Corso di laurea: Ingegneria Meccanica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2024/2025
Docenti: Fabio Paronetto e Rossano Sannipoli

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

30.9.2024 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei prerequisiti e dei contenuti del corso.

Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Qualche elemento di teoria degli insiemi: come definire o descrivere un insieme. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, sottrazione, complementare di un insieme. Insieme vuoto. Insieme delle parti di un insieme e sua cardinalità nel caso finito. Prodotto cartesiano tra due insiemi.

Connettivi logici $\vee, \wedge, \neg$. Proposizione e predicato. Costruzione delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$ e loro connessione con l'insieme unione e intersezione, la proposizione $\neg P$ e la sua connessione con l'insieme complementare.

1°.10.2024 Tabelle di verità delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$. Proposizioni $\neg P$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$. Le proposizioni $\neg Q \Rightarrow \neg P$ e $\neg P \vee Q$ sono equivalenti a $P \Rightarrow Q$. Quantificatori: $\forall$, $\exists$, $!$. Negazione di alcune proposizioni. Qualche esempio.

Numeri reali - Fattorizzazione in primi, numeri coprimi fra loro. Esistono numeri che non sono razionali, ad esempio $\sqrt{2}$ $(*)$, da cui la necessità di introdurre i numeri reali.

Assiomi che sono soddisfatti sia da $\mathbf{Q}$ che da $\mathbf{R}$ (proprietà associativa, commutativa, distributiva di addizione e moltiplicazione, esistenza di un elemento neutro sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione, esistenza di opposto ed inverso, assiomi riguardanti la relazione d'ordine).

2.10.2024 Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare e conseguenze) $(*)$. Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorni (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi.
Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato e non vuoto. Assioma di completezza. Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$ $(*)$ (analogamente se $a = \max A$ allora

$a = \sup A$) ($*$). Una caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato ($*$). Proprietà archimedea dei numeri reali ($*$). L'insieme $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$.

3.10.2024 Definizione di punto di accumulazione.

Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore e punti di accumulazione.

7.10.2024 Induzione: cosa significa essere induttivo; cosa significa che un predicato su $n \in \mathbf{N}$ è vero *definitivamente*. Esempi. Somma dei primi n interi ($*$) (tre dimostrazioni).
Somma dei primi n interi dispari (EX), somma dei primi n interi pari (EX). Esercizi sull'induzione. Somma dei quadrati dei primi n interi ($*$), somma dei cubi dei primi n interi (EX). Disuguaglianza di Bernoulli ($*$). Binomio di Newton ($*$) (triangolo di Tartaglia).

8.10.2024 Il prodotto di n numeri positivi la cui somma è n è minore o uguale ad 1 ed è uguale ad 1 se e solo se i numeri sono tutti uguali tra loro ($*$).
La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica ($*$).

Funzioni: definizione di funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Immagine di una funzione. Grafico di una funzione. Composizione tra funzioni. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive.

9.10.2024 Funzioni invertibili e funzione identità. Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biiezioni tra insiemi di cardinalità infinita.
Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali e $\mathbf{Z}$, insieme dei numeri interi ($*$).
Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ ($*$).
Non esiste una corrispondenza biunovoca tra l'insieme tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{R}$.

Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Funzioni monotòne, strettamente monotòne. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotòne. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se f è strettamente monotona è invertibile; anche f^{-1} è strettamente monotona e invertibile.
Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale positivo, intero, razionale. Radici n-esime, potenze ad esponente razionale. Funzione esponenziale sui razionali e sui reali. Funzioni $x \mapsto x^{m/n}$.

Proprietà e biiettività della funzione ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

10.10.2024 Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se f è strettamente monotona in un intervallo I è invertibile tra I e la sua immagine; se f è strettamente monotona anche f^{-1} è strettamente monotona e invertibile.
Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche. La base "e".
Funzioni trigonometriche: $\operatorname{sen}, \cos, \operatorname{tg}$ e loro grafici. Principali formule trigonometriche per la funzioni seno e coseno.
Funzioni $\operatorname{arcsen}, \arccos, \operatorname{arctg}$ e loro grafici.
Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni, tra cui $x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

14.10.2024 Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili; osservazioni sulla composizione (somma e prodotto) di funzioni monotone ed esercizi su composizione di funzioni strettamente monotone. Traslazioni di funzioni: significato di $x \mapsto f(x-c)$, $x \mapsto f(x)+c$, $x \mapsto c\,f(x)$ con $c \in \mathbf{R}$. Qualche esempio. Esempi di calcolo esplicito dell'inversa di una funzione strettamente monotona.

Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Unicità del limite.
Esempi. Calcolo e verifica di qualche limite semplice.

15.10.2024 Qualche altra verifica di qualche limite semplice.
Definizione di sottosuccessione. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccesione ammette lo stesso limite ($*$). Teorema della permanenza del segno ($*$). Successioni limitate. Ogni successione convergente è limitata ($*$). Operazioni con i limiti: limite della somma e del prodotto di due successioni ($*$). Esempi di applicazioni e controesempi a forme indeterminate. Come mostrare che una successione non ammette limite. Esempio: $(-1)^n$.
Teorema dei due carabinieri ($*$). Teorema del confronto ($*$).

16.10.2024 Successioni monotone. Una successione monotona ammette limite ($*$). Alcuni limiti (tutti dimostrati, tranne la formula di Stirling) ($*$):

$\lim_{n\to+\infty}\log n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ con p polinomio, $\lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi; $\lim_{n\to+\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$. Criterio del rapporto per successioni $(*)$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$ $(a \in \mathbf{R})$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n} = 0$, formula di Stirling nella formulazione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.

17.10.2024 Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti $(*)$. Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy $(*)$. Condizioni equivalenti ad essere di Cauchy.

Le successioni $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ sono strettamente monotone per $x > 0$ e definitivamente strettamente monotone per $x < 0$ $(*)$. In particolare le due successioni $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone $(*)$. Vale $a_n \leqslant b_k$ per ogni $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 2$ $(*)$; in particolare la successione $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata, la successione $\{b_n\}_n$ è inferiormente limitata. Il numero e come limite di $(1+\frac{1}{n})^n$ per $n \to +\infty$. Anche $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$ $(*)$. Data $\{a_n\}_n$ con $\lim_n a_n = +\infty$ si ha $\lim_n(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$. La successione $(1+\frac{x}{n})^n$ converge ad e^x, $x \in \mathbf{R}$.

21.10.2024 Limiti notevoli: data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ valgono: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{b^{a_n}-1}{a_n} = \log b$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$ $(*)$.
Osservazione: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Primi esercizi sui limiti.

22.10.2024 Esercizi sui limiti di successioni.
Successioni per ricorrenza.

23.10.2024 Serie numeriche - Introduzione. Definizione, successione delle somme parziali. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate. Criterio di Cauchy per le serie $(*)$. La serie armonica diverge a $+\infty$: la somma $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ $(*)$. Serie geometrica: carattere nel caso generale e somma $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n$ per $q \in (-1,1)$. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ $(*)$. Il viceversa è falso: esempio è la serie armonica. Serie telescopiche: esempi.
Stima: $\frac{1}{\log 2}\log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \log(n+1)$. Operazioni con le serie.

24.10.2024 Alcuni altri esempi di serie telescopiche.
Serie a termini positivi - Criteri del confronto $(*)$, del confronto asintotico

(∗). Esempi. Criterio del rapporto (∗) e suo corollario (∗), della radice n-esima e suo corollario (∗). Esempi.
Se esiste il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero. Esempio.

28.10.2024 Criterio di condensazione di Cauchy (∗). Esempi. La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $0 < \alpha < 1$ (confronto con la serie armonica), La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geqslant 2$ (confronto con la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).
Commenti sul criterio di condensazione di Cauchy; in particolare un esempio di $\{a_n\}_n$ non decrescente per cui $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ non hanno lo stesso carattere.
Esempi di applicazione del criterio di condensazione di Cauchy. Serie armonica generalizzata.
Criterio di Leibniz (∗). Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente. (∗).

Primi esercizi sulle serie.

29.10.2024 Esercizi sulle serie.

30.10.2024 Qualche altro esercizio sulle serie.

Limite per funzioni: definizione di intorno di $x \in \overline{\mathbf{R}}$, di punto di accumulazione $x \in \overline{\mathbf{R}}$ per $D \subset \mathbf{R}$, definizione di limite per funzioni da D in $\mathbf{R}$ per $x \to x_o$, x_o di accumulazione per D.
Verifica esplicita di un semplice limite. Esempi.
Proprietà elementari dei limiti di funzioni: unicità del limite.
Caratterizzazione del limite tramite successioni (∗). Esempio di un limite che non esiste: $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ $(x \in \mathbf{R})$ (∗).

31.10.2024 Proprietà elementari dei limiti di funzioni: locale limitatezza per funzioni che ammettono limiti finito, Teorema della permanenza del segno, criterio del confronto, teorema dei due carabinieri. Operazioni con i limiti.
Caratterizzazione del limite per funzioni monotone. Limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$ per ogni $p > 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$,
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = 1/(\log a)$.
Esercizi sui limiti.

4.11.2022 Esercizi sui limiti.

Funzioni continue: definizione, confronto con la definizione di limite, continuità da destra e da sinistra. Esempi di funzioni continue e non. Discontinuità: eliminabile, di prima specie, di seconda specie. Esempi.

Estensione di una funzione per continuità, anche solo da destra o solo da sinistra. Esempi.

5.11.2022 Le funzioni elementari sono continue, somma e prodotto di funzioni continue sono continui, il reciproco di una funzione continua e il quoziente di funzioni continue (quando hanno senso) sono continue. La composizione di funzioni continue è continua.
Teorema della permanenza del segno ($*$). Teorema degli zeri ($*$). Esempi e controesempi. Esempi e applicazioni del teorema degli zeri, anche con una funzione definita in un intervallo non chiuso o non limitato. In particolare: i polinomi di grado dispari hanno sempre almeno una radice reale.
Teorema dei valori intermedi ($*$). Esempi ed esercizi.

6.11.2024 Teorema di Weierstrass ($*$). Esempi e controesempi. Applicazioni del teorema di Weierstrass a funzioni definite in un intervallo aperto. Teorema di Rolle per funzioni continue ($*$).
Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha l'inversa continua.
Una funzione monotona definita in un intervallo I è continua se e solo se $f(I)$ è un intervallo.
Una funzione f continua, invertibile e definita in un intervallo è monotona.
Controesempi.
Qualche esercizio: grafici di semplici funzioni, dato un grafico di f disegnare il grafico di $g \circ f$, applicazione del teorema di Weierstrass e/o Rolle per l'esistenza del minimo (o del massimo) per una funzione f definita in (a, b) con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty(-\infty)$.

7.11.2024 Esercizi: verifica della continuità di una funzione dipendente da un parametro.

Derivata: il rapporto incrementale, definizione e significato geometrico. Retta tangente ad un grafico. Derivate destra e sinistra. Esempi di funzioni non derivabili in un punto. Una funzione derivabile è continua ($*$).
Derivate di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili ($*$); derivata della composizione (regola della catena) ($*$); derivata della funzione inversa ($*$).
Calcolo esplicito della derivata di alcune funzioni (una funzione costante, il polinomio $p(x) = x^n$, esponenziale e logaritmo) ($*$).
Commenti sui legami tra le derivate e i limiti notevoli (nel caso di esponenziale e logaritmo).

11.11.2024 Il numero e: osservazione sul numero e come base "naturale". Calcolo esplicito della derivata di alcune funzioni (la potenza x^α, seno, coseno, tangente, potenze ad esponente reale, arcoseno, arcocoseno, arcotangente) $(*)$. Commenti sui legami tra le derivate viste finora e i limiti notevoli.

Teoremi classici del calcolo differenziale: teorema di Fermat $(*)$. Esempi sul teorema di Fermat. Come trovare il massimo e il minimo di una funzione definita in un intervallo. Qualche esercizio.
Teorema di Rolle per funzioni derivabili $(*)$. Controesempi e significato geometrico. Teorema di Lagrange $(*)$ e commenti.

12.11.2024 Una funzione che ha derivata nulla è costante in ogni intervallo contenuto nel suo dominio $(*)$.
$\operatorname{arctg} 1/x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$ per $x > 0$.
Caratterizzazione delle funzioni monotone su intervalli $(*)$. Esempi. Regola di de l'Hôpital. Esempi: quando funziona ed esempi nei quali non funziona. Corollario di de l'Hôpital sull'estensione della derivata. Un controesempio al corollario di de l'Hôpital: un esempio di una funzione derivabile la cui derivata non è continua in un punto.
Derivate di ordine successivo al primo. Funzioni di classe $C^k(I)$ con $k \in \mathbf{N}$.
Asintoti: orizzontali, obliqui. Esempi.

13.11.2024 Asintoti: obliqui, orizzontali, verticali.

Funzioni concave e convesse: definizione e sua spiegazione.
Esempio: la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa $(*)$.
Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili ($f(x) \geqslant f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ e f' crescente), strettamente convesse, concave, strettamente concave (senza dimostrazione). Caratterizzazioni delle funzioni convesse e derivabili due volte tramite la derivata derivata seconda $(*)$. Commenti ed esempi.
Se x_o è un punto critico per una funzione convessa allora x_o è di minimo o assoluto; se la funzione è strettamente convessa tale punto di minimo è unico $(*)$. Punto di flesso.

Esercizi sull'uso delle derivate. Applicazioni della derivata prima (per la risoluzione di equazioni e disequazioni). In particolare $e^x \geqslant x + 1$ e $\log x \leqslant x - 1$ $(*)$.

14.11.2024 Ancora esercizi sull'uso delle derivate.
Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

18.11.2024 Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

19.11.2024 Ancora esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

Confronto locale tra funzioni: definizione di "o piccolo" in un punto.

Date f e g funzioni, $g(x) \neq 0$ per $x \neq c$, f è $o_c(g)$ se e solo se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $(*)$. Date f e g funzioni, definizione di "f asintotica a g in un punto c. Definizione di ordine di infinitesimo Esempi. Non tutte le funzioni hanno un ordine in infinitesimo o di infinito. Esempi.

20.11.2024 Definizione di ordine di infinito Esempi. Non tutte le funzioni hanno un ordine di infinito. Esempi.
Operazioni con gli o piccoli di x^n in zero. Sviluppi asintotici e parte principale di una funzione.
Formula di Taylor con resto di Peano $(*)$.

21.11.2024 Formula di Taylor con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari nello 0. Tra queste, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \log(1 + x)$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R}$.
Relazione tra i punti stazionari e la derivata seconda $(*)$.
Esempi e commenti.

Esercizi con la formula di Taylor.

25.11.2024 Esercizi con la formula di Taylor: come trovare l'ordine di infinitesimo di una funzione. Esercizi con la formula di Taylor: limiti e altre applicazioni.

26.11.2024 Serie: alcuni esempi di applicazioni del criterio di Leibniz e di condensazione di Cauchy studiando la monotonia della successione tramite la derivata di un'opportuna funzione.
Esercizi con la formula di Taylor: serie.

27.11.2024 Integrali: introduzione. Calcolo tramite approssimazione con rettangoli dell'area del sottografico della funzione $x \mapsto x^2$ su un intervallo $[0, a]$. Cenno al caso più generale dell'integrale della funzione $x \mapsto x^m$ su un intervallo $[0, a]$ per $m \in \mathbf{N}$.
Integrale secondo Riemann: suddivisone di un intervallo, somme inferiori e superiori per una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ relativamente ad una suddivisione T (denotate rispettivamente con $I_-(f, T)$ e $I_+(f, T)$).
Per ogni T, S suddivisioni vale $I_-(f, T) \leqslant I_+(f, S)$.
Se $T \subset S$, allora $I_-(f, T) \leqslant I_-(f, S)$ e $I_+(f, T) \geqslant I_+(f, S)$.
Definizioni di integrale inferiore, di integrale superiore, di funzioni integrabili secondo Riemann.
Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann (la funzione di Dirichlet ristretta ad un intervallo). Proprietà elementari dell'integrale di Riemann: linearità, positività, isotonia.
Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni discontinue in al più

un numero finito di punti sono integrabili. Integrali orientati.
Lemma della media integrale ($*$)

28.11.2024 Definizione della funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale ($*$).

Commenti su come calcolare $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. La primitive di una funzione data differiscono per una costante. L'integrale indefinito e alcune primitive elementari.
Formula di integrazione per parti ($*$) ed esercizi.

2.12.2024 Formula del cambio di variabili ($*$) ed esercizi.
Metodo per l'integrazione di funzioni razionali del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con P, Q polinomi: casi Q di grado 1 o 2 e P grado minore di quello di Q. Esempi ed esercizi.
Teorema di fattorizzazione di un polinomio in $\mathbf{R}$ (versione reale del teorema fondamentale dell'algebra).

3.12.2024 Esercizi su integrali razionali: continuazione.
Esercizi su integrali per sostituzione: alcune sostituzione speciali.

4.12.2024 Alcune sostituzione speciali: continuazione.

Integrali impropri: introduzione e definizione. Esempi e calcolo esplicito di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ per $\alpha \in \mathbf{R}$ e parallelismo con la serie armonica generalizzata.
Calcolo esplicito di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ per $\alpha > 0$ in due modi.
Nomenclatura: integrali convergenti, divergenti, indefiniti.

5.12.2024 Criterio del confronto ($*$). Criteri del confronto asintotici ($*$). Esempi di confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$, sia in 0 che a $+\infty$, e con $\frac{1}{x-a}$ in $(a, a+1]$. Parallelismo con le serie nel caso di funzioni non negative.
Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.
Convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx$ per $t > -1$. La quantità $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx$ coincide con $n!$ per $t \in \mathbf{N}$ (Gamma di Eulero).
Convergenza assoluta. Se una funzione f è assolutamente integrabile in senso improprio in un intervallo I allora è integrabile in senso improprio nello stesso intervallo I ($*$). Qualche esempio.

9.12.2024 Integrali oscillanti: se f è positiva, decrescente, infinitesima all'infinito allora gli integrali $\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\,dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$ convergono.
Criterio integrale per la convergenza delle serie ($*$). Esempi.
Esercizi sugli integrali impropri.

10.12.2024 Esercizi sugli integrali impropri.

11.12.2024 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, equazioni differenziali ordinarie di grado n, equazioni in forme normali, equazioni autonome.
Le soluzioni di $y' = y$ sono tutte, e sole, le funzioni del tipo $y(x) = c\, e^x$, $c \in \mathbf{R}$ $(*)$. Le soluzioni di $y' + ay = 0$, a funzione continua, sono tutte, e sole, le funzioni del tipo $y(x) = c\, e^{-At)}$, dove A è una primitiva di a e $c \in \mathbf{R}$ $(*)$. Forma generale di una soluzione dell'equazione $y' + ay = f$, a e f funzioni continue $(*)$.
Esempi ed esercizi.

12.12.2024 Equazioni differenziali a variabili separabili.

16.12.2024 Altri esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con particolare attenzione a quelle di secondo grado: il caso omogeneo.

17.12.2024 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con particolare attenzione a quelle di secondo grado: il caso non omogeneo.

18.12.2024 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: ancora il caso non omogeneo.

19.12.2024 Esercizi di vario tipo.