

Corso di laurea: Ingegneria Meccanica  
Programma di **Analisi Matematica I** – a.a. 2025/2026  
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

30.9.2025 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei prerequisiti e dei contenuti del corso.

Proposizione e predicato. Qualche elemento di teoria degli insiemi: come definire o descrivere un insieme. Insiemi numerici  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ . Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, sottrazione, complementare di un insieme. Insieme vuoto. Insieme delle parti di un insieme e sua cardinalità nel caso finito. Prodotto cartesiano tra due insiemi.

Connettivi logici  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ . Costruzione delle proposizioni  $P \vee Q$  e  $P \wedge Q$  e loro connessione con l'insieme unione e intersezione, la proposizione  $\neg P$  e la sua connessione con l'insieme complementare.

1° .10.2025 Tabelle di verità delle proposizioni  $P \vee Q$  e  $P \wedge Q$ . Proposizioni  $\neg P$ ,  $P \Rightarrow Q$ ,  $P \Leftrightarrow Q$ . Le proposizioni  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  e  $\neg P \vee Q$  sono equivalenti a  $P \Rightarrow Q$ . Quantificatori:  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $!$ . Negazione di alcune proposizioni. Qualche esempio.

Numeri reali - Fattorizzazione in primi, numeri coprimi fra loro. Esistono numeri che non sono razionali, ad esempio  $\sqrt{2}$  (\*), da cui la necessità di introdurre i numeri reali.

2.10.2025 Assiomi che sono soddisfatti sia da  $\mathbf{Q}$  che da  $\mathbf{R}$ .

Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare e conseguenze). Sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$ : intervalli, intorno (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi.

Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato e non vuoto. Assioma di completezza. Se  $a = \min A$  allora  $a = \inf A$  (analogamente se  $a = \max A$  allora  $a = \sup A$ ) Una caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore per un insieme limitato (\*).

3.10.2025 Lezione saltata per sciopero.

7.10.2025 L'insieme  $\mathbf{Q}$  è denso in  $\mathbf{R}$ .

Esempi ed esercizi su estremo superiore ed inferiore.

- 8.10.2025 Principio di induzione: cosa significa essere induttivo, differenza tra l'essere *induttivo* e l'essere *vero*; cosa significa che un predicato su  $n \in \mathbf{N}$  è vero *definitivamente*. Esempi. Somma dei primi  $n$  interi (\*) (tre dimostrazioni).  
Somma dei primi  $n$  interi dispari (EX), somma dei primi  $n$  interi pari (EX). Esercizi sull'induzione. Somma dei quadrati dei primi  $n$  interi (\*). Disuguaglianza di Bernoulli (\*). Binomio di Newton (\*) (triangolo di Tartaglia).
- 9.10.2025 Alcune varianti della di Bernoulli tramite lo sviluppo del binomio di Newton (\*). Il prodotto di  $n$  numeri positivi la cui somma è  $n$  è minore o uguale ad 1 ed è uguale ad 1 se e solo se i numeri sono tutti uguali tra loro (\*).  
La media geometrica di  $n$  numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica (\*).  
Funzioni: definizione di funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Immagine di una funzione. Composizione tra funzioni. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive.  
Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biezioni tra insiemi di cardinalità infinita.
- 10.10.2025 Cardinalità di un insieme: insiemi con cardinalità finita. Biezioni tra insiemi di cardinalità infinita. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali e  $\mathbf{Z}$ , insieme dei numeri interi (\*).  
Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali e i numeri razionali  $\mathbf{Q}$  (\*).  
Non esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme tra  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{R}$ .  
Grafico di una funzione. Funzioni invertibili e funzione identità.  
Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Funzioni monotone, strettamente monotone. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili: se  $f$  è strettamente monotona è invertibile; anche  $f^{-1}$  è strettamente monotona e invertibile.  
Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale positivo, intero, razionale. Radici  $n$ -esime, potenze ad esponente razionale. Funzione esponenziale sui razionali. Funzioni  $x \mapsto x^{m/n}$ .
- 14.10.2025 Le funzioni strettamente monotone sono invertibili. Funzione esponenziale sui razionali e sui reali. Proprietà e biiettività della funzione ( $a > 0$ ,

$a \neq 1$ )

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow (0, +\infty) \\ x \longmapsto a^x \end{array}$$

Logaritmo  $\log_a$  come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche. La base “ $e$ ”.

Cambiamento di base nelle funzioni esponenziali e nei logaritmi.

Funzioni trigonometriche:  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  e loro grafici. Principali formule trigonometriche per la funzioni seno e coseno.

