Corso di laurea: Ingegneria Meccanica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2023/2024
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

2.10.2023 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei prerequisiti e dei contenuti del corso.

Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Qualche elemento di teoria degli insiemi: come definire o descrivere un insieme. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, sottrazione, complementare di un insieme. Insieme vuoto. Insieme delle parti di un insieme e sua cardinalità nel caso finito. Prodotto cartesiano tra due insiemi.

3.10.2023 Connettivi logici $\vee, \wedge, \neg$. Proposizione e predicato. Costruzione delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$ e loro connessione con l'insieme unione e intersezione, la proposizione $\neg P$ e la sua connessione con l'insieme complementare. Tabelle di verità delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$. Proposizioni $\neg P$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$. Le proposizioni $\neg Q \Rightarrow \neg P$ e $\neg P \vee Q$ sono equivalenti a $P \Rightarrow Q$. Quantificatori: $\forall$, $\exists$, $!$. Negazione di alcune proposizioni. Qualche esempio.

Numeri reali - Fattorizzazione in primi, numeri coprimi fra loro. Esistono numeri che non sono razionali, ad esempio $\sqrt{2}$ $(*)$, da cui la necessità di introdurre i numeri reali.

4.10.2023 Assiomi che sono soddisfatti sia da $\mathbf{Q}$ che da $\mathbf{R}$ (proprietà associativa, commutativa, distributiva di addizione e moltiplicazione, esistenza di un elemento neutro sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione, esistenza di opposto ed inverso, assiomi riguardanti la relazione d'ordine).
Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare e conseguenze) $(*)$. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorni (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi.
Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato e non vuoto. Assioma di completezza. Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$ $(*)$ (analogamente se $a = \max A$ allora $a = \sup A$) $(*)$.

5.10.2023 Una caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato ($*$). Proprietà archimedea dei numeri reali ($*$). L'insieme $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$. Definizione di punto di accumulazione.

Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore e punti di accumulazione.

9.10.2023 Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore e punti di accumulazione.

Induzione: cosa significa essere induttivo; cosa significa che un predicato su $n \in \mathbf{N}$ è vero *definitivamente*. Esempi. Somma dei primi n interi ($*$) (tre dimostrazioni, compresa l'induzione).

10.10.2023 Somma dei primi n interi dispari (EX), somma dei primi n interi pari (EX). Esercizi sull'induzione. Somma dei quadrati dei primi n interi ($*$), somma dei cubi dei primi n interi (EX). Disuguaglianza di Bernoulli ($*$). Binomio di Newton ($*$) (triangolo di Tartaglia). Disuguaglianza di Bernoulli e altre disuguaglianze simili come conseguenza dello sviluppo del binomio di Newton ($*$).
Il prodotto di n numeri positivi la cui somma è n è minore o uguale ad 1 ed è uguale ad 1 se e solo se i numeri sono tutti uguali tra loro ($*$).
La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica ($*$).

11.10.2023 Funzioni: definizione di funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Immagine di una funzione. Grafico di una funzione. Composizione tra funzioni. Funzioni invertibili e funzione identità. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive. Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biiezioni tra insiemi di cardinalità infinita. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali e $\mathbf{Z}$, insieme dei numeri interi ($*$).
Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ ($*$).
Non esiste una corrispondenza biunovoca tra l'insieme tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{R}$.

Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Funzioni monotòne, strettamente monotòne.

12.10.2023 Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotòne. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se f è strettamente monotona è invertibile; anche f^{-1} è strettamente monotona e invertibile.
Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale positivo, intero, razionale. Radici n-esime, potenze ad esponente razionale. Funzione espo-

nenziale sui razionali e sui reali. Funzioni $x \mapsto x^{m/n}$.
Proprietà e biiettività della funzione ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche. La base "e".
Funzioni trigonometriche: $\operatorname{sen}, \cos$ e loro grafici. Principali formule trigonometriche per la funzioni seno e coseno.

16.10.2023 Funzioni trigonometriche: tg e suo grafico. Definizione di arcsen, $\arccos$, arctg e loro grafici.
Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni, tra cui $x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se f è strettamente monotona è invertibile; anche f^{-1} è strettamente monotona e invertibile; osservazioni sulla composizione (somma e prodotto) di funzioni monotone ed esercizi su composizione di funzioni strettamente monotone. Traslazioni di funzioni: significato di $x \mapsto f(x-c)$, $x \mapsto f(x) + c$, $x \mapsto c\,f(x)$ con $c \in \mathbf{R}$. Qualche esempio.

17.10.2023 Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Unicità del limite.
Esempi. Calcolo e verifica di qualche limite semplice.
Definizione di sottosuccessione. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccesione ammette lo stesso limite ($*$). Teorema della permanenza del segno ($*$). Successioni limitate. Ogni successione convergente è limitata ($*$). Operazioni con i limiti: limite della somma e del prodotto di due successioni ($*$). Esempi di applicazioni e controesempi a forme indeterminate.

