

Corso di laurea: Ingegneria Informatica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2007/08
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

24.9.2007 Elementi di teoria degli insiemi. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Se $a > 0$, $k \in \mathbf{N}^*$ e $a^2 = k$, allora a è intero oppure non è razionale (*). Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: sottoinsiemi limitati, intervalli, intorno insiemi aperti, chiusi.

26.9.2007 Punto di accumulazione per un insieme. Maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Descrizione assiomatica di $\mathbf{R}$ e assioma di completezza. Varie formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza. Estremo superiore, estremo inferiore e loro caratterizzazioni (*). Proprietà archimedeica (*). Densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ (*). Densità di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Se $c \geq 0$ soddisfa: se per ogni $\epsilon > 0$ vale $c < \epsilon$, allora $c = 0$. Esempi ed esercizi riguardo estremo inferiore, estremo superiore, punti di accumulazione.

28.9.2007 L'insieme $\{q \in \mathbf{Q} \mid q^2 \leq 2\}$ non ha estremo superiore razionale (*). Forma decimale di un numero reale (*). Principio di induzione: varie formulazioni equivalenti. Esempi (tra cui: disuguaglianza di Bernoulli (*), formula del binomio di Newton (*), disuguaglianza tra medie (*)).

Funzioni: definizioni generali (definizione di funzione, immagine, grafico, funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva). Funzioni reali di una variabile reale.

1.10.2007 Funzioni monotone, funzioni crescenti e decrescenti, crescenti in un punto e decrescenti in un punto. Esempi.

Funzioni elementari: potenze intere e loro inverse, esponenziale razionale. Funzione esponenziale e logaritmo.

3.10.2007 Funzioni elementari: funzioni trigonometriche e loro inverse. Composizione tra funzioni, traslazioni, esercizi ed esempi su grafici di traslate di una funzione data e composizione tra funzioni. In particolare le funzioni $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\arctg(\tg x)$.

Numeri complessi: introduzione. Definizione di $\mathbf{C}$ come $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ in $\mathbf{C}$; $\mathbf{C}$ non ammette ordinamento totale.

5.10.2007 Numeri complessi - Modulo e coniugato di un numero complesso. Identificazione di $\mathbf{R}$ con il sottoinsieme $\{(a, b) \in \mathbf{C} \mid b = 0\}$. L'unità immagi-

naria $(0, 1)$.

$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$. Parte reale e parte immaginaria; un numero complesso $z = (a, b) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ può essere scritto come $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ dove i denota $(0, 1)$. Forma polare e forma esponenziale; significato geometrico di somma e prodotto. Radici n -esime di un numero complesso. Radici (o zeri) di un polinomio e loro molteplicità. In $\mathbf{R}$ un polinomio può essere scritto come prodotto di fattori irriducibili (irriducibili in $\mathbf{R}$) di grado uno e grado due. Teorema fondamentale dell'algebra. Un polinomio a coefficienti reali ha le radici a due a due coniugate. Conseguenza: un polinomio a coefficienti reali e di grado dispari ha almeno una radice reale. Formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Esercizi.

8.10.2007 Esercizi sui numeri complessi.

Successioni: definizione, definizione di limite, unicità del limite, esempi di limiti, definizione di sottosuccessione, se una successione ammette limite ogni sua sottosuccessione ammette lo stesso limite (*), teorema della permanenza del segno (*). Se $\lim_n a_n = +\infty$ allora $\lim_n a_n^{-1} = 0$ (*); Se $\lim_n |a_n| = +\infty$ allora $\lim_n a_n^{-1} = 0$ (*), ma non il viceversa (*).

10.10.2007 Operazioni con i limiti. Teorema del confronto (*). Ogni successione convergente è limitata (*). Teorema dei due carabinieri (*). Esercizi e calcolo di limiti di alcune successioni, limite per n che va all'infinito per un polinomio in n , e per il rapporto tra due polinomi. Data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a termini positivi, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ implica che $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ diverge positivamente (*). Andamento all'infinito per $\frac{a^n}{n^k}$, a e k fissati.