Funzioni  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctg$  e loro grafici.

15.10.2025 Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni e loro inverse, tra cui  $x \mapsto \tan(\arctg x)$  e  $x \mapsto \arctg(\tan x)$ .

Qualche esercizio su semplici grafici di composizione di funzioni  $\text{Sup/ing}$  e  $\text{massimo/minimo}$  di semplici funzioni. Le funzioni strettamente monotone sono invertibili; osservazioni sulla composizione (somma e prodotto) di funzioni monotone ed esercizi su composizione di funzioni strettamente monotone. Traslazioni di funzioni: significato di  $x \mapsto f(x - c)$ ,  $x \mapsto f(x) + c$ ,  $x \mapsto c f(x)$  con  $c \in \mathbf{R}$ . Qualche esempio. Grafici di polinomi.

16.10.2025 Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Unicità del limite.

Esempi. Calcolo e verifica di qualche limite semplice. Qualche altra verifica di qualche limite semplice.

Definizione di sottosuccessione. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccessione ammette lo stesso limite (\*). Teorema della permanenza del segno (\*). Successioni limitate. Ogni successione convergente è limitata (\*). Operazioni con i limiti: limite della somma e del prodotto di due successioni (\*). Esempi di applicazioni e controesempi a forme indeterminate. Come mostrare che una successione non ammette limite. Esempio:  $(-1)^n$ .

17.10.2024 Teorema dei due carabinieri (\*). Teorema del confronto (\*). Successioni monotone. Una successione monotona ammette limite (\*). Alcuni limiti (tutti dimostrati, tranne la formula di Stirling) (\*):

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$  con  $p$  polinomio,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ ,  $p$  e  $q$  polinomi;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$  con  $a \in \mathbf{R}$ . Criterio del rapporto per successioni:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k}$  con  $a > 1$  e  $k > 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$  per ogni  $a > 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n!/n^n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

21.10.2024 formula di Stirling nella formulazione  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$ ,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = +\infty$  se  $a > 1$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = -\infty$  se  $a \in (0, 1)$  (\*),  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$  (\*).

Le successioni limitate ammettono sottosuccessioni convergenti (\*).

Successioni di Cauchy: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy (\*). Condizioni equivalenti ad essere di Cauchy.

Le successioni  $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$  sono strettamente monotone per  $x > 0$  e definitivamente strettamente monotone per  $x < 0$  (\*). In particolare le due successioni  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  e  $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$  sono strettamente monotone (\*). Vale  $a_n \leq b_k$  per ogni  $n \geq 1$  e  $k \geq 2$  (\*); in particolare la successione  $\{a_n\}_n$  è superiormente limitata, la successione  $\{b_n\}_n$  è inferiormente limitata. Il numero  $e$  come limite di  $(1 + \frac{1}{n})^n$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$  (\*). Data  $\{a_n\}_n$  con  $\lim_n a_n = +\infty$  si ha  $\lim_n (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ . La successione  $(1 + \frac{x}{n})^n$  converge ad  $e^x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

22.10.2025 Limiti notevoli: data  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  successione tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  e  $a_n \neq 0$  valgono:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$  (\*),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$  (\*),  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$  (\*),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{a_n} - 1}{a_n} = \log b$  (\*),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = p$  per ogni  $p > 0$  (\*).

Osservazione: se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ,  $a_n \neq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R}$  allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

Alcune conseguenze dei risultati appena visti (\*):

per ogni successione  $\{a_n\}_n$  con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  si ha

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = 0$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = 1$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = 1$ ,
- (d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(1 + a_n) = 0$ ,
- (e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n)^p = 1$ ,
- (f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = b^a$ ,
- (g)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log a_n = \log a$ ,
- (h)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^p = a^p$ ,
- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{a_n} = b^a$  con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ .

Primi esercizi sui limiti di successioni.

23.10.2025 Ancora esercizi sui limiti di successioni.

Successioni per ricorrenza: definizione nel caso più semplice.

Serie numeriche - Introduzione. Definizione, successione delle somme parziali. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate.

24.10.2025 Criterio di Cauchy per le serie (\*). La serie armonica diverge a  $+\infty$ : la somma  $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$  (\*). Serie geometrica: carattere nel caso generale e somma  $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n$  per  $q \in (-1, 1)$ . Condizione necessaria affinché una serie  $\sum a_n$  converga è che  $\lim_n a_n = 0$  (\*). Il viceversa è falso: esempio è la serie armonica. Serie telescopiche: esempi. Stima:  $\frac{1}{\log 2} \log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \log(n+1)$  (\*). Operazioni con le serie. Serie a termini positivi - Criteri del confronto (\*).