18.10.2023 Come mostrare che una successione non ammette limite. Esempio: $(-1)^n$.
Teorema dei due carabinieri ($*$). Teorema del confronto ($*$). Successioni monotone. Una successione monotone ammette limite ($*$). Se una sottosuccessione di una successione monotona $\{a_n\}_n$ ammette limite ℓ anche la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite ed è ℓ ($*$).
Alcuni limiti (tutti dimostrati) ($*$):
$\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ con p polinomio, $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi; $\lim_{n\to+\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$. Criterio del rapporto per successioni ($*$); $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$.

19.10.2023 Alcuni limiti (tutti dimostrati, tranne la formula di Stirling) ($*$): $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$ ($a \in \mathbf{R}$), $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, formula di Stirling nella formulazione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.
Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti ($*$).
Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy ($*$). Condizioni equivalenti ad essere di Cauchy.

23.10.2023 Le successioni $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ sono strettamente monotone per $x > 0$ e definitivamente strettamente monotone per $x < 0$ ($*$). In particolare le due successioni $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone ($*$). Vale $a_n \leqslant b_k$ per ogni $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 2$ ($*$); in particolare la successione $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata, la successione $\{b_n\}_n$ è inferiormente limitata. Il numero e come limite di $(1 + \frac{1}{n})^n$ per $n \to +\infty$. Anche $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$ ($*$). Data $\{a_n\}_n$ con $\lim_n a_n = +\infty$ si ha $\lim_n(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$. La successione $(1 + \frac{x}{n})^n$ converge ad e^x, $x \in \mathbf{R}$.
Limiti notevoli: data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ valgono: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ ($*$), $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ ($*$), $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ ($*$), $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}-1}{a_n} = \log b$ ($*$), $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$ (vedremo più avanti la dimostrazione), $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$ ($*$).
Osservazione: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Primi esercizi sui limiti.

24.10.2023 Esercizi sui limiti di successioni.

25.10.2023 Successioni per ricorrenza.

26.10.2023 Serie numeriche - Introduzione. Definizione, successione delle somme parziali. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate. Criterio di Cauchy per le serie ($*$). La serie armonica diverge a $+\infty$: la somma $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ ($*$). Serie geometrica: carattere nel caso generale e somma $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n$ per $q \in (-1, 1)$. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ ($*$). Il viceversa è falso: esempio è la serie armonica. Serie telescopiche: esempi.
Stima: $\frac{1}{\log 2} \log(n + 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \log(n + 1)$.

30.10.2023 Operazioni con le serie. Serie a termini positivi - Criteri del confronto ($*$), del confronto asintotico ($*$). Esempi. Criterio del rapporto ($*$) e suo corollario ($*$), della radice n-esima e suo corollario ($*$). Esempi.

Se esiste il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero.

31.10.2023 Criterio di condensazione di Cauchy (∗). Esempi. La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $0 < \alpha < 1$ (confronto con la serie armonica), La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geqslant 2$ (confronto con la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).
Commenti sul criterio di condensazione di Cauchy; in particolare un esempio di $\{a_n\}_n$ non decrescente per cui $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ non hanno lo stesso carattere.
Esempi di applicazione del criterio di condensazione di Cauchy. Serie armonica generalizzata.
Criterio di Leibniz (∗). Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente. (∗).
Primi esercizi sulle serie.

6.11.2023 Esercizi sulle serie.

7.11.2023 Limite per funzioni: definizione di intorno di $x \in \overline{\mathbf{R}}$, di punto di accumulazione $x \in \overline{\mathbf{R}}$ per $D \subset \mathbf{R}$, definizione di limite per funzioni da D in $\mathbf{R}$ per $x \to x_o$, x_o di accumulazione per D. Esempi.
Verifica esplicita di un semplice limite. Proprietà elementari dei limiti di funzioni: unicità del limite, locale limitatezza per funzioni che ammettono limiti finito, Caratterizzazione del limite tramite successioni (∗). Esempio di un limite che non esiste: $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ ($x \in \mathbf{R}$) (∗). Teorema della permanenza del segno, criterio del confronto, teorema dei due carabinieri. Operazioni con i limiti.

8.11.2023 Caratterizzazione del limite per funzioni monotone. Limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$ (∗), $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$ per ogni $p > 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$,
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = 1/(\log a)$.
Esercizi sui limiti.

