Corso di laurea: Ingegneria Gestionale
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2007/08
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

24.9.2007 Elementi di teoria degli insiemi. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Se $a > 0$, $k \in \mathbf{N}^*$ e $a^2 = k$, allora a è intero oppure non è razionale $(*)$. Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: sottoinsiemi limitati, intervalli, intorni insiemi aperti, chiusi, punto di accumulazione per un insieme. Maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme.

25.9.2007 Descrizione assiomatica di $\mathbf{R}$ e assioma di completezza. Varie formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza. Estremo superiore, estremo inferiore e loro caratterizzazioni $(*)$. Proprietà archimedea. Densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ $(*)$ e di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Se $c \geqslant 0$ soddisfa: se per ogni $\epsilon > 0$ vale $c < \epsilon$, allora $c = 0$. Esempi ed esercizi.
Principio di induzione. Esempi: binomio di Newton $(*)$ e disuguaglianza di Bernoulli $(*)$.

1.10.2007 Esercizi con l'induzione, disuguaglianza tra medie $(*)$).
Funzioni: definizioni generali (definizione di funzione, immagine, grafico, funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva). Funzioni reali di una variabile reale. Funzioni monotone, funzioni crescenti e decrescenti, crescenti in un punto e decrescenti in un punto. Esempi.
Funzioni elementari: potenze intere e loro inverse, esponenziale razionale. Funzione esponenziale e logaritmo.

2.10.2007 Funzioni elementari: funzioni trigonometriche e loro inverse. Composizione tra funzioni, traslazioni, esercizi ed esempi su grafici di traslate di una funzione data e composizione tra funzioni. In particolare le funzioni $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Numeri complessi: introduzione. Definizione di $\mathbf{C}$ come $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ in $\mathbf{C}$; $\mathbf{C}$ non ammette ordinamento totale. Modulo e coniugato di un numero complesso. Identificazione di $\mathbf{R}$ con il sottoinsieme $\{(a, b) \in \mathbf{C} \mid b = 0\}$. L'unità immaginaria $(0, 1)$.
$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$. Parte reale e parte immaginaria; un numero complesso $z = (a, b) = (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$ può essere scritto come $\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$ dove i denota $(0, 1)$. Forma polare e forma esponenziale; significato geometrico di somma e prodotto. Radici n-esime dell'unità.

8.10.2007 Radici n-esime di un numero complesso. Radici (o zeri) di un polinomio e loro molteplicità. In $\mathbf{R}$ un polinomio può essere scritto come prodotto di fattori irriducibili (irriducibili in $\mathbf{R}$) di grado uno e grado due. Teorema fondamentale dell'algebra. Un polinomio a coefficienti reali ha le radici a due a due coniugate. Conseguenza: un polinomio a coefficienti reali e di grado dispari ha almeno una radice reale. Formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Esercizi.

Successioni: definizione, definizione di limite, unicità del limite, esempi di limiti, definizione di sottosuccessione, se una successione ammette limite ogni sua sottosuccessione ammette lo stesso limite $(*)$, teorema della permanenza del segno $(*)$. Commenti. Teorema del confronto $(*)$. Commenti. Se $\lim_n a_n = +\infty$ allora $\lim_n {a_n}^{-1} = 0$ $(*)$; Se $\lim_n |a_n| = +\infty$ allora $\lim_n {a_n}^{-1} = 0$ $(*)$, ma non il viceversa $(*)$.

9.10.2007 Le successioni convergenti sono limitate $(*)$, teorema dei due carabinieri $(*)$. Operazioni con i limiti. Successioni monotone: ogni successione monotona ammette limite $(*)$. Conseguenza: le successioni monotone convergono se e solo se sono limitate $(*)$. Ogni successione limitata ammette un'estratta convergente $(*)$. Esempi e controesempi. Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ implica che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ diverge positivamente, $(*)$.
Esercizi e calcolo di limiti di alcune successioni, confronto tra vari andamenti (in particolare rapporto di due polinomi, $\frac{a^n}{n^k}$ con a e k fissati). Monotonia della successione $a_n = (1 + xn^{-1})^n$, $x \in \mathbf{R}^*$. Numero e.

15.10.2007 Ancora sul numero e. Calcolo del limite di $\frac{\log n}{n}$ $(*)$. $\lim_n \log n = +\infty$, $\lim_n \frac{\log n^a}{n^b} = 0$ per ogni $a, b > 0$. Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.
Limiti notevoli per le successioni: data $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $lim_n x_n = 0$ valgono $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$ $(*)$., $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^p-1}{x_n} = p$, $p \in \mathbf{R}$ $(*)$., $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1$ $(*)$., $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ $(*)$..
Esercizi sui limiti si successioni.

Serie: definizione di serie, convergente, divergente, indeterminata. $\sum a_n$ converge solo se $a_n \to 0$ $(*)$; il viceversa è falso. Esempi: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum \log(1 + \frac{1}{n})$. Serie geometrica. Criterio di Cauchy (conseguenza dell'analogo risultato per le successioni). Esempio: $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

16.10.2007 Operazioni con le serie.
Le serie a termini positivi (e a termini negativi) non sono indeterminate.
Serie a termini positivi (o non negativi): criteri del confronto $(*)$, del

confronto asintotico ($*$), del rapporto ($*$), della radice n-esima ($*$) e loro corollari ($*$). Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi, se esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n {a_n}^{1/n}$ (senza dimostrazione). Criterio di condensazione (traccia della dimostrazione). Esercizi sulle serie.

