Capitolo 0

Qualche proposizione scritta con i quantificatori

Ultimo aggiornamento: 10 ottobre 2022

Esercizio 0.1 - Date le seguenti proposizioni

$$P: \quad \forall\, m \in A \quad m \geqslant 5$$
$$Q: \quad \exists\, l \in B \text{ t.c. } l < 10$$

si scrivano:

1. $\neg P$
2. $\neg Q$
3. $\neg(P \vee Q)$
4. $\neg(P \wedge Q)$

Esercizio 0.2 - Si scriva la seguente proposizione con i quantificatori:
ogni anno accademico c'è almeno uno studente a Padova che non supera neanche un esame.
Si denoti con $B(a, s, e)$ il predicato: nell'anno accademico a lo studente s non supera l'esame e

Esercizio 0.3 - Si neghi l'affermazione dell'esercizio precedente.

Esercizio 0.4 - Si scriva la seguente proposizione con i quantificatori: ogni numero reale positivo ammette la radice quadrata.

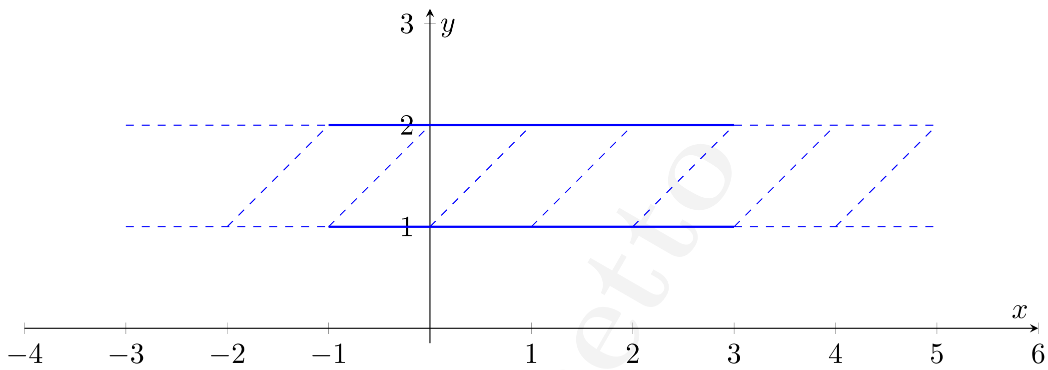
Esercizio 0.5 - Si neghino le seguenti affermazioni:

1. $(\forall\, x \in S$ si ha $m \geqslant x)$
2. $\forall x, y \in \mathbf{R}\,, x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
3. $\forall\, \epsilon\ \exists\, \delta$ t.c.$\forall\, x$ per cui $|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \epsilon$
4. $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \nu \in \mathbf{N}$ tale che $\forall\, n \geqslant \nu$ si ha $|a_n - l| < \epsilon$
5. $\forall\, M > 0\, \exists\, \nu \in \mathbf{N}$ tale che $\forall\, n \geqslant \nu$ si ha $a_n > M$
6. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
7. $\exists L > 0\ \forall\, x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\ |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$
8. $\forall\, x \in \mathbf{R}\ \forall\, y \in \mathbf{R}\ \forall\, t \in [0, 1]\ f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$

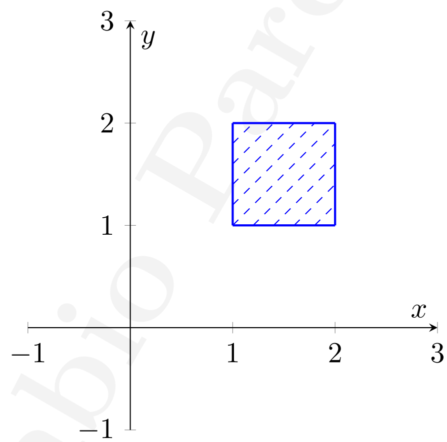
****

Esercizio 0.6 - Si descrivano i seguenti insiemi.