9.11.2022 Funzioni continue: definizione, confronto con la definizione di limite, continuità da destra e da sinistra. Esempi di funzioni continue e non.
Discontinuità: eliminabile, di prima specie, di seconda specie. Esempi.
Estensione di una funzione per continuità, anche solo da destra o solo da sinistra. Esempi. Le funzioni elementari sono continue, somma e prodotto di funzioni continue sono continui, il reciproco di una funzione continua e il quoziente di funzioni continue (quando hanno senso) sono continue. La composizione di funzioni continue è continua.
Teorema della permanenza del segno (∗).

13.11.2023 Teorema degli zeri ($*$). Esempi e controesempi. Esempi e applicazioni del teorema degli zeri, anche con una funzione definita in un intervallo non chiuso o non limitato. In particolare: i polinomi di grado dispari hanno sempre almeno una radice reale.
Teorema dei valori intermedi ($*$). Esempi ed esercizi. Teorema di Weierstrass ($*$). Esempi e controesempi.

14.11.2023 Applicazioni del teorema di Weierstrass a funzioni definite in un intervallo aperto. Teorema di Rolle per funzioni continue ($*$).
Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha l'inversa continua.
Una funzione monotona definita in un intervallo I è continua se e solo se $f(I)$ è un intervallo.
Una funzione f continua, invertibile e definita in un intervallo è monotona.
Controesempi.
Qualche esercizio: grafici di semplici funzioni, dato un grafico di f disegnare il grafico di $g \circ f$, applicazione del teorema di Weierstrass e/o Rolle per l'esistenza del minimo (o del massimo) per una funzione f definita in (a, b) con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty(-\infty)$.
Verifica della continuità di alcune funzioni.

15.11.2023 Ancora qualche esercizio: esistenza di soluzioni ad equazioni (applicazione del teorema degli zeri).

Derivata: il rapporto incrementale, definizione e significato geometrico. Retta tangente ad un grafico. Derivate destra e sinistra. Esempi di funzioni non derivabili in un punto. Una funzione derivabile è continua ($*$). Derivate di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili ($*$); derivata della composizione (regola della catena) ($*$); derivata della funzione inversa ($*$).
Calcolo esplicito della derivata di alcune funzioni.

17.11.2022 Calcolo esplicito della derivata di alcune funzioni (una funzione costante, il polinomio $p(x) = x^n$, la potenza x^α, seno, coseno, tangente, potenze ad esponente reale, arcoseno, arcocoseno, arcotangente) ($*$). Commenti sui legami tra le derivate viste finora e i limiti notevoli.

Teoremi classici del calcolo differenziale: teorema di Fermat ($*$). Esempi sul teorema di Fermat. Come trovare il massimo e il minimo di una funzione definita in un intervallo. Qualche esercizio.
Teorema di Rolle per funzioni derivabili ($*$). Controesempi e significato geometrico. Teorema di Lagrange ($*$). Una funzione che ha derivata nulla è costante in ogni intervallo contenuto nel suo dominio ($*$).

20.11.2023 Caratterizzazione delle funzioni monotone su intervalli $(*)$. Esempi. Massimi e minimi locali nel caso in cui una funzione f è derivabile guardando il segno di f'.
Regola di de l'Hôpital. Esempi: quando funziona ed esempi nei quali non funziona. Corollario di de l'Hôpital sull'estensione della derivata. Un controesempio al corollario di de l'Hôpital. Un esempio di una funzione derivabile la cui derivata non è continua in un punto.

21.11.2023 Esercizi su applicazioni della derivata prima (risoluzione di equazioni e disequazioni). In particolare $e^x \geqslant x+1$ e $\log x \leqslant x-1$ $(*)$.

Derivate di ordine successivo al primo. Funzioni di classe $C^k(I)$ con $k \in \mathbf{N}$. Un esempio di una funzione derivabile la cui derivata non è continua in un punto.
Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui. Esempi.
Funzioni concave e convesse: definizione e sua spiegazione.

22.11.2023 Esempio: la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa. $(*)$.
Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili ($f(x) \geqslant f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ e f' crescente), strettamente convesse, concave, strettamente concave (senza dimostrazione). Caratterizzazioni delle funzioni convesse e derivabili due volte tramite la derivata derivata seconda. Commenti ed esempi.
Se x_o è un punto critico per una funzione convessa allora x_o è di minimo o assoluto; se la funzione è strettamente convessa tale punto di minimo è unico $(*)$.

Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

23.11.2023 Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

27.11.2023 Confronto locale tra funzioni: definizione di "o piccolo" in un punto. Date f e g funzioni, $g(x) \neq 0$ per $x \neq c$, f è $o_c(g)$ se e solo se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $(*)$. Date f e g funzioni, definizione di "f asintotica a g in un punto c. Definizione di ordine di infinitesimo e di infinito. Esempi. Non tutte le funzioni hanno un ordine in infinitesimo o di infinito. Esempi.
Operazioni con gli o piccoli di x^n in zero. Sviluppi asintotici e parte principale di una funzione.