22.10.2007 Serie assolutamente convergenti: criterio per le serie a segno variabile (assoluta convergenza) ($*$). Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi sulle serie.

Limite di funzioni: definizione, esempi, caratterizzazione del limite tramite successioni ($*$), unicità, limiti destro e sinistro, esistenza del limite per funzioni monotone, teoremi della permanenza del segno, del confronto, dei due carabinieri; limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto.
Forme determinate per la somma e prodotto di due funzioni.

23.10.2007 Limiti notevoli. Forme indeterminate: casi del rapporto tra la funzione esponenziale e un polinomio e tra il logaritmo e un polinomio all'infinito, prodotto tra logaritmo e un polinomio in zero. Forme indeterminate: limiti all'infinito e in zero del rapporto tra polinomi, polinomi e funzione esponenziale e logaritmica.
Funzioni continue: definizione ed esempi. Una funzione f è continua in $x_0 \in D$, x_0 di accumulazione per D, se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($*$). Teorema della permanenza del segno ($*$). La somma, il prodotto, il rapporto (quando ha senso) di due funzioni continue è continua, la composizione di due funzioni continue è continua. Le funzioni elementari sono continue. Punti di discontinuità: esempi. Teorema degli zeri ($*$). Una funzione continua manda intervalli in intervalli (teorema dei valori intermedi). Controesempi.
Una funzione continua manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati o, equivalentemente, una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo (teorema di Weierstrass). Il teorema di Weierstrass vale anche se f è continua in un insieme chiuso e limitato che non è un intervallo. Controesempi.

29.10.2007 Definizione di estremo ed estremante. Una funzione continua ed invertibile in un intervallo I è monotona in I. Data una funzione continua ed invertibile in un intervallo I si ha che $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua. Esempi e controesempi.
Uniforme continuità: definizione, commenti, esempi. Una funzione uniformemente continua in D è continua in ogni punto di D, una funzione

	continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua in tale intervallo. Funzioni derivabili - Rapporto incrementale, definizione di derivata, derivate destra e sinistra, equazione della retta tangente ad un grafico. Derivate: esempi di funzioni derivabili e non derivabili. Se una funzione è derivabile in un punto è continua in tale punto $(*)$. Date due funzioni derivabili in un punto, Derivata della loro somma, del loro prodotto, del loro rapporto, regola della catena, derivazione dell'inversa di una funzione in termini della funzione, derivate delle funzioni elementari $(*)$. Esercizi sui limiti.
30.10.2007	Toremi classici del calcolo differenziale: Fermat $(*)$, Rolle $(*)$, Lagrange $(*)$. Una funzione derivabile è crescente (decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (positiva). Se una funzione ha la derivata positiva (negativa) allora è strettamente crescente (decrescente). Regola di de l'Hôpital. Esempi. Data una funzione derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, se esiste finito il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ $(*)$ (applicazione di de l'Hôpital). Derivate successive: funzioni di classe C^k con $k \in \mathbf{N}$: esempi di funzioni derivabili, ma non C^1. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti sulla derivata seconda affinché un punto sia di estremo locale interno. Condizioni sulle derivate di ordine superiore. Convessità e concavità: definizione, se una funzione è concava o convessa in I allora è continua all'interno di I. Studio del grafico di una funzione: esercizi.
5.11.2007	Esercizi su grafici funzioni. Confronto locale tra funzioni: funzioni asintotiche, o piccolo, o grande. Infinito e infinitesimo di ordine $\alpha > 0$. Sviluppi asintotici e formula di Taylor: con resto di Peano $(*)$, con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari.
6.11.2007	Sviluppi di alcune funzioni elementari. Applicazioni della formula di Taylor: calcolo dello sviluppo di alcune funzioni, calcolo di limiti, studio di serie, approssimazione del numero e (e di altri) tramite la formula di Taylor, calcolo dell'ordine di infinitesimo di alcune funzioni.
12.11.2007	Integrale secondo Riemann: suddivisione di un intervallo, somme inferiore e superiore per una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $\mathcal{I}_-(f, T)$ e $\mathcal{I}_+(f, T)$). Se $T \subset S$ si ha $\mathcal{I}_-(f, T) \leqslant \mathcal{I}_-(f, S)$ e $\mathcal{I}_+(f, T) \geqslant \mathcal{I}_+(f, S)$ $(*)$. Per ogni

T, S suddivisioni vale $\mathcal{I}_-(f,T) \geqslant \mathcal{I}_+(f,S)$ $(*)$. Definizione di integrale inferiore ed integrale superiore, funzioni integrabili secondo Riemann. Una caratterizzazione delle funzioni integrabili.
Funzioni semplici, integrale di una funzione semplice, f è integrabile se e solo se esistono due successioni di funzioni semplici, una minorante ad una maggiorante, i cui integrali convergono allo stesso valore. Linearità e isotònia dell'integrale.

13.11.2007 Le funzioni continue sono integrabili, le funzioni discontinue in al più un numero finito di punti sono integrabili, le funzioni monotone sono integrabili. Un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Integrali su sottointervalli, integrali orientati. Lemma della media integrale $(*)$. Teorema fondamentale del calcolo integrale $(*)$.
Metodi di integrazione: formula di integrazione per parti $(*)$, formula di integrazione per sostituzione $(*)$.

19.11.2007 Integrali razionali. Alcune sostituzioni standard.

20.11.2007 Integrali di funzioni tipo $R(\cos x, \mathrm{sen} x)$ e $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ con $R = R(u,v)$ rapporto di polinomi nelle variabili u e v. Ancora esercizi sugli integrali razionali. Esercizi di riepilogo.