Corso di laurea: Ingegneria Civile
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica I** – a.a. 2011/2012
Docenti: Fabio Paronetto e Fabio Ancona

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

10.10.2011 Introduzione al corso: breve presentazione dei contenuti del corso.

Qualche elemento di teoria degli insiemi. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Alcune osservazioni sulla riduzione in fattori primi di un numero naturale (la riduzione è unica; un numero e tutte le sua potenze hanno esattamente gli stessi fattori primi nella loro riduzione). Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale (∗). Primi assiomi che caratterizzeranno i numeri reali (tutti tranne l'assioma di completezza). Alcune proprietà che si possono dedurre dagli assiomi.

11.10.2011 Osservazione: gli assiomi visti finora sono soddisfatti anche dall'insieme $\mathbf{Q}$. Dimostrazione di alcune delle proprietà che scendono dagli assiomi viste precedentemente.
Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare). Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorni (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, aperto, chiuso. Esempi. Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato (e non vuoto). Assioma di completezza. Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$ (∗) (analogamente se $a = \max A$ allora $a = \sup A$).

12.10.2011 Caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato (∗). Esempi. Proprietà archimedea dei numeri reali come conseguenza dell'assioma di completezza (∗). Alcune conseguenze della proprietà archimedea: se $c \geqslant 0$ è tale che $c < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ allora $c = 0$ (∗), parte intera di un numero reale. Densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ (∗). L'insieme dei numeri razionali non soddisfa l'assioma di completezza (esistono insiemi di numeri razionali il cui estremo superiore non è un numero razionale). Punto di accumulazione. Estremo superiore, estremo inferiore e punti di accumulazione per gli intervalli.

17.10.2011 Estremo superiore, estremo inferiore e punti di accumulazione: esempi per alcuni insiemi.

Principio di induzione: varie formulazioni, esempi. Cosa significa essere induttivo. Disuguaglianza di Bernoulli.

18.10.2011 Binomio di Newton $(*)$. La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica $(*)$. Altri esempi di dimostrazione per induzione.

Funzioni: definizione di funzione, immagine, grafico, restrizione di una funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive, invertibili. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali e $\mathbf{N}$ dei numeri naturali.

19.10.2011 Non esiste una corrispondenza biunovoca tra l'insieme dei naturali $\mathbf{N}$ e l'intervallo $(0,1)$ (e quindi nemmeno tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{R}$).
Funzione identità di un insieme X. Operazione di composizione tra due funzioni.
Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti, monotòne, strettamente monotòne. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotòne. Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione.
Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale, radici n-esime, potenze ad esponente razionale, funzione esponenziale sui razionali.

24.10.2011 Funzione esponenziale sui reali - L'insieme $E = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q \,, q \in \mathbf{Q} \text{ e } q > 0\}$ ha come estremo inferiore 1 $(*)$; dati $a > 1$ e $b \in \mathbf{R}$ $a^b := \sup A$ dove $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q \,, q \in \mathbf{Q} \text{ e } q \leqslant b\}$. Dato l'insieme $B = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q \,, q \in \mathbf{Q} \text{ e } q > b\}$ si ha che $\inf B = \sup A$. Analogamente per $a \in (0,1)$ si definisce $a^b := \inf A$ dove $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q \,, q \in \mathbf{Q} \text{ e } q \leqslant b\}$ e si può mostrare che $\sup B = \inf A$.
Proprietà e biiettività della funzione ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo.
Funzioni trigonometriche: definizione di sen, cos, tg.

25.10.2011 Ancora sulle funzioni trigonometriche. Loro grafici.
Definizione di arcsen, arccos, arctg e loro grafici. Grafici della composizione tra sen e arcsen e tra arcsen e sen. Idem con cos e arccos, tra tg e

arctg.
Disegni qualitativi di grafici manipolando grafici noti.

26.10.2011 Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Esempi. Unicità del limite. Definizione di sottosuccessione di una successione data. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccesione ammette lo stesso limite $(*)$. Teorema della permanenza del segno $(*)$. Ogni successione convergente è limitata $(*)$. Controesempi. Teorema dei due carabinieri $(*)$. Operazioni con i limiti. Esempi e controesempi.