28.11.2023 Formula di Taylor con resto di Peano $(*)$. Formula di Taylor con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari nello 0. Tra queste, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \log(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R}$.
Relazione tra i punti stazionari e la derivata seconda $(*)$.
Esempi e commenti.

29.11.2023 Esercizi con la formula di Taylor: come trovare l'ordine di infinitesimo di una funzione. Esercizi con la formula di Taylor: limiti.

30.11.2023 Serie: alcuni esempi di applicazioni del criterio di Leibniz e di condensazione di Cauchy studiando la monotonia della successione tramite la derivata di un'opportuna funzione.
Esercizi con la formula di Taylor: serie.

4.12.2023 Integrali: introduzione. Calcolo tramite approssimazione con rettangoli dell'area del sottografico della funzione $x \mapsto x^2$ su un intervallo $[0, a]$. Cenno al caso più generale dell'integrale della funzione $x \mapsto x^m$ su un intervallo $[0, a]$ per $m \in \mathbf{N}$.
Integrale secondo Riemann: suddivisone di un intervallo, somme inferiori e superiori per una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $I_-(f, T)$ e $I_+(f, T)$).
Per ogni T, S suddivisioni vale $I_-(f, T) \leqslant I_+(f, S)$.
Se $T \subset S$, allora $I_-(f, T) \leqslant I_-(f, S)$ e $I_+(f, T) \geqslant I_+(f, S)$.
Definizioni di integrale inferiore, di integrale superiore, di funzioni integrabili secondo Riemann.
Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann (la funzione di Dirichlet ristretta ad un intervallo). Proprietà elementari dell'integrale di Riemann: linearità, positività, isotonia.
Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni discontinue in al più un numero finito di punti sono integrabili. Integrali orientati.
Lemma della media integrale ($*$)

5.12.2023 Non c'è stata lezione.

6.12.2023 Definizione della funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale ($*$).
Commenti su come calcolare $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. La primitive di una funzione data differiscono per una costante. L'integrale indefinito e alcune primitive elementari.
Formula di integrazione per parti ($*$) ed esercizi.

7.12.2023 Formula del cambio di variabili ($*$) ed esercizi.
Metodo per l'integrazione di funzioni razionali del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con P, Q polinomi: casi Q di grado 1 o 2 e P grado minore di quello di Q. Esempi ed esercizi.
Teorema di fattorizzazione di un polinomio in $\mathbf{R}$ (versione reale del teorema fondamentale dell'algebra).

11.12.2023 Esercizi su integrali razionali: continuazione.
Esercizi su integrali per sostituzione: alcune sostituzione speciali.

12.12.2023 Alcune sostituzione speciali: continuazione.
Integrali impropri: introduzione e definizione. Esempi e calcolo esplicito di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha \in \mathbf{R}$ e parallelismo con la serie armonica generalizzata.
Calcolo esplicito di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha > 0$ in due modi.
Nomenclatura: integrali convergenti, divergenti, indefiniti.

13.12.2023 Criterio del confronto $(*)$. Criteri del confronto asintotici $(*)$. Esempi di confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$, sia in 0 che a $+\infty$, e con $\frac{1}{x-a}$ in $(a, a+1]$. Parallelismo con le serie nel caso di funzioni non negative.
Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx$ per $t > -1$. La quantità $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx$ coincide con $n!$ per $t \in \mathbf{N}$ (Gamma di Eulero).
Convergenza assoluta. Se una funzione f è assolutamente integrabile in senso improprio in un intervallo I allora è integrabile in senso improprio nello stesso intervallo I $(*)$. Qualche esempio.

14.12.2023 Integrali oscillanti: se f è positiva, decrescente, infinitesima all'infinito allora gli integrali $\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x) \cos x\, dx$ convergono.
Criterio integrale per la convergenza delle serie $(*)$. Esempi.
Esercizi sugli integrali impropri.

18.12.2023

18.12.2023 Esercizi sugli integrali impropri.

19.12.2023 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, equazioni differenziali ordinarie di grado n, equazioni in forme normali, equazioni autonome.
Le soluzioni di $y' = y$ sono tutte, e sole, le funzioni del tipo $y(x) = c\, e^x$, $c \in \mathbf{R}$ $(*)$. Le soluzioni di $y' + ay = 0$, a funzione continua, sono tutte, e sole, le funzioni del tipo $y(x) = c\, e^{-At)}$, dove A è una primitiva di a e $c \in \mathbf{R}$ $(*)$. Forma generale di una soluzione dell'equazione $y' + ay = f$, a e f funzioni continue $(*)$.
Esempi ed esercizi.

20.12.2023 Equazioni differenziali a variabili separabili.

21.12.2023 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con particolare attenzione a quelle di secondo grado: il caso omogeneo.