Corso di laurea: Ingegneria Meccanica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2019/2020
Docenti: Fabio Paronetto e Sabastiano Nicolussi Golo

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.
La lezioni contrassegnate con una P sono state svolte da Fabio Paronetto, quelle con una N da Sebastiano Nicolussi Golo.

P - 1 .10.2019 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei prerequisiti e dei contenuti del corso.

Qualche elemento di teoria degli insiemi, unione, intersezioni, sottrazione e prodotto cartesiano. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Connettivi logici. Costruzione delle proposizioni $P \vee Q$, $P \wedge Q$, connessione con unione ed intersezione di insiemi, tabelle di verità.

P - 2.10.2019 Proposizioni $\neg P$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$. Le proposizioni $\neg Q \Rightarrow \neg P$ e $\neg P \vee Q$ sono equivalenti a $P \Rightarrow Q$. Quantificatori: $\forall$, $\exists$, !. Negazione di alcune proposizioni. Esercizi ed esempi.

Fattorizzazione in primi, numeri coprimi fra loro. Esistono numeri che non sono razionali, ad esempio $\sqrt{2}$ $(*)$, e necessità di introdurre i numeri reali.
Assiomi che sono soddisfatti sia da $\mathbf{Q}$ che da $\mathbf{R}$ (proprietà associativa, commutativa, distributiva di addizione e moltiplicazione, esistenza di un elemento neutro sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione, esistenza di opposto ed inverso, assiomi riguardanti la relazione d'ordine $\leqslant$).

P - 3.10.2019 Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare e conseguenze) $(*)$. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorni (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi.
Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato e non vuoto. Assioma di completezza. Caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato $(*)$. Esempi.

P - 4.10.2019 Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$ $(*)$ (analogamente se $a = \max A$ allora $a = \sup A$). Proprietà archimedea dei numeri reali $(*)$. Se $c \geqslant 0$ soddisfa

$c < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ allora $c = 0$ (∗). Parte intera di un numero reale. L'insieme **Q** è denso in **R** (due formulazioni equivalenti) (∗). Un esempio di un sottoinsieme di **Q** che non ammette estremo superiore in **Q**. Definizione di punto di accumulazione.

Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore.

P - 8.10.2019 Estremo superiore ed inferiore nel caso di insiemi illimitati. Esempi ed esercizi su estremo superiore, estremo inferiore e punti di accumulazione.

Principio di induzione: varie formulazioni, esempi. Cosa significa essere induttivo. Disuguaglianza di Bernoulli (∗). Somma dei primi n interi (∗).

P - 9.10.2019 Binomio di Newton (∗). La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica (∗). Altri esempi di dimostrazione per induzione.

Funzioni: definizione di funzione, immagine, grafico, funzioni iniettive, suriettive, biiettive, invertibili. Composizione tra funzioni. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **N** dei numeri naturali e **Z**, insieme dei numeri interi.

P - 10.10.2019 Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **N** dei numeri naturali dei numeri razionali e **N**. Non esiste una corrispondenza biunovoca tra l'insieme dei naturali **N** e l'intervallo $(0, 1)$ (∗) (e quindi nemmeno tra **N** e **R**). Cardinalità di **N** e di **R**.

Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti, monotòne, strettamente monotòne. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotòne. Funzione inversa: se f è strettamente crescente ed invertibile anche f^{-1} lo è. Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale, radici n-esime, potenze ad esponente razionale, funzione esponenziale sui razionali.

P - 11.10.2019 La funzione esponenziale sui razionali e sui reali. Proprietà e biiettività della funzione ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo.

Qualche esercizio su semplici disuguaglianze e grafici di funzioni.

P - 15.10.2019 Cambiamento di base nelle funzioni esponenziali e nei logaritmi. La base "e". Funzioni trigonometriche: $\operatorname{sen}, \cos, \operatorname{tg}$ e loro grafici. Principali formule trigonometriche per la funzioni seno e coseno.

Definizione di arcsen, $\arccos$, arctg e loro grafici. Funzioni iperboliche e loro grafici. Definizioni di $\sup f, \inf f, \max f, \min f$ per una funzione a valori reali e qualche esempio.

