Corso di laurea: Ingegneria Informatica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2006/07
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

25.9.2006 Elementi di teoria degli insiemi. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Se $a > 0$, $k \in \mathbf{N}^*$ e $a^2 = k$, allora a è intero oppure non è razionale $(*)$. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: sottoinsiemi limitati, intervalli, intorni (destri e sinistri), insiemi aperti, chiusi, punto di accumulazione per un insieme. Maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Descrizione assiomatica di $\mathbf{R}$ e assioma di completezza. Varie formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza. Estremo superiore, estremo inferiore e loro caratterizzazioni $(*)$. Proprietà archimedea $(*)$. Densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ $(*)$. Esempi.

27.9.2006 Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore, sia in $\mathbf{R}$ che in $\mathbf{Q}$. Rappresentazione decimale dei numeri reali.
Principio di induzione. Esempi (fra cui la disuguaglianza di Bernoulli $(*)$).

29.9.2006 La media geometrica è minore o uguale alla media aritmetica $(*)$. Il binomio di Newton $(*)$. Varianti della disuguaglianza di Bernoulli $(*)$.
Funzioni: definizione, immagine, grafico, funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, invertibile, composizione tra funzioni e funzione identità. Funzioni reali di una variabile reale: monotòne, limitate, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo per una funzione.
Grafici di alcune funzioni elementari, potenze intere e relative inverse.

2.10.2006 Funzioni elementari: potenze ad esponente intero e razionale. Definizione della funzione esponenziale su $\mathbf{R}$: detti A l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q, q \in \mathbf{Q}, q \leqslant x\}$ e B l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q, q \in \mathbf{Q}, q > x\}$, $a^x = \sup A$ per per $a > 1$, $a^x = \inf A$ per per $0 < a < 1$. Il valore a^x coincide con $\inf B$ per $a > 1$, con $\sup B$ per $0 < a < 1$ $(*)$. Logaritmi. Funzioni trigonometriche e loro inverse. Grafici delle funzioni elementari. Esercizi sulla composizione di funzioni.

Numeri complessi - definizione di $\mathbf{C}$ come $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ in $\mathbf{C}$; $\mathbf{C}$ non ammette ordinamento totale; modulo e coniugato di un numero complesso. Identificazione di $\mathbf{R}$ con il sottoinsieme $\{(a, b) \in \mathbf{C} \,|\, b = 0\}$. L'unità immaginaria $(0, 1)$.
$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$. Parte reale e parte immaginaria; un numero

complesso $z = (a, b) = (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$ può essere scritto come $\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$ dove i denota $(0, 1)$.

4.10.2006 Numeri complessi - forma polare e forma esponenziale; significato geometrico di somma e prodotto. Radici n-esime di un numero complesso. Radici (o zeri) di un polinomio e loro molteplicità. In $\mathbf{R}$ un polinomio può essere scritto come prodotto di fattori irriducibili (irriducibili in $\mathbf{R}$) di grado uno e grado due. Teorema fondamentale dell'algebra. Un polinomio a coefficienti reali ha le radici a due a due coniugate. Conseguenza: un polinomio a coefficienti reali e di grado dispari ha almeno una radice reale. Formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Esercizi.

6.10.2006 Esercizi sui numeri complessi.
Successioni: definizione, limite di una successione, unicità del limite, esempi.

9.10.2006 Se $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ammette limite, ogni sottosuccessione estratta da $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ammette lo stesso limite $(*)$, teorema della permanenza del segno $(*)$, teorema del confronto $(*)$, le successioni convergenti sono limitate $(*)$, teorema dei due carabinieri $(*)$. Operazioni con i limiti. Successioni monotone: ogni successione monotona ammette limite $(*)$. Conseguenza: le successioni monotone convergono se e solo se sono limitate $(*)$. Ogni successione limitata ammette un'estratta convergente $(*)$. Esempi e controesempi.

11.10.2006 Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ implica che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ diverge positivamente, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, 1)$ implica che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge $(*)$. Esercizi e calcolo di limiti di alcune successioni, confronto tra vari andamenti (in particolare rapporto di due polinomi, $\frac{a^n}{n}$, $\frac{\log n}{n}$). Monotonia della successione $a_n = (1 + xn^{-1})^n$, $x \in \mathbf{R}^*$. Numero e.

13.10.2006 Successioni: successioni di Cauchy. Una successione è convergente se e solo se è di Cauchy $(*)$.
Serie: definizione di serie, convergente, divergente, indeterminata. $\sum a_n$ converge solo se $a_n \to 0$ $(*)$; il viceversa è falso. Esempi: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum \log(1 + \frac{1}{n})$. Serie geometrica. Criterio di Cauchy (conseguenza dell'analogo risultato per le successioni). Esempio: $\sum \frac{1}{n}$. Operazioni con le serie.
Serie a termini non negativi (e non positivi): criteri del confronto $(*)$, del confronto asintotico $(*)$, del rapporto $(*)$, della radice n-esima $(*)$. Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi, se esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n {a_n}^{1/n}$ (senza dimostrazione).

16.10.2006 Criterio di condensazione (traccia della dimostrazione). Serie assolutamente convergenti: criterio per le serie a segno variabile (assoluta convergenza) $(*)$.
Serie a segno alterno: criterio di Leibniz $(*)$.
Limiti notevoli per le successioni: data $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ infinitesima valgono $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+x_n)}{x_n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^p-1}{x_n}=p$, $p\in\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x_n}{x_n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n}{x_n^2}=\frac{1}{2}$.

Esercizi sulle serie.