12.10.2007 Lezione saltata per le candidature a rettore.

15.10.2007 Calcolo del limite di $\frac{\log n}{n}$. Monotonia della successione $a_n = (1 + xn^{-1})^n$, $x \in \mathbf{R}^*$. Numero $e := \lim_n (1 + n^{-1})^n = \sup_n (1 + n^{-1})^n$. $\lim_n (1 + xn^{-1})^n = e^x$. Limiti notevoli per le successioni: data $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ con $\lim_n x_n = 0$ valgono $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1$ (*), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1$ (*), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^p - 1}{x_n} = p$ (*), $p \in \mathbf{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ (*), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ (*).

17.10.2007 Esercizi sui limiti.

Serie: definizione di serie, serie convergente, divergente, indeterminata. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ (*). Esempi e controesempi: $\sum_n \frac{1}{n(n+1)} = 1$, $\sum_n \log 1 + n^{-1} = +\infty$. Serie geometrica di ragione q : $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$ per $-1 < q < 1$ (*).

19.10.2007 Operazioni con le serie. Criterio di Cauchy (conseguenza dell'analogo risultato per le successioni). Esempio: $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. Le serie a termini positivi (e a termini negativi) non sono indeterminate. Serie a termini positivi (o non negativi): criteri del confronto (*), del confronto asintotico (*), del rapporto (*), della radice n -esima (*) e loro corollari (*). Data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a termini positivi, se esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n a_n^{1/n}$ (senza dimostrazione). Criterio di condensazione (*). Esercizi sulle serie.

22.10.2007 Serie assolutamente convergenti: criterio per le serie a segno variabile (assoluta convergenza) (*). Serie a segno alterno: criterio di Leibniz (*). Esercizi sulle serie.

Funzioni reali di una variabili reale: definizione di limite.

23.10.2007 Limite di funzioni: caratterizzazione del limite tramite successioni (*), esempi, unicità, limiti destro e sinistro, esistenza del limite per funzioni monotone, teoremi della permanenza del segno, del confronto, dei due carabinieri; limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto. Limiti notevoli. Forme indeterminate: casi del rapporto tra la funzione esponenziale e un polinomio e tra il logaritmo e un polinomio all'infinito, prodotto tra logaritmo e un polinomio in zero. Forme indeterminate: limiti all'infinito e in zero del rapporto tra polinomi, polinomi e funzione esponenziale e logaritmica. Funzioni continue: definizione ed esempi.

24.10.2007 Funzioni continue: f è continua in $x_0 \in D$, x_0 di accumulazione per D , se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (*). Teorema della permanenza del segno (*). La somma, il prodotto, il rapporto (quando ha senso) di due funzioni continue è continua, la composizione di due funzioni continue è continua. Le funzioni elementari sono continue. Punti di discontinuità: esempi. Teorema degli zeri (*). Una funzione continua manda intervalli in intervalli (teorema dei valori intermedi) (*). Controesempi. Una funzione continua manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati o, equivalentemente, una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo (*) (teorema di Weierstrass). Il teorema di Weierstrass vale anche se f è continua in un insieme chiuso e limitato che non è un intervallo. Controesempi.

26.10.2007 Definizione di estremo ed estremante. Teorema di Rolle (*). Una funzione continua ed invertibile in un intervallo I è monotona in I . Data una funzione continua ed invertibile in un intervallo I si ha che $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$

è continua. Esempi e controesempi.

Uniforme continuità: definizione, commenti, esempi. Una funzione uniformemente continua in D è continua in ogni punto di D , una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua in tale intervallo (*).

Funzioni derivabili - Rapporto incrementale, definizione di derivata, derivate destra e sinistra, equazione della retta tangente ad un grafico. Derivate: esempi di funzioni derivabili e non derivabili, derivata della funzione $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ e di $f(x) = |x|$. Se una funzione è derivabile in un punto è continua in tale punto (*).

Esercizi sui limiti.

29.10.2007 Date due funzioni derivabili in un punto, Derivata della loro somma, del loro prodotto, del loro rapporto (*), regola della catena (*), derivazione dell'inversa di una funzione in termini della funzione, derivate delle funzioni elementari (*).