28.10.2025 Commenti sul criterio di Cauchy: coda di una serie.

Criterio del confronto asintotico (\*). Esempi. La serie  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge per  $0 < \alpha < 1$  (confronto con la serie armonica). La serie  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge per  $\alpha \geq 2$  (confronto con la serie  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ ).

Criterio del rapporto (\*) e suo corollario (\*), della radice  $n$ -esima (\*) e suo corollario (\*). Esempi.

Se esiste il limite  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$  allora esiste anche  $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$  e i due limiti sono uguali. Il viceversa (in generale) non è vero. Esempio. Criterio di condensazione di Cauchy (\*).

29.10.2025 Commenti sul criterio di condensazione di Cauchy; in particolare un esempio di  $\{a_n\}_n$  non decrescente per cui  $\sum a_n$  e  $\sum 2^n a_{2^n}$  non hanno lo stesso carattere.

Esempi di applicazione del criterio di condensazione di Cauchy. Serie armonica generalizzata.

Serie e segni alterni: criterio di Leibniz (\*).

Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente. (\*).

Primi esercizi sulle serie.

30.10.2025 Esercizi sulle serie.

31.10.2025 Limite per funzioni: definizione di intorno di  $x \in \overline{\mathbf{R}}$ , di punto di accumulazione  $x \in \overline{\mathbf{R}}$  per  $D \subset \mathbf{R}$ , definizione di limite per funzioni da  $D$  in  $\mathbf{R}$  per  $x \rightarrow x_o$ ,  $x_o$  di accumulazione per  $D$ .

Verifica esplicita di un semplice limite. Esempi.

Proprietà elementari dei limiti di funzioni: unicità del limite.

Caratterizzazione del limite tramite successioni (\*). Esempio di un limite che non esiste:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (\*). Proprietà elementari dei limiti di funzioni: teorema della permanenza del segno, criterio del confronto, teorema dei due carabinieri. Caratterizzazione del limite per funzioni monotone. Operazioni con i limiti.

4.11.2025 Locale limitatezza per funzioni che ammettono limite finito.

Limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$  per ogni  $p > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = 1/(\log a)$ .

Esercizi sui limiti.

5.11.2025 Funzioni continue: definizione, confronto con la definizione di limite, continuità da destra e da sinistra. Esempi di funzioni continue e non. Discontinuità: eliminabile, di prima specie, di seconda specie. Esempi. Estensione di una funzione per continuità, anche solo da destra o solo da sinistra. Esempi.

Le funzioni elementari sono continue, somma e prodotto di funzioni continue sono continui, il reciproco di una funzione continua e il quoziente di funzioni continue (quando hanno senso) sono continue. La composizione di funzioni continue è continua (\*).

Teorema della permanenza del segno (\*).

Teorema degli zeri: enunciato, esempi e controesempi.

6.11.2025 Teorema degli zeri: dimostrazione (\*).

Esempi e applicazioni del teorema degli zeri, anche con una funzione definita in un intervallo non chiuso o non limitato. In particolare: i polinomi di grado dispari hanno sempre almeno una radice reale.

Teorema dei valori intermedi (\*). Esempi ed esercizi. Teorema di Weierstrass (\*). Esempi e controesempi. Applicazioni del teorema di Weierstrass a funzioni definite in un intervallo aperto. Teorema di Rolle per funzioni continue (\*).

7.11.2025 Teorema di Rolle adattato ad intervalli aperti, anche illimitati.

Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha l'inversa continua. Una funzione monotona definita in un intervallo  $I$  è continua se e solo se  $f(I)$  è un intervallo.

Una funzione  $f$  continua, invertibile e definita in un intervallo è monotona.

Controesempi.

Qualche esercizio: verifica della continuità di una funzione dipendente da un parametro.

Derivata: il rapporto incrementale, definizione e significato geometrico. Retta tangente ad un grafico. Derivate destra e sinistra. Esempi di funzioni non derivabili in un punto.

Una funzione derivabile è continua (\*).

11.11.2025 Derivate di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili (\*); derivata della composizione (regola della catena) (\*); derivata della funzione inversa (\*).

Calcolo esplicito della derivata di alcune funzioni: esponenziale, logaritmo, la potenza  $x^\alpha$ , seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente (\*). Commenti sui legami tra le derivate viste finora e i limiti notevoli.

Il numero  $e$ : osservazione sul numero  $e$  come base “naturale”.