18.10.2006 Limite di funzioni: definizione, esempi, unicità, limiti destro e sinistro, esistenza del limite per funzioni monotone, teoremi della permanenza del segno, del confronto, dei due carabinieri; limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto.
Limiti notevoli. Forme indeterminate: casi del rapporto tra la funzione esponenziale e un polinomio e tra il logaritmo e un polinomio all'infinito, prodotto tra logaritmo e un polinomio in zero.

20.10.2006 Forme indeterminate: limiti all'infinito e in zero del rapporto tra polinomi.
Funzioni continue: definizione ed esempi.
Esercizi su limiti e serie.

23.10.2006 Funzioni continue: f è continua in $x_0 \in D$, x_0 di accumulazione per D, se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $(*)$, limite della composizione di due funzioni (in particolare la composizione di due funzioni continue è continua) $(*)$. Teorema della permanenza del segno $(*)$. La somma, il prodotto, il rapporto (quando ha senso) di due funzioni continue è continua $(*)$. Le funzioni elementari sono continue. Punti di discontinuità: esempi. Teorema degli zeri $(*)$. Una funzione continua manda intervalli in intervalli (teorema dei valori intermedi) $(*)$. Controesempi.
Una funzione continua manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati o, equivalentemente, una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo $(*)$ (teorema di Weierstrass). Il teorema di Weierstrass vale anche se f è continua in un insieme chiuso e limitato che non è un intervallo. Controesempi.
Definizione di estremo ed estremante. Teorema di Rolle $(*)$.

25.10.2006 Una funzione continua ed invertibile in un intervallo I è monotona in I. Data una funzione continua ed invertibile in un intervallo I si ha che $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua. Esempi e controesempi.
Uniforme continuità: definizione, commenti, esempi, una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua $(*)$.

Funzioni derivabili - Rapporto incrementale, definizione di derivata, derivate destra e sinistra, equazione della retta tangente ad un grafico.

27.10.2006 Derivate: esempi di funzioni derivabili e non derivabili, se una funzione è derivabile in un punto è continua in tale punto $(*)$. Derivata di una somma di due funzioni derivabili, del loro prodotto, del loro rapporto $(*)$, regola della catena $(*)$, derivazione dell'inversa di una funzione in termini della funzione, derivate delle funzioni elementari $(*)$.
Toremi classici del calcolo differenziale: Fermat, Rolle (nel caso di funzioni derivabili), Lagrange. Una funzione derivabile è crescente (decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (positiva) $(*)$. Se una funzione ha la derivata positiva (negativa) allora è strettamente crescente (decrescente) $(*)$. Regola di de l'Hôpital. Esempi.
Funzioni di classe C^k con $k \in \mathbf{N}$: esempi di funzioni derivabili, ma non C^1.

30.10.2006 Condizioni necessarie e sufficienti sulla derivata seconda affinché un punto stazionario sia di minimo o di massimo $(*)$. Punti di flesso. Funzioni concave e funzioni convesse. Esempi. Condizioni necessarie e sufficienti sulla derivata prima e sulla derivata seconda affincheé una funzione sia concava o convessa. Asintoti: verticali, orizzontali ed obliqui.
Esercizi: grafici qualitativi di alcune funzioni reali.

3.11.2006 Confronto locale tra funzioni: funzioni asintotiche, o piccolo, o grande. Formula di Taylor $(*)$.

6.11.2006 Sviluppi di Taylor per le principali funzioni elementari. Esercizi con la formula di Taylor: confronto asintotico tra funzioni, limiti, serie.

8.11.2006 Integrale secondo Riemann: suddivisone di un intervallo, somme inferiore e superiore per una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $\mathcal{I}_-(f, T)$ e $\mathcal{I}_+(f, T)$). Se $T \subset S$ $\mathcal{I}_-(f, T) \leqslant \mathcal{I}_-(f, S)$ e $\mathcal{I}_+(f, T) \geqslant \mathcal{I}_+(f, S)$ $(*)$. Per ogni T, S suddivisioni vale $\mathcal{I}_-(f, T) \leqslant \mathcal{I}_+(f, S)$ $(*)$. Definizione di integrale inferiore ed integrale superiore, funzioni integrabili secondo Riemann. Una caratterizzazione delle funzioni integrabili $(*)$.

10.11.2006 Funzioni semplici, integrale di una funzione semplice, f è integrabile se e solo se esistono due successioni di funzioni semplici, una minorante ed una maggiornate, i cui integrali convergono allo stesso valore. Linearità e isotonìa dell'integrale.
Le funzioni continue sono integrabili, le funzioni discontinue in al più un numero finito di punti sono integrabili, le funzioni monotone sono

integrabili. Un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.
Integrali su sottointervalli, integrali orientati.
Lemma della media integrale (∗). Teorema fondamentale del calcolo integrale (∗).

15.11.2006 Formula di integrazione per parti (∗). Formula di integrazione per sostituzione (∗). Integrali razionali del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ nei seguenti casi: $p(x) = 1$ e $q(x) = (x-a)^k$ con $k \in \mathbf{N}$ e nel caso in cui $p(x) = ax + b$ e $q(x) = x^2 + cx + d$.

17.11.2006 Integrai razionali: continuazione. Alcune sostituzioni standard.

20.11.2006 Integrali del tipo $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$.
Integrali impropri: definizione, criterio del confronto (∗), criteri asintotici (quasi (∗)). Esempi.

22.11.2006 Criterio integrale per la convergenza delle serie (∗). Esercizi su serie ed integrali impropri.

24.11.2006 Esercizi: grafici di funzioni.

27.11.2006 Esercizi di riepilogo.