Toremi classici del calcolo differenziale: Fermat, Rolle (nel caso di funzioni derivabili), Lagrange. Una funzione derivabile è crescente (decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (positiva) (*). Se una funzione ha la derivata positiva (negativa) allora è strettamente crescente (decrescente) (*). Regola di de l'Hôpital. Esempi.

30.10.2007 Data una funzione derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, se esiste finito il limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ (*) (applicazione di de l'Hôpital). Derivate successive: funzioni di classe C^k con $k \in \mathbf{N}$: esempi di funzioni derivabili, ma non C^1 . Condizioni necessarie e condizioni sufficienti sulla derivata seconda affinché un punto sia di estremo locale interno. Condizioni sulle derivate di ordine superiore. Convessità e concavità: definizione, se una funzione è concava o convessa in I allora è continua all'interno di I . Asintoti. Flessi.

5.11.2007 Esercizi su grafici funzioni.

6.11.2007 Confronto locale tra funzioni: funzioni asintotiche, o piccolo, o grande. Infinito e infinitesimo di ordine $\alpha > 0$. Sviluppi asintotici e formula di Taylor: con resto di Peano (*), con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari.

7.11.2007 Applicazioni della formula di Taylor: calcolo dello sviluppo di alcune funzioni, calcolo di limiti, studio di serie, approssimazione del numero e (e di altri) tramite la formula di Taylor, calcolo dell'ordine di infinitesimo di alcune funzioni. La serie $\sum_n \frac{1}{n!}$ converge al numero e . Serie di Taylor:

cenni (giustificazione formale del simbolo $e^{i\theta}$ per il numero complesso $\cos \theta + i \sin \theta$).

- 9.11.2007 Integrale secondo Riemann: suddivisione di un intervallo, somme inferiore e superiore per una funzione $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $\mathcal{I}_-(f, T)$ e $\mathcal{I}_+(f, T)$). Se $T \subset S$ si ha $\mathcal{I}_-(f, T) \leq \mathcal{I}_-(f, S)$ e $\mathcal{I}_+(f, T) \geq \mathcal{I}_+(f, S)$ (*). Per ogni T, S suddivisioni vale $\mathcal{I}_-(f, T) \geq \mathcal{I}_+(f, S)$ (*). Definizione di integrale inferiore ed integrale superiore, funzioni integrabili secondo Riemann. Una caratterizzazione delle funzioni integrabili (*). Funzioni semplici, integrale di una funzione semplice, f è integrabile se e solo se esistono due successioni di funzioni semplici, una minorante ad una maggiorante, i cui integrali convergono allo stesso valore. Linearità e isotonia dell'integrale. Le funzioni continue sono integrabili, le funzioni discontinue in al più un numero finito di punti sono integrabili, le funzioni monotone sono integrabili. Un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Integrali su sottointervalli, integrali orientati.
- 13.11.2007 Lemma della media integrale (*). Teorema fondamentale del calcolo integrale (*). Metodi di integrazione: formula di integrazione per parti (*), formula di integrazione per sostituzione (*).
- 14.11.2007 Integrali razionali.
- 19.11.2007 Alcune sostituzioni standard. Integrali di funzioni tipo $R(\cos x, \sin x)$ e $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ con $R = R(u, v)$ rapporto di polinomi nelle variabili u e v . Ancora esercizi sugli integrali razionali.
- 21.11.2007 Integrali impropri o generalizzati: definizione in $[a, b)$, $b \in \bar{\mathbf{R}}$, e in $(a, b]$ con $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$. Esempi: integrale di $x^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$ in $(0, 1]$ e in $[1, +\infty)$. Criterio del confronto per funzioni non negative e corollario (criterio del confronto asintotico) (*).
- 23.11.2007 Criterio integrale per la convergenza delle serie (*). Esercizi sugli integrali impropri. Esercizi sulle serie.
- 26.11.2007 Approssimazione di integrali tramite la formula di Taylor. Esercizi su integrali impropri. In particolare studio dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$. La funzione Gamma di Eulero: definizione e confronto con $n!$. Ancora sulla formula di Stirling.