P - 16.10.2019 Qualche grafico di funzioni ottenute componendo o invertendo funzioni note e manipolando grafici noti.

Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Esempi. Calcolo e verifica di qualche limite semplice. Unicità del limite. Definizione di sottosuccessione di una successione data.

P - 17.10.2019 Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccesione ammette lo stesso limite $(*)$. Teorema della permanenza del segno $(*)$. Ogni successione convergente è limitata $(*)$. Controesempi. Teorema dei due carabinieri $(*)$. Operazioni con i limiti $(*)$. Esempi e controesempi. Teorema del confronto $(*)$.

P - 18.10.2019 Successioni monotone. Una successione monotone ammette limite $(*)$. Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti $(*)$. Commento: cosa può succedere se $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Alcuni limiti: $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ con p polinomio, $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi; $\lim_{n\to+\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$. Criterio del rapporto per successioni $(*)$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$.

P - 22.10.2019 Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy $(*)$.

Alcuni limiti: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$ $(a \in \mathbf{R})$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ $(*)$, formula di Stirling nella formulazione $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.

Le due successioni $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone $(*)$. Il numero e come limite di $(1+\frac{1}{n})^n$ per $n \to +\infty$; anche $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$ $(*)$.

P - 23.10.2019 Limiti notevoli: data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ valgono: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}-1}{a_n} = \log b$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$. Per ogni successione $\{a_n\}_n$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Inoltre vale $\lim_{n\to+\infty}(1+x/n)^n = e^x$. Le successioni $\operatorname{sen} n$ e $\cos n$ non ammettono limite.

Esercizi sui limiti di successioni.

P - 24.10.2019 Esercizi sui limiti di successioni.

N - 25.10.2019 Serie numeriche - Introduzione. Definizione. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate. Serie geometrica. Criterio di Cauchy per le serie ($*$). Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ ($*$). Il viceversa è falso: esempio è la serie armonica. La serie armonica non converge ($*$).

P - 29.10.2019 Serie telescopiche: esempi.
La serie armonica diverge a $+\infty$: la somma $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ ($*$) e stima $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k}) = \log(n+1)$ ($*$). Stima di $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ anche dall'alto con $c\,\log(n+1)$ ($*$).
Operazioni con le serie. Serie geometrica e somma $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n$ a partire da un generico $k \in \mathbf{N}$. Esempi. Calcolo di qualche numero con parte decimale periodica.

P - 30.10.2019 Minimo limite e massimo limite. Data una successione $\{a_n\}_n$ in generale vale $\liminf_n a_n \leqslant \limsup a_n$ ($*$). Una successione $\{a_n\}_n$ ammette limite se e solo se $\liminf_n a_n = \limsup a_n$ ($*$). Esempi.

Serie a termini positivi - Criteri del confronto ($*$), del confronto asintotico ($*$), del rapporto ($*$), della radice n-esima e suo corollario ($*$).

P - 31.10.2019 Corollario del criterio del rapporto ($*$), corollario del criteriodella radice n-esima. Se esiste il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero.
Vari esempi di serie convergenti e divergenti. Criterio di condensazione di Cauchy ($*$). Commenti. Serie armonica generalizzata. Altri esempi. Criterio di Leibniz ($*$).

N - 5.11.2019 Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente.
Esercizi sulle serie.

N - 6.11.2019 Definizione di intorno di un numero reale e definizione di retta estesa. Definizione degli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$, e di punto di accumulazione (usando gli intervalli, con descrizione alternativa caso per caso), insiemi superiormente e inferiormente illimitati. Definizione di limite di funzione reale (usando gli intervalli, con descrizione alternativa caso per caso). Proprietà elementari dei limiti di funzioni: unicità del limite, limite tramite successioni, locale limitatezza.

N - 7.11.2019 Teorema della permanenza del segno, operazioni con i limiti, criterio del confronto, criterio dei carabinieri. Esempi: limiti di monomi, limiti di successioni come limiti di funzioni. Lista dei limiti notevoli.

N - 8.11.2019 Definizione di limite destro e sinistro, il limite esiste se e solo se limite destro e sinistro esistono e coincidono, limiti destri e sinistri per funzioni monotone.
Limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $(*)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$ $(*)$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$ $(*)$ per ogni $p > 0$; $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $(*)$. Esercizi sui limiti.