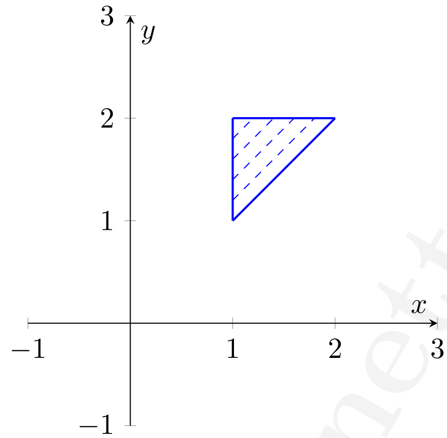
1. L'insieme $\{7, 8, 9\}$ come sottoinsieme di $\mathbf{N}$
2. L'insieme $\{7, 8, 9, 21, 22, 23\}$ come sottoinsieme di $\mathbf{N}$
3. La parte tratteggiata come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$



4. La parte tratteggiata come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$



5. La parte tratteggiata come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$



3
y
2
1
x
−1
1
2
3
−1

Soluzioni

Soluzione 0.1 -

1. $\exists\, m \in A$ t.c. $m < 5$
2. $\forall\, l \in B$ t.c. $l \geqslant 10$
3. $(\exists\, m \in A$ t.c. $m < 5) \wedge (\forall\, l \in B$ t.c. $l \geqslant 10)$
4. $(\exists\, m \in A$ t.c. $m < 5) \vee (\forall\, l \in B$ t.c. $l \geqslant 10)$

Soluzione 0.2 - Sia A l'insieme degli "anni", S quello degli studenti dell'università di Padova, E l'insieme di tutti i corsi (e di conseguenza degli esami da superare). La proposizione richiesta è

$$\forall\, a \in A \quad \exists\, s \in S \quad \forall\, e \in E \quad B(a, s, e)$$

Soluzione 0.3 - Gli insiemi A, S, E definiti nella soluzione dell'Esercizio 0.2. La negazione è: c'è stato (almeno) un anno nel quale ogni studente di Padova ha superato almeno un esame

$$\exists\, a \quad \forall\, s \quad \exists\, e \quad \neg B(a, s, e)$$

Soluzione 0.4 -

$$\forall\, x \in \mathbf{R}\ (x > 0 \Rightarrow \exists\, y\ (x = y^2))$$

Soluzione 0.6 -

1. $\{7, 8, 9\} = \{n \in \mathbf{N} \,|\, n \leqslant 9 \wedge n \geqslant 7\}$ che spesso più semplicemente scriveremo $\{n \in \mathbf{N} \,|\, 7 \leqslant n \leqslant 9\}$

2. $\{7, 8, 9, 21, 22, 23\} = \{n \in \mathbf{N} \,|\, 7 \leqslant n \leqslant 9 \vee 21 \leqslant n \leqslant 23\} =$
   $= \{n \in \mathbf{N} \,|\, 7 \leqslant n \leqslant 9\} \cup \{n \in \mathbf{N} \,|\, 21 \leqslant n \leqslant 23\}$

3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1 \wedge y \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant 2\}$

   che più semplicemente si scrive $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

4. Si osservi che l'insieme può essere visto come l'intersezione di quattro insiemi (semipiani), ognuno dei quali definito da un solo predicato.
   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1 \wedge y \leqslant 2 \wedge x \geqslant 1 \wedge x \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leqslant 2\} =$

   che più semplicemente si scrive
   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant y \leqslant 2 \wedge 1 \leqslant x \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant y \leqslant 2, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$

5. Qui abbiamo due (in realtà più di due) modi equivalenti per descrivere questo insieme, sempre come intersezione di quattro semipiani.
   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1 \wedge y \leqslant 2 \wedge x \geqslant 1 \wedge x \leqslant y\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$

   che più semplicemente si scrive
   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant y \leqslant 2 \wedge y \leqslant x \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant y \leqslant 2, 1 \leqslant x \leqslant y\}$

   oppure

   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant x \wedge y \leqslant 2 \wedge x \geqslant 1 \wedge x \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant x\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leqslant 2\}$

   che più semplicemente si scrive
   $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x \leqslant y \leqslant 2\} =$
   $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 2, x \leqslant y \leqslant 2\}$