Corso di laurea: Ingegneria Meccanica
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2025/2026
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

30.9.2025 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei prerequisiti e dei contenuti del corso.

Proposizione e predicato. Qualche elemento di teoria degli insiemi: come definire o descrivere un insieme. Insiemi numerici $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, sottrazione, complementare di un insieme. Insieme vuoto. Insieme delle parti di un insieme e sua cardinalità nel caso finito. Prodotto cartesiano tra due insiemi.

Connettivi logici $\vee, \wedge, \neg$. Costruzione delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$ e loro connessione con l'insieme unione e intersezione, la proposizione $\neg P$ e la sua connessione con l'insieme complementare.

1°.10.2025 Tabelle di verità delle proposizioni $P \vee Q$ e $P \wedge Q$. Proposizioni $\neg P$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$. Le proposizioni $\neg Q \Rightarrow \neg P$ e $\neg P \vee Q$ sono equivalenti a $P \Rightarrow Q$. Quantificatori: $\forall$, $\exists$, $!$. Negazione di alcune proposizioni. Qualche esempio.

Numeri reali - Fattorizzazione in primi, numeri coprimi fra loro. Esistono numeri che non sono razionali, ad esempio $\sqrt{2}$ $(*)$, da cui la necessità di introdurre i numeri reali.

2.10.2025 Assiomi che sono soddisfatti sia da $\mathbf{Q}$ che da $\mathbf{R}$.
Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare e conseguenze). Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorni (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi.
Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato e non vuoto. Assioma di completezza. Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$ (analogamente se $a = \max A$ allora $a = \sup A$) Una caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato $(*)$.

3.10.2025 Lezione saltata per sciopero.

7.10.2025 L'insieme $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$.

Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore.

8.10.2025 Principio di induzione: cosa significa essere induttivo, differenza tra l'essere *induttivo* e l'essere *vero*; cosa significa che un predicato su $n \in \mathbf{N}$ è vero *definitivamente*. Esempi. Somma dei primi n interi $(*)$ (tre dimostrazioni).
Somma dei primi n interi dispari (EX), somma dei primi n interi pari (EX). Esercizi sull'induzione. Somma dei quadrati dei primi n interi $(*)$. Disuguaglianza di Bernoulli $(*)$. Binomio di Newton $(*)$ (triangolo di Tartaglia).

9.10.2025 Alcune varianti della di Bernoulli tramite lo sviluppo del binomio di Newton $(*)$. Il prodotto di n numeri positivi la cui somma è n è minore o uguale ad 1 ed è uguale ad 1 se e solo se i numeri sono tutti uguali tra loro $(*)$.
La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica $(*)$.

Funzioni: definizione di funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Immagine di una funzione. Composizione tra funzioni. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive.
Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biiezioni tra insiemi di cardinalità infinita.

10.10.2025 Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biiezioni tra insiemi di cardinalità infinita. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali e $\mathbf{Z}$, insieme dei numeri interi $(*)$.
Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ $(*)$.
Non esiste una corrispondenza biunovoca tra l'insieme tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{R}$.
Grafico di una funzione. Funzioni invertibili e funzione identità.

Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Funzioni monotòne, strettamente monotòne. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotòne. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se f è strettamente monotona è invertibile; anche f^{-1} è strettamente monotona e invertibile.
Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale positivo, intero, razionale. Radici n-esime, potenze ad esponente razionale. Funzione esponenziale sui razionali. Funzioni $x \mapsto x^{m/n}$.

14.10.2025 Le funzioni strettamente monotone sono invertibili. Funzione esponenziale sui razionali e sui reali. Proprietà e biiettività della funzione ($a > 0$,

$a \neq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche. La base "e".
Cambiamento di base nelle funzioni esponenziali e nei logaritmi.

Funzioni trigonometriche: $\operatorname{sen}, \cos, \operatorname{tg}$ e loro grafici. Principali formule trigonometriche per la funzioni seno e coseno.
Funzioni $\operatorname{arcsen}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctg}$ e loro grafici.

15.10.2025 Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni e loro inverse, tra cui $x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ e $x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioniSup/ing e massimo /minimo di semplici funzioni. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili; osservazioni sulla composizione (somma e prodotto) di funzioni monotone ed esercizi su composizione di funzioni strettamente monotone. Traslazioni di funzioni: significato di $x \mapsto f(x-c)$, $x \mapsto f(x) + c$, $x \mapsto c\, f(x)$ con $c \in \mathbf{R}$. Qualche esempio.
Grafici di polinomi.