2.11.2011 Successioni - Teorema del confronto. Successioni monotone. Una successione monotone ammette limite. Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti. Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.
Alcuni limiti: $\lim_{n\to+\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$; $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ con p polinomio, $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi. Criterio del rapporto per successioni $(*)$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$. Le due successioni $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone $(*)$. Il numero e come limite di $(1+\frac{1}{n})^n$ per $n \to +\infty$; anche $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$ $(*)$.
In generale valgono

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}} = e^x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

per ogni successione $\{a_n\}_n$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Alcuni esempi ed esercizi.

7.11.2011 Alcuni limiti: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ $(*)$.
Limiti notevoli - Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ valgono: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$.
Esempi ed esercizi.

8.11.2011 Esercizi sui limiti di successioni.
Serie numeriche - Introduzione, definizione di serie, serie geometrica.

9.11.2011 Carattere di una serie, serie convergenti, divergenti, indeterminate. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ $(*)$.

Il viceversa è falso: esempi. Criterio di Cauchy per le serie. Operazioni con le serie.
Serie a termini positivi - Criteri del confronto (∗), del confronto asintotico (∗), del rapporto (∗), e suo corollario (∗), della radice n-esima e suo corollario (∗). Se esiste il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero.
Vari esempi di serie convergenti e divergenti.

14.11.2011 Criterio di condensazione di Cauchy. Commenti. Serie armonica generalizzata. Esercizi sulle serie.

15.11.2011 Criterio di Leibniz (∗). Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente.
Esercizi sulle serie.

16.11.2011 Limiti di funzioni reali - Definizione e proprietà (teorema della permanenza del segno, se il limite è finito la funzione localmente è limitata, confronto, teorema dei due carabinieri limite della somma e del prodotto di due funzioni). Esempi.

Limiti notevoli. Esercizi sul calcolo di limiti.

Lezioni tenute dal prof. F. Ancona.

21.11.2011 Definizione di funzione continua, continuità a sinistra e a destra. Esempi. Analisi dei punti di discontinuità. Caratterizzazione della continuità tramite i limiti di successioni. Teorema di Bolzano o degli zeri (∗).

22.11.2011 Applicazione del Teorema degli zeri alla ricerca di punti in cui due funzioni continue, definite su un intervallo, coincidono. Teorema dei valori intermedi (∗). L'immagine tramite una funzione continua di un intervallo è un intervallo. Monotonia e continuità della funzione inversa di una funzione continua, invertibile, definita su un intervallo. Esempi. Enunciato del Teorema di Bolzano-Weierstass per successioni. Teorema di Weierstass sull'esistenza del massimo e minimo di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati (∗). Esempi. Applicazione del teorema di Weierstrass all'esistenza del minimo per funzioni continue definite su un intervallo che ammettono limite $+\infty$ negli estremi dell'intervallo.

23.11.2011 Esempi ed esercizi su funzioni continue. Applicazioni del teorema di Weierstrass. Definizione di derivata e di retta tangente al grafico di una funzione. Derivate destre e sinistre.

28.11.2011 Derivabilita' di una funzione implica la continuita' ($*$). Analisi dei punti di non derivabilita' di una funzione continua: punti angolosi, con flesso a tangente verticale, cuspidi, in cui non esiste il limite del rapporto incrementale (sinistro o destro). Regole di derivazione di somme, prodotti, quozienti. Esempi. Regole di derivazione della funzione composta e della funzione inversa. Esempi di calcolo di derivate con la funzione composta.

29-30.11.2011 Derivata della funzione inversa delle (restrizioni delle) funzioni trigonometriche. Teorema di Fermat ($*$). Esempi. Teorema di Rolle e Lagrange (con dimostrazione dell'equivalenza dei due teoremi e del teorema di Rolle). Caratterizzazione delle funzioni monotone e delle funzioni costanti su intervalli. Applicazioni ed esempi (controllo della monotonia del termine generale di una serie alternata, dim. della disequazione $e^x \geqslant 1+x$). Esempio di analisi del grafico di una funzione.

