioni trigonometriche inverse	108
4.8 Limiti di polinomi e funzioni razionali	109
4.9 Limiti notevoli	111
4.10 Infinitesimi ed infiniti	116
4.10.1 Operazioni con infinitesimi ed infiniti	119
5 Successioni e serie numeriche	125
5.1 Limiti di successioni	125
5.1.1 Successioni estratte	133

5.1.2	Massimo e minimo limite	134
5.1.3	Criterio di convergenza di Cauchy	139
5.1.4	Massimo e minimo limite per le funzioni	140
5.2	Serie numeriche	142
5.2.1	Definizioni e proprietà preliminari	142
5.2.2	Serie a termini positivi	145
5.2.3	Serie alternanti	152
5.2.4	Proprietà algebriche	153
6	Funzioni continue	157
6.1	Definizioni e proprietà preliminari	157
6.2	Funzioni continue su intervalli chiusi e limitati	161
6.3	Continuità delle funzioni monotone	165
6.4	Funzioni uniformemente continue	167
7	Calcolo differenziale	171
7.1	Funzioni derivabili	171
7.1.1	Definizioni ed interpretazione geometrica	171
7.1.2	Regole di derivazione	177
7.1.3	Derivate delle funzioni elementari	181
7.2	Applicazioni del calcolo differenziale	187
7.2.1	Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange	187
7.2.2	Teoremi di L'Hôpital	190
7.2.3	Formula di Taylor	197
7.2.4	Simboli di Landau e applicazioni della formula di Taylor al calcolo dei limiti	205
7.3	Studio del grafico delle funzioni reali	207
7.3.1	Monotonia e massimi e minimi relativi ed assoluti	207
7.3.2	Convessità, concavità e flessi	215
7.3.3	Asintoti	221
7.3.4	Studio del grafico di una funzione reale	224
8	Calcolo integrale	231
8.1	L'integrale secondo Riemann	231
8.1.1	Suddivisioni di un intervallo	231
8.1.2	Integrabilità delle funzioni limitate	232
8.1.3	Interpretazione geometrica e proprietà dell'integrale esteso	238
8.1.4	Primitive ed integrale indefinito	241
8.1.5	Integrali indefiniti immediati	246
8.1.6	Prime regole di integrazione	248

8.2	Integrali impropri	251
8.2.1	Integrali impropri di funzioni non limitate	251
8.2.2	Integrali impropri su intervalli non limitati	259
	<i>Bibliografia</i>	265

Elenco delle figure

1.1	<i>Rappresentazione del prodotto cartesiano di due insiemi.</i>	3
1.2	<i>Rappresentazione geometrica dei numeri reali.</i>	13
1.3	<i>Riferimento cartesiano non ortogonale.</i>	14
1.4	<i>Riferimento cartesiano ortonormale.</i>	15
1.5	<i>Riferimento cartesiano dello spazio.</i>	16
1.6	<i>Esempio di massimo assoluto e relativo.</i>	25
1.7	<i>Funzione strettamente crescente (decrescente) in un intervallo.</i>	26
1.8	<i>Funzione strettamente crescente (decrescente) in un punto.</i>	28
1.9	<i>Funzione potenza ad esponente pari (≥ 2).</i>	34
1.10	<i>Funzione potenza ad esponente dispari (≥ 3).</i>	35
1.11	<i>Funzione radice con indice pari.</i>	36
1.12	<i>Funzione radice con indice dispari.</i>	37
1.13	<i>Funzione potenza ad esponente intero negativo pari.</i>	37
1.14	<i>Funzione potenza ad esponente intero negativo dispari.</i>	38
1.15	<i>Funzione potenza con esponente razionale o reale.</i>	40
1.16	<i>Funzione esponenziale.</i>	41
1.17	<i>Funzione logaritmo.</i>	42
1.18	<i>Circonferenza trigonometrica.</i>	43
1.19	<i>Funzioni seno e coseno.</i>	46
1.20	<i>Interpretazione geometrica della tangente.</i>	47
1.21	<i>Funzione tangente.</i>	48
1.22	<i>Interpretazione geometrica della cotangente.</i>	49
1.23	<i>Funzione cotangente.</i>	50
1.24	<i>Funzione arcoseno.</i>	51
1.25	<i>Funzione arcocoseno.</i>	52
1.26	<i>Funzione arcotangente.</i>	53
1.27	<i>Funzione arcocotangente.</i>	53
2.1	<i>Coordinate polari.</i>	60
2.2	<i>Radici terze e quinte di un numero complesso.</i>	63

3.1	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 1</i>	86
3.2	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 2</i>	87
3.3	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 3</i>	88
3.4	<i>Metodo grafico per le disequazioni: Esempio 4</i>	88
4.1	<i>Limiti di una funzione monotona.</i>	105
4.2	<i>Limite notevole $\sin x/x$ in 0.</i>	112
5.1	<i>Prodotto secondo Cauchy di due serie</i>	154
6.1	<i>Teorema degli zeri.</i>	163
6.2	<i>Approssimazione delle soluzioni con il teorema degli zeri.</i>	164
7.1	<i>Interpretazione geometrica della derivata.</i>	175
7.2	<i>Teorema di Rolle.</i>	188
7.3	<i>Teorema di Lagrange.</i>	190
7.4	<i>Polinomi di Taylor.</i>	199
7.5	<i>Funzione convessa o concava in un punto e punti di flesso.</i>	216
7.6	<i>Asintoto orizzontale e verticale.</i>	223
7.7	<i>Grafico della funzione.</i>	228
7.8	<i>Grafico della funzione.</i>	229
8.1	<i>Somma superiore ed inferiore relativa ad una suddivisione.</i>	233
8.2	<i>Teorema della media integrale.</i>	242