N - 12.11.2019 Esercizi sulle serie. Esercizi sui limiti. Definizione di funzione continua e caratterizzazione tramite il limite.

N - 13.11.2019 Definizione di continuità a destra e sinistra; esempi. Le funzioni elementari sono continue. Analisi delle discontinuità: discontinuità eliminabile, discontinuità di prima e di seconda specie; esempi. Estensione di una funzione per continuità. Teorema della permanenza del segno $(*)$. Somme, prodotto e quoziente (quando ha senso) di funzioni continue sono continue; composizione di funzioni continue è continua. Teorema degli zeri $(*)$. Teorema dei valori intermedi $(*)$. Esempi, tra i quali: i polinomi di grado dispari hanno almeno una radice reale.

N - 15.11.2019 Teorema di Weierstrass $(*)$. Teorema di Rolle $(*)$. Una funzione continua e invertibile su un intervallo è monotona e l'inversa è continua; continuità uniforme. Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua $(*)$. Esempi.

Il rapporto incrementale, la derivata, le derivate destra e sinistra, esempi. Una funzione derivabile è continua $(*)$; derivate di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili $(*)$; derivata della composizione (regola della catena) $(*)$, derivata della funzione inversa $(*)$, derivate delle funzioni elementari $(*)$.

P - 19.11.2019 Retta tangente al grafico di una funzione derivabile. Commento su alcuni limiti notevoli: confronto con le derivate e con l'esistenza della retta tangente al grafico. Il numero e: motivazione dell'introduzione di e come base "naturale".

Derivate di alcuni funzioni elementari: esponenziale $x \mapsto e^x$, $(*)$, tangente $(*)$, arcotangente $(*)$, arcoseno $(*)$. Derivate di alcuni funzioni elementari lasciate per esercizio: esponenziale $x \mapsto a^x$, $\log_a$, coseno, arcocoseno. Qualche esercizio.
Teorema di Fermat $(*)$.

P - 20.11.2019 Esempi sul teorema di Fermat. Come trovare il massimo e il minimo di una funzione definita in un intervallo. Altra dimostrazione della disequazione $e^x \geqslant x+1$. La disequazione $\log x \geqslant x-1$.
Teorema di Rolle (bis) $(*)$, teorema di Lagrange $(*)$. Controesempi. Una funzione che ha derivata nulla è costante in ogni intervallo contenuto nel suo dominio $(*)$. Caratterizzazione delle funzioni monotone su intervalli $(*)$. Regola di de l'Hospital. Esempi.

P - 21.11.2019 Corollario della regola di de l'Hospital: se esiste finito $\lim_{x \to x_o} f'(x)$ allora f è derivabile in x_o $(*)$. Altri esempi.
Derivate di ordine superiore al primo, funzioni di classe C^1, C^2, C^k. Un esempio di funzione derivabile, ma non C^1. Punti di estremo locale e legame con la derivata seconda. Cosa succede se $f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{n-1}(x_o) = 0$ e $f^n(x_o) \neq 0$.

P - 22.11.2019 Funzioni concave e convesse. Se una funzione è convessa e derivabile allora $f(x) \geqslant f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ $(*)$.
Caratterizzazioni delle funzioni convesse tramite la derivata prima e derivata seconda. Commenti ed esempi. Se x_o è un punto critico per una funzione convessa allora x_o è di minimo globale (o assoluto) $(*)$. Punto di flesso. Commenti sul punto di flesso se f è derivabile una volta o due volte. Asintoti, verticali, orizzontali, obliqui.

Esercizi su grafici di funzioni: abbozzo di un grafico senza fare alcun calcolo.

P - 26.11.2019 Esercizi su grafici di funzioni.

P - 27.11.2019 Confronto locale tra funzioni. Definizione di "o piccolo" in un punto. Date f e g funzioni, f è $o_c(g)$ se e solo se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $(*)$.
Date f e g funzioni, definizione di "f asintotica a g in un punto c. Definizione di ordine di infinitesimo e di infinito. Non tutte le funzioni hanno un ordine in infinitesimo o di infinito. Esempi.
$o(x^k)$ con k naturale e operazioni con gli o piccoli. Definizione di "O grande". Sviluppi asintotici: parte principale di una funzione.

