Funzioni continue: definizione ed esempi.

Funzioni continue: f è continua in $x_0 \in D$, x_0 di accumulazione per D, se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $(*)$. Teorema della permanenza del segno $(*)$. La somma, il prodotto, il rapporto (quando ha senso) di due funzioni continue è continua, la composizione di due funzioni continue è continua. Le funzioni elementari sono continue. Punti di discontinuità: esempi. Teorema degli zeri $(*)$. Una funzione continua manda intervalli in intervalli (teorema dei valori intermedi) $(*)$. Controesempi.
Una funzione continua manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati o, equivalentemente, una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo $(*)$ (teorema di Weierstrass). Il teorema di Weierstrass vale anche se f è continua in un insieme chiuso e limitato che non è un intervallo. Controesempi.

Definizione di estremo ed estremante. Teorema di Rolle $(*)$. Una funzione continua ed invertibile in un intervallo I è monotona in I. Data una funzione continua ed invertibile in un intervallo I si ha che $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua. Esempi e controesempi.
Uniforme continuità: definizione, commenti, esempi. Una funzione uniformemente continua in D è continua in ogni punto di D, una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua in tale intervallo $(*)$. Funzioni derivabili - Rapporto incrementale, definizione di derivata, derivate destra e sinistra, equazione della retta tangente ad un grafico. Derivate: esempi di funzioni derivabili e non derivabili, derivata della funzione $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ e di $f(x) = |x|$. Se una funzione è derivabile in un punto è continua in tale punto $(*)$.

Esercizi sui limiti.

Date due funzioni derivabili in un punto, Derivata della loro somma, del loro prodotto, del loro rapporto $(*)$, regola della catena $(*)$, derivazione dell'inversa di una funzione in termini della funzione, derivate delle funzioni elementari $(*)$.
Toremi classici del calcolo differenziale: Fermat, Rolle (nel caso di funzioni derivabili), Lagrange. Una funzione derivabile è crescente (decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (positiva) $(*)$. Se una funzione ha la derivata positiva (negativa) allora è strettamente crescente (decrescente) $(*)$. Regola di de l'Hôpital. Esempi.

Data una funzione derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, se esiste finito il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ $(*)$ (applicazione di de l'Hôpital). Derivate successive: funzioni di classe C^k con

$k \in \mathbf{N}$: esempi di funzioni derivabili, ma non C^1. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti sulla derivata seconda affinché un punto sia di estremo locale interno. Condizioni sulle derivate di ordine superiore. Convessità e concavità: definizione, se una funzione è concava o convessa in I allora è continua all'interno di I. Asintoti. Flessi.

Esercizi su grafici funzioni.

Confronto locale tra funzioni: funzioni asintotiche, o piccolo, o grande. Infinito e infinitesimo di ordine $\alpha > 0$. Sviluppi asintotici e formula di Taylor: con resto di Peano $(*)$, con resto di Lagrange. Sviluppi di alcune funzioni elementari.

Applicazioni della formula di Taylor: calcolo dello sviluppo di alcune funzioni, calcolo di limiti, studio di serie, approssimazione del numero e (e di altri) tramite la formula di Taylor, calcolo dell'ordine di infinitesimo di alcune funzioni. La serie $\sum_n \frac{1}{n!}$ converge al numero e.