5-6.12.2011 Definizione di asintoto verticale, orizzontale, obliquo. Funzioni pari e dispari. Esercizi su grafici di funzioni (senza calcolo della derivata seconda). Teorema di Cauchy ($*$). Regola di de l'Hospital. Applicazione al calcolo dei limiti della gerarchia degli infiniti. Teorema sul limite della derivata.

Fine delle lezioni tenute dal prof. F. Ancona.

7.12.2011 la lezione non si è tenuta

12.12.2011 Derivate di ordine successivo: funzioni di classe C^k. Esempio di una funzione derivabile, ma non C^1. Funzioni derivabili due volte: classificazione dei punti di estremo tramite la derivata seconda ($*$); una funzione derivabile $f : I \to \mathbf{R}$ è convessa se e solo se f' è crescente; se inoltre è derivabile due volte f è convessa se e solo se f'' è non negativa.

Esercizi su grafici di funzioni.

13.12.2011 Esercizi su grafici di funzioni.

14.12.2011 Confronto locale tra funzioni - Dati $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$, $\alpha > 0$: f è asintotica a $|x - x_0|^\alpha$ ($\alpha > 0$) in x_0, f è infinitesima in x_0, f è infinitesima di ordine α in x_0, f è "o piccolo" di $|x - x_0|^\alpha$ ($\alpha > 0$) in un punto x_0, f è un infinito in x_0, f è infinito di ordine α in x_0. Esempi di funzioni che hanno ordine di infinitesimo e che non hanno ordine di infinitesimo.
Formula di Taylor con resto di Peano ($*$). Calcolo del polinomio di Taylor in $x = 0$ per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

19.12.2011 Formula di Taylor con resto di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Esercizi: applicazioni della formula di Taylor al calcolo di limiti.

20.12.2011 Esercizi: applicazione della formula di Taylor al calcolo di limiti e allo studio di serie numeriche.
Stima di qualche valore numerico tramite la formula di Taylor con resto di Lagrange.

21.12.2011 Integrali - Introduzione. Calcolo di $\sum_{k=1}^{n} k^2$ e di $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Calcolo dell'area del sottografico di una arco di parabola tramite un'approssimazione con aree di rettangoli inscritti.
Definizione di suddivisione, somme inferiori e somme superiori di una funzione relativamente ad una suddivisione, integrale superiore ed integrale inferiore. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Condizioni equivalenti ad essere integrabile secondo Riemann. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Le funzioni limitate e continue, le funzioni limitate e discontinue in un numero finito di punti, e funzioni limitate e monotone sono integrabili secondo Riemann. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, isotonia. Integrali su sottointervalli e integrali orientati.

9.1.2012 Lemma della media integrale $(*)$. Teorema fondamentale del calcolo integrale $(*)$. Formula di integrazione per parti: esempi ed esercizi.

10.1.2012 Ancora esercizi sull'integrazione per parti.
Integrazione per sostituzione. Esercizi.
Integrali razionali.

11.1.2012 Integrali razionali: continuazione. Esempi ed esercizi. Alcune sostituzioni standard: integrali del tipo $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ e $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$.
Esercizi.

12.1.2012 Integrali impropri: definizione. Esempi e calcolo esplicito di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha > 0$. Criterio del confronto, criteri asintotici, confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$. Studio di $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+px+q} dx$.

13.1.2012 Esercizi su integrali impropri. Fra i vari, calcolo dell'integrale $\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx$.

16.1.2012 Un esempio di funzione integrabile in senso improprio, ma il cui valore assoluto non è integrabile in senso improprio.
Criterio integrale per la convergenza delle serie $(*)$. Esempi ed esercizi. Stima dell'andamento asintotico delle somme parziali di alcune serie divergenti. Esercizi.

Lezioni aggiuntive:

17.1.2012 esercizi di vario tipo

18.1.2012 esercizi di vario tipo