P - 28.11.2019 Formula di Taylor con resto di Peano $(*)$.
Formula di Taylor con resto di Lagrange.

	Sviluppi di alcune funzioni elementari nello 0. Tra queste, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \log(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R}$. Esempi ed esecizi su ordine di infinitesimo e limiti con la formula di Taylor.
P - 29.11.2019	Esercizi con la formula di Taylor: limiti, sviluppi, derivate. Il numero e come $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Approssimazione di alcuni valori tramite somme di Taylor.
N - 3.12.2019	Calcolo dell'integrale della funzione $x \mapsto x^m$ su un intervallo $[0, b]$ per m naturale. Integrale secondo Riemann: suddivisone di un intervallo, somme inferiori e superiori per una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $I_-(f, T)$ e $I_+(f, T)$). Se $T \subset S$, allora $I_-(f, T) \leqslant I_-(f, S)$ e $I_+(f, T) \geqslant I_+(f, S)$. Per ogni T, S suddivisioni vale $I_-(f, T) \leqslant I_+(f, S)$ $(*)$. Definizione di integrale inferiore ed integrale superiore, funzioni integrabili secondo Riemann. Una caratterizzazione delle funzioni integrabili. Integrale di funzioni a gradini; Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann (la funzione di Dirichlet). Proprietà elementari dell'integrale di Riemann: linearità, positività, isotonia. Le funzioni continue sono integrabili, le funzioni discontinue in al più un numero finito di punti sono integrabili, le funzioni monotone sono integrabili. Integrali su sottointervalli, integrali orientati. Definizione della funzione integrale, lemma della media integrale $(*)$ e un suo corollario $(*)$. Teorema fondamentale del calcolo integrale $(*)$.
N - 4.12.2019	L'integrale indefinito e primitive elementari. Formula di integrazione per parti $(*)$ ed esercizi. Formula del cambio di variabili $(*)$ ed esercizi.
N - 5.12.2019	Metodo per l'integrazione di funzioni razionali ed esempi. Esercizi.
N - 6.12.2019	Alcune sostituzioni standard: integrali del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$, $\int R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen} x \cos x) dx$, $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{1+x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$, e $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$. Esempi ed esercizi.
P - 10.12.2019	Esercizi sulle serie utilizzando gli sviluppi di Taylor. Integrali impropri: definizione. Esempi e calcolo esplicito di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha > 0$.
P - 11.12.2019	Calcolo esplicito di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha > 0$ in due modi. Criterio del confronto $(*)$, criteri asintotici $(*)$. Esempi di confronto

con $\frac{1}{x^\alpha}$ e con $\frac{1}{x-a}$. Studio di $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+px+q} dx$. Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

P - 12.12.2019 Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx$ per $t > -1$. La quantità $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx$ coincide con $n!$ per $t \in \mathbf{N}$. Convergenza assoluta. Se una funzione f è assolutamente integrabile in senso improprio in un intervallo I allora è integrabile in senso improprio nello stesso intervallo I $(*)$.
La funzione $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è integrabile in senso improprio, ma il suo valore assoluto non è integrabile in senso improprio $(*)$.
Più in generale: se f è positiva, limitata, decrescente e infinitesima gli integrali $\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x) \cos x\, dx$ convergono.
Criterio integrale per la convergenza delle serie $(*)$. Esempi. Stima dell'andamento asintotico delle somme parziali di alcune serie divergenti.

P - 13.12.2019 Esercizi sugli integrali impropri.

N - 17.12.2019 Introduzione alle equazioni differenziali del prim'ordine e problemi di Cauchy. Metodo della separazione di variabili. Risoluzione di equazioni e problemi di Cauchy lineari di ordine uno. Esempi.

N - 18.12.2019 Equazioni del secondo ordine, lineari a coefficienti costanti; caso omogeneo e caso non omogeneo (con il metodo della "somiglianza"). Esempi.

N - 19.12.2019 Esercizi sulle equazioni differenziali.

N - 20.12.2019 Studio di funzioni integrali. L'oscillatore armonico.

P - 9.1.2020 Esercizi di approfondimento e ripasso.

P - 10.1.2020 Esercizi di approfondimento e ripasso.