12.11.2025 Teoremi classici del calcolo differenziale: teorema di Fermat (\*). Esempi sul teorema di Fermat. Come trovare il massimo e il minimo di una funzione definita in un intervallo. Qualche esercizio.

Teorema di Rolle per funzioni derivabili (\*). Controesempi e significato geometrico. Teorema di Lagrange (\*) e commenti.

Una funzione che ha derivata nulla è costante in ogni intervallo contenuto nel suo dominio (\*).

$\operatorname{arctg} 1/x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$  per  $x > 0$ .

Caratterizzazione delle funzioni monotone su intervalli (\*). Esempi.

13.11.2025 Regola di de l'Hôpital. Esempi: quando funziona ed esempi nei quali non funziona. Corollario di de l'Hôpital sull'estensione della derivata.

Un controesempio al corollario di de l'Hôpital: un esempio di una funzione derivabile la cui derivata non è continua in un punto.

Esercizi sull'utilizzo della derivata prima per risolvere equazioni e disequazioni.

18.11.2025 Asintoti: obliqui, orizzontali, verticali. Esempi.

Funzioni concave e convesse: definizione e sua spiegazione.

Esempio: la funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente convessa (\*).

Una caratterizzazione delle funzioni convesse tramite monotonia dei rapporti incrementali. (\*).

Le funzioni convesse sono continue (\*).

Caratterizzazione delle funzioni (strettamente) convesse e derivabili ( $f(x) \geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$  e  $f'$  crescente) (\*).

Caratterizzazioni delle funzioni convesse e derivabili due volte tramite la derivata derivata seconda (\*). Commenti ed esempi.

Se  $x_o$  è un punto critico per una funzione convessa allora  $x_o$  è di minimo

o assoluto; se la funzione è strettamente convessa tale punto di minimo è unico (\*). Punto di flesso: definizione ed esmpi.

Esercizi sull'uso delle derivate: un'applicazioni della derivata prima (per la risoluzione di equazioni e disequazioni).

19.11.2025 Derivate di ordine successivo al primo. Funzioni di classe  $C^k(I)$  con  $k \in \mathbf{N}$ .

Asintoti: orizzontali, obliqui. Esempi.

Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

19.11.2025 Esercizi sullo studio del grafico di una funzione.

20.11.2025 Confronto locale tra funzioni: definizione di “*o* piccolo” in un punto. Date  $f$  e  $g$  funzioni,  $g(x) \neq 0$  per  $x \neq c$ ,  $f$  è  $o_c(g)$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  (\*). Date  $f$  e  $g$  funzioni, definizione di “ $f$  asintotica a  $g$  in un punto  $c$ ”. Definizione di ordine di infinitesimo Esempi. Non tutte le funzioni hanno un ordine in infinitesimo o di infinito. Esempi. Definizione di ordine di infinito Esempi. Non tutte le funzioni hanno un ordine di infinito. Esempi.

Operazioni con gli *o* piccoli di  $x^n$  in zero.

21.11.2025 Sviluppi asintotici e parte principale di una funzione.

Formula di Taylor con resto di Peano (\*). Formula di Taylor con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari nello 0. Tra queste,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \log(1+x)$ ,  $f(x) = (1+x)^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Esempi e commenti.

25.11.2025 Relazione tra la natura dei punti stazionari e la derivata seconda (\*).

Esempi e commenti.

Esercizi con la formula di Taylor.

26.11.2025 Esercizi con la formula di Taylor: limiti e altre applicazioni.

Serie: alcuni esempi di applicazioni del criterio di Leibniz e di condensazione di Cauchy studiando la monotonia della successione tramite la derivata di un'opportuna funzione.

27.11.2025 Esercizi con la formula di Taylor: serie.

28.11.2025 Integrali: introduzione. Calcolo tramite approssimazione con rettangoli dell'area del sottografico della funzione  $x \mapsto x^2$  su un intervallo  $[0, a]$ . Cenno al caso più generale dell'integrale della funzione  $x \mapsto x^m$  su un intervallo  $[0, a]$  per  $m \in \mathbf{N}$ .

Integrale secondo Riemann: suddivisione di un intervallo, somme inferiori e superiori per una funzione  $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$  relativamente ad una suddivisione  $T$  (denotate rispettivamente con  $I_-(f, T)$  e  $I_+(f, T)$ ).

Per ogni  $T, S$  suddivisioni vale  $I_-(f, T) \leq I_+(f, S)$ .

Se  $T \subseteq S$ , allora  $I_-(f, T) \leq I_-(f, S)$  e  $I_+(f, T) \geq I_+(f, S)$ .