16.10.2025 Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Unicità del limite.
Esempi. Calcolo e verifica di qualche limite semplice. Qualche altra verifica di qualche limite semplice.
Definizione di sottosuccessione. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccesione ammette lo stesso limite $(*)$. Teorema della permanenza del segno $(*)$. Successioni limitate. Ogni successione convergente è limitata $(*)$. Operazioni con i limiti: limite della somma e del prodotto di due successioni $(*)$. Esempi di applicazioni e controesempi a forme indeterminate. Come mostrare che una successione non ammette limite. Esempio: $(-1)^n$.

17.10.2024 Teorema dei due carabinieri $(*)$. Teorema del confronto $(*)$. Successioni monotone. Una successione monotona ammette limite $(*)$. Alcuni limiti (tutti dimostrati, tranne la formula di Stirling) $(*)$:
$\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ con p polinomio, $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi; $\lim_{n\to+\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$. Criterio del rapporto per successioni: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$ ($a \in \mathbf{R}$).

21.10.2024 formula di Stirling nella formulazione $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$,
$\lim_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty$ se $a > 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \log_a n = -\infty$ se $a \in (0,1)$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ $(*)$.

Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti $(*)$.
Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy $(*)$. Condizioni equivalenti ad essere di Cauchy.

Le successioni $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ sono strettamente monotone per $x > 0$ e definitivamente strettamente monotone per $x < 0$ $(*)$. In particolare le due successioni $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone $(*)$. Vale $a_n \leqslant b_k$ per ogni $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 2$ $(*)$; in particolare la successione $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata, la successione $\{b_n\}_n$ è inferiormente limitata. Il numero e come limite di $(1+\frac{1}{n})^n$ per $n \to +\infty$. Anche $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$ $(*)$. Data $\{a_n\}_n$ con $\lim_n a_n = +\infty$ si ha $\lim_n (1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$. La successione $(1+\frac{x}{n})^n$ converge ad e^x, $x \in \mathbf{R}$.

22.10.2025 Limiti notevoli: data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ valgono: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}-1}{a_n} = \log b$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$ $(*)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$ $(*)$.
Osservazione: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.
Alcune conseguenze dei risultati appena visti $(*)$:
per ogni successione $\{a_n\}_n$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ si ha

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{sen} a_n = 0$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos a_n = 1$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{a_n} = 1$,

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(1+a_n) = 0$,

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a_n)^p = 1$,

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^a$,

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log a_n = \log a$,

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^p = a^p$,

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^{a_n} = b^a$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

Primi esercizi sui limiti di successioni.

23.10.2025 Ancora esercizi sui limiti di successioni.

Successioni per ricorrenza: definizione nel caso più semplice.

Serie numeriche - Introduzione. Definizione, successione delle somme parziali. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate.

24.10.2025 Criterio di Cauchy per le serie ($*$). La serie armonica diverge a $+\infty$: la somma $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ ($*$). Serie geometrica: carattere nel caso generale e somma $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n$ per $q \in (-1, 1)$. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim_n a_n = 0$ ($*$). Il viceversa è falso: esempio è la serie armonica. Serie telescopiche: esempi.
Stima: $\frac{1}{\log 2} \log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \log(n+1)$ ($*$). Operazioni con le serie. Serie a termini positivi - Criteri del confronto ($*$).

28.10.2025 Commenti sul criterio di Cauchy: coda di una serie.
Criterio del confronto asintotico ($*$). Esempi. La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $0 < \alpha < 1$ (confronto con la serie armonica). La serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geqslant 2$ (confronto con la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).
Criterio del rapporto ($*$) e suo corollario ($*$), della radice n-esima ($*$) e suo corollario ($*$). Esempi.
Se esiste il limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero. Esempio. Criterio di condensazione di Cauchy ($*$).

29.10.2025 Commenti sul criterio di condensazione di Cauchy; in particolare un esempio di $\{a_n\}_n$ non decrescente per cui $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ non hanno lo stesso carattere.
Esempi di applicazione del criterio di condensazione di Cauchy. Serie armonica generalizzata.
Criterio di Leibniz ($*$). Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente. ($*$).

Primi esercizi sulle serie.

30.10.2025 Esercizi sulle serie.