Definizioni di integrale inferiore, di integrale superiore, di funzioni integrabili secondo Riemann.

Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann (la funzione di Dirichlet ristretta ad un intervallo). Proprietà elementari dell'integrale di Riemann: linearità, positività, isotonia.

Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni discontinue, con discontinuità di tipo salto, in al più un numero finito di punti sono integrabili.

Integrali orientati.

Lemma della media integrale (\*).

Definizione della funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale (\*).

2.12.2025 Commenti sul teorema fondamentale del calcolo integrale. Commenti su

come calcolare  $\int_a^b f(x) dx$ . La primitive di una funzione data differiscono tra loro per una costante. L'integrale indefinito. Alcune primitive elementari.

Formula di integrazione per parti (\*) ed esercizi.

Formula del cambio di variabili (\*) ed esempi.

3.12.2025 Commenti ed esercizi sulla formula del cambio di variabili.

Metodo per l'integrazione di funzioni razionali del tipo  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  con  $P, Q$  polinomi: casi  $Q$  di grado 1 o 2 e  $P$  grado minore di quello di  $Q$ . Esempi ed esercizi.

Teorema di fattorizzazione di un polinomio in  $\mathbf{R}$  (versione reale del teorema fondamentale dell'algebra). Esercizi su integrali razionali.

4.12.2025 Esercizi su integrali razionali: continuazione.

Esercizi su integrali per sostituzione: alcune sostituzioni speciali.

5.12.2025 Alcune sostituzioni speciali: continuazione.

Integrali impropri: introduzione e definizione. Esempi e calcolo esplicito di  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  per  $\alpha \in \mathbf{R}$  e parallelismo con la serie armonica generalizzata.

Calcolo esplicito di  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  per  $\alpha > 0$ .

Nomenclatura: integrali convergenti, divergenti, indefiniti.

- 9.12.2025 Parallelismo con le serie nel caso di funzioni non negative (\*). Criterio del confronto (\*). Criteri del confronto asintotici. Esempi di confronto con  $\frac{1}{x^\alpha}$ , sia in 0 che a  $+\infty$ , e con  $\frac{1}{x-a}$  in  $(a, a+1]$ . Caso dell'integrale  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta} dx$  con  $\alpha, \beta > 0$ .  
 Convergenza dell'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .  
 Convergenza dell'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x} dx$  per  $t > -1$ . La quantità  $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t e^{-x} dx$  coincide con  $n!$  per  $t \in \mathbf{N}$  (Gamma di Eulero).
- 10.12.2025 Convergenza assoluta. Se una funzione  $f$  è assolutamente integrabile in senso improprio in un intervallo  $I$  allora è integrabile in senso improprio nello stesso intervallo  $I$  (\*). Qualche esempio.  
 Criterio integrale per la convergenza delle serie (\*). Esempi.  
 Integrali oscillanti: se  $f$  è positiva, decrescente, infinitesima all'infinito allora gli integrali  $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x dx$  e  $\int_a^{+\infty} f(x) \cos x dx$  convergono. Qualche esempio.
- 11.12.2025 Esercizi sugli integrali generalizzati.
- 12.12.2025 Esercizi sugli integrali generalizzati.  
 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione (definizioni di equazione differenziale di grado  $n$ , di soluzione, eq. autonoma, in forma normale).  
 Equazioni differenziali lineari del primo ordine: le soluzioni di  $y' = y$  sono tutte, e sole, le funzioni del tipo  $y(x) = c e^x$ ,  $c \in \mathbf{R}$  (\*). Le soluzioni di  $y' + ay = 0$ ,  $a$  funzione continua, sono tutte, e sole, le funzioni del tipo  $y(x) = c e^{-At}$ , dove  $A$  è una primitiva di  $a$  e  $c \in \mathbf{R}$  (\*). Forma generale di una soluzione dell'equazione  $y' + ay = f$ ,  $a$  e  $f$  funzioni continue (\*).
- 16.12.2025 Esempi ed esercizi sulle equazioni differenziali lineari del primo ordine.  
 Equazioni differenziali a variabili separabili.
- 17.12.2025 Altri esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.  
 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: introduzione e primi esempi.
- 18.12.2025 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (con particolare attenzione a quelle di secondo grado): il caso omogeneo.  
 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (con particolare attenzione a quelle di secondo grado): il caso non omogeneo.
- 19.12.2025 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: ancora sul caso non omogeneo.

23.12.2025 Esercizi